

Proposition d'un sujet de stage de Master 2 pouvant déboucher
sur une thèse

Régime de Hall quantique dans un gaz de bosons

Nicolas Rougerie, Université Grenoble-Alpes et CNRS, LPMMC.

Septembre 2016

Contexte général : physique mathématique des atomes froids

La physique des atomes froids a émergé et s'est développée de manière spectaculaire depuis une vingtaine d'années, donnant accès à des conditions expérimentales remarquables par leur flexibilité. Un paradigme général s'est ainsi imposé: mimer aussi précisément que possible des modèles de matière condensée avec des atomes froids. Les avantages vont dans deux directions complémentaires :

- test de modèles théoriques sur des systèmes facilement contrôlables, afin de les valider et de les raffiner éventuellement.
- observation de certains effets spectaculaires prévus théoriquement sur la base de modèles parfois simplistes d'un point de vue matière condensée, mais pouvant être réalisés avec des atomes froids.

Pour le mathématicien, on notera un troisième avantage : il a été possible ces dernières années d'obtenir des théorèmes mathématiquement rigoureux ayant des applications directes à des expériences réelles.

Le sujet proposé se place dans ce cadre : on se propose de démontrer certains résultats mathématiques rendant compte de résultats expérimentaux fins et récents, ou éventuellement en prédisant de nouveaux. On espère ainsi que l'approche mathématique utilisée jettera une nouvelle lumière sur une certaine physique. Et inversement, que la physique étudiée apportera de nouveaux thèmes et idées aux théories mathématiques que l'on se propose d'utiliser.

Sujet : atomes froids dans un champ magnétique artificiel

La physique de particules quantiques sous fort champ magnétique et à faible température révèle de nombreux effets fascinants. En matière condensée, on peut citer par exemple la réaction des supraconducteurs [7, 8, 16] au champ magnétique (effet Meissner, nucléation de tourbillons quantifiés et leur organisation en réseaux d'Abrikosov, supraconductivité de surface ...) ou bien les effets Hall quantiques [9, 10, 17], entiers et fractionnaires (quantification universelle de la conductivité de Hall, émergence de quasi-particules de charge fractionnaire ...).

Un obstacle pour mimer cette physique avec des atomes froids est que ces particules sont neutres. Depuis une quinzaine d'années, plusieurs techniques ont été utilisées pour lever cette objection: mise en

rotation des atomes, interactions lumière/matière principalement [6]. Plusieurs groupes expérimentaux ont réussi à créer des champs magnétiques artificiels, qui ont permis l'observation de réseaux de tourbillons quantifiés [13, 1, 14] et d'un analogue de l'effet Hall classique [11].

Les champs magnétiques artificiels obtenus peuvent être très forts, permettant l'étude de la physique dans le plus bas niveau de Landau (espace propre fondamental d'un Laplacien magnétique 2D). Il s'agit alors d'étudier des modèles de mécanique quantique à N corps posés dans un certain espace Hilbertien de fonctions analytiques. Cette structure particulière rend l'analyse particulièrement riche.

Dans ce contexte, on se propose d'étudier un gaz de bosons 2D confinés au plus bas niveau de Landau, dans un régime de type champ moyen où des réseaux de vortex sont nucléés en réponse au champ magnétique.

Plan de travail

On attaquera en premier les problèmes décrits ci-dessous.

Dans un certain régime de paramètres, le gaz de bosons que l'on étudie est un condensat de Bose-Einstein [2]. Le problème à N corps de départ peut être approximé par un modèle de champ moyen, en négligeant les corrélations entre particules. Il s'agit alors d'étudier une fonctionnelle d'énergie non linéaire de type Thomas-Fermi, dont on cherchera le minimum et les minimiseurs dans le plus bas niveau de Landau. Cette condition, imposée par le régime expérimental qui nous intéresse, rend le problème très intéressant. En son absence, il est exactement soluble. En sa présence, il a été conjecturé théoriquement [5, 3], observé expérimentalement et numériquement [4] que le profil de densité des atomes était similaire au problème sans contrainte, mais avec des paramètres modifiés à cause de la présence d'un réseau de tourbillons. On se propose de démontrer cette conjecture, dans un régime asymptotique approprié. Notons que la détermination exacte des paramètres modifiés est (essentiellement) équivalente au problème de cristallisation, un problème ouvert fameux et difficile. Nous ne prévoyons donc pas une attaque frontale dans cette direction, mais plutôt de caractériser les paramètres via l'infimum d'un problème asymptotique (une limite thermodynamique).

On peut également poser la question de la dérivation rigoureuse du modèle de champ moyen mentionné précédemment, à partir du vrai problème à N corps. Une preuve existe déjà, due à Lieb, Seiringer et Yngvason [12], mais elle constitue un tour de force technique, et une simplification en serait hautement désirable. Les méthodes utilisées par ces auteurs utilisent fortement les propriétés du Hamiltonien de départ, mais une nouvelle approche de ce genre de limites a récemment été proposée, basée plutôt sur la symétrie bosonique de l'espace des états admissibles (voir [15] et références citées). On peut en espérer des simplifications significatives, mais il sera sans doute nécessaires de la compléter par des estimations fines exploitant les propriétés de l'espace fonctionnel dans lequel le problème est posé.

Remarques pour d'éventuels candidats

Mon activité de recherche principale est la physique mathématique. Le stage est donc idéal pour un étudiant souhaitant étudier des phénomènes physiques avec une approche mathématique rigoureuse. Idéalement, le résultat du stage (et de l'éventuelle thèse ultérieure) prendra la forme de théorèmes rigoureux et originaux. Une partie bibliographique significative est à prévoir pour se familiariser avec le contexte, mais le sujet du stage lui-même est de démontrer un théorème nouveau, ou du moins de faire des progrès dans cette direction.

Bibliographie

- [1] J. R. ABO-SHAER, C. RAMAN, J. M. VOGELS, AND W. KETTERLE, *Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates*, *Science*, 292 (2001), pp. 476–479.
- [2] A. AFTALION, *Vortex patterns in Bose Einstein condensates*, in *Perspectives in nonlinear partial differential equations*, vol. 446 of *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 1–18.
- [3] A. AFTALION AND X. BLANC, *Vortex lattices in rotating Bose-Einstein condensates*, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 38 (2006), pp. 874–893.
- [4] A. AFTALION, X. BLANC, AND J. DALIBARD, *Vortex patterns in a fast rotating Bose-Einstein condensate*, *Phys. Rev. A*, 71 (2005), p. 023611.
- [5] A. AFTALION, X. BLANC, AND F. NIER, *Lowest Landau level functional and Bargmann spaces for Bose-Einstein condensates*, *J. Funct. Anal.*, 241 (2006), pp. 661–702.
- [6] J. DALIBARD, F. GERBIER, G. JUZELIŪNAS, AND P. ÖHBERG, *Artificial gauge potentials for neutral atoms*, *Rev. Mod. Phys.*, 83 (2011), p. 1523.
- [7] P.-G. DE GENNES, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Westview Press, 1966.
- [8] S. FOURNAIS AND B. HELFFER, *Spectral Methods in Surface Superconductivity*, *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, 77, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.
- [9] J. K. JAIN, *Composite fermions*, Cambridge University Press, 2007.
- [10] R. B. LAUGHLIN, *Nobel lecture: Fractional quantization*, *Rev. Mod. Phys.*, 71 (1999), pp. 863–874.
- [11] L. J. LEBLANC, K. JIMÉNEZ-GARCÍA, R. A. WILLIAMS, M. C. BEELER, A. R. PERRY, W. D. PHILLIPS, AND I. B. SPIELMAN, *Observation of a superfluid Hall effect*, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 109 (2012), pp. 10811–10814.
- [12] E. H. LIEB, R. SEIRINGER, AND J. YNGVASON, *Yrast line of a rapidly rotating Bose gas: Gross-Pitaevskii regime*, *Phys. Rev. A*, 79 (2009), p. 063626.
- [13] K. W. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN, AND J. DALIBARD, *Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate*, *Phys. Rev. Lett.*, 84 (2000), pp. 806–809.
- [14] C. RAMAN, J. R. ABO-SHAER, J. M. VOGELS, K. XU, AND W. KETTERLE, *Vortex nucleation in a stirred Bose-Einstein condensate*, *Phys. Rev. Lett.*, 87 (2001), p. 210402.
- [15] N. ROUGERIE, *Théorèmes de de Finetti, limites de champ moyen et condensation de Bose-Einstein*. arXiv:1409.1182, 2014. Lecture notes for a cours Peccot.
- [16] E. SANDIER AND S. SERFATY, *Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model*, *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, 70, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.
- [17] H. STÖRMER, D. TSUI, AND A. GOSSARD, *The fractional quantum Hall effect*, *Rev. Mod. Phys.*, 71 (1999), pp. S298–S305.