STABILITÉ ET INSTABILITÉ D'UN GAZ DE BOSONS DIPOLAIRES
STABILITY AND INSTABILITY IN A DIPOLAR BOSE GAS

NICOLAS ROUGERIE, UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES ET CNRS, LPMMC.

Proposition de stage, niveau Master 2.
Internship proposal, Master/Diploma level.

Version française

La physique des atomes froids s'est révélée un terrain de jeu très fructueux ces ving dernières années. La réalisation, sous des conditions expérimentales très bien contrôlées, de certains phénomènes physiques emblématiques rend relevantes des analyses très fines de modèles fondamentaux. En particulier, l'obtention de condensats de Bose-Einstein à partir du milieu des années 90 a ouvert et/ou rajeuni toute une branche de physique mathématique visant à la description rigoureuse de cette nouvelle phase de matière.

Les premiers condensats étaient faits d'atomes interagissant par des forces de courte portée, de type van der Waals essentiellement. Plus récemment, des condensats avec interactions dipôles-dipôles ont étés obtenus. Celles-ci sont à longue portée, et fortement anisotropes, ce qui ouvre la voie à des phénomènes nouveaux. En particulier, un terme dipolaire trop puissant peut causer l'effondrement du gaz, à cause de sa composante attractive. Une question délicate est donc celle de la stabilité d'un tel objet, résultant de la compétition entre les interactions de contact et les interactions dipôles-dipôles. Le but du stage est de se familiariser avec les modèles mathématiques de condensats de Bose-Einstein dipolaires, et de faire des contributions originales sur les questions de stabilité/instabilité en démontrant des théorèmes rigoureux.

Le point de départ proposé est le modèle pour un gaz de bosons dipolaires confinés dans un plan, obtenu à partir du modèle 3D dans [5, 3, 2] et d'autres références. Si tous les atomes occupent un même état quantique (c'est-à-dire, en présence d'un condensat de Bose-Einstein), l'énergie du système est donnée par (dans des unités ad-hoc)

$$\mathcal{E}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + V(x_1,x_2)|\psi|^2 + \frac{\beta - \lambda + 3n_3^2\lambda}{2\sqrt{2}\varepsilon}|\psi|^4 \right) dx_1 dx_2 + \frac{3\lambda}{16\pi^3}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{(1-2n_3^2)\xi_1^2 - n_3^2\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2+s^2} e^{-\varepsilon^2 s^2/2} \left|\hat{\rho}(\xi)\right|^2 ds d\xi_1 d\xi_2.$$

Cette fonctionnelle peut se réécrire de plusieures façons différentes, nous choisissons ici l'expression en variables de Fourier de [2, 1]. Les notations sont les suivantes:

- $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ est la fonction d'onde commune à tous les atomes du condensat, que l'on cherche à déterminer. On a aussi noté $\rho = |\psi|^2$ la densité de matière correspondante et $\hat{\rho}$ sa transformée de Fourier.
- $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^+$ est un potentiel extérieur confinant les particules, par exemple un potentiel harmonique $V(x) = \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2$.

Date: Septembre 2017.

- β et λ sont deux paramètres réels fixant la force des interactions de contact et dipôles-dipôles, respectivement. Tous deux peuvent être positifs ou négatifs.
- $\varepsilon > 0$ mesure l'épaisseur du gaz dans la direction perpendiculaire au plan x_1, x_2 considéré ici.
- n_3 est la composante verticale (perpendiculaire au plan x_1, x_2) de l'orientation des dipôles. Notre convention est que la composante horizontale est[1] suivant x_1.
- Un certain nombre de facteurs numériques $\pi, \sqrt{2}, \ldots$ n'ont aucune importance qualitative.

La question de stabilité/instabilité est formulée en termes de *l'existence d'un état fondamental*, c'est à dire un minimiseur de la fonctionnelle ci-dessus sous contrainte de masse unité[2]

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 = 1.$$

On regarde donc l'infimum (et l'équation aux dérivées partielles elliptiques associée)

$$E = \inf \left\{ \mathcal{E}[\psi] \mid \int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 = 1 \right\}$$

et on demande pour quelles valeurs des paramètres $\beta, \lambda, n_3, \varepsilon$

(1) l'énergie fondamentale est finie, $E > -\infty$.
(2) un minimiseur ψ réalisant l'infimum existe, $\mathcal{E}[\psi] = E$.

Si ces deux conditions sont remplies, le système est stable, sinon, il est instable. Idéalement on souhaite résoudre complètement le problème en divisant l'espace des paramètres en exactement deux régions et démontrant qu'il y a stabilité dans l'une et instabilité dans l'autre. La question du comportement des minimiseurs lorsqu'on approche la région d'instabilité est également très intéressante. Pour le cas sans interactions dipolaires $\lambda = 0$, tout ceci a été résolu dans [4]. Les interactions dipolaires ajoutent des aspects nouveaux à cause de leur longue portée et de leur anisotropie (apparaissant, quelque peu implicitement, dans le dernier terme de l'énergie). On notera aussi que le l'interaction totale n'est ni purement attractive ni purement répulsive, et qu'elle est critique vis-à-vis de l'énergie cinétique (premier terme de l'énergie). Pour des interactions dipolaires, des résultats partiels ont étés obtenus dans [1] qui n'épuisent pas la richesse du problème.

Physiquement, nous cherchons donc à caractériser les paramètres expérimentaux donnant lieu à un condensat stable ou à son effondrement. Mathématiquement, nous attaquons un problème de minimisation non linéaire et (fortement) non convexe, avec une possible perte de compacité des suites minimisantes. Suivant son parcours antérieur, l'étudiant aura donc à se familiariser:

- avec la physique de base des gaz d'atomes froids et des condensats de Bose-Einstein, pour comprendre l'origine du problème et son intérêt pratique.
- avec les outils d'analyse fonctionnelle non-linéaire appropriés: inégalités d'interpolation optimales à la Gagliardo-Nirenberg, méthode de concentration-compacité ...

Cette maîtrise de base une fois acquise (en utilisant des textes appropriés que je conseillerais), il s'agira, suivant l'avancement du projet et les goûts de l'étudiant, d'étendre les résultats de stabilité/instabilité de [1] le plus loin possible, et/ou d'adapter l'analyse du cas critique suivant [4].

[1] Nous utilisons que son amplitude n_1 satisfait $n_1^2 = 1 - n_3^2$.

[2] Une convention plus physique mais équivalente est de fixer la masse égale à N, le nombre de particules.

English version

Cold atoms physics emerged in the past two decades as a very fruitful playground. The realisation, under well-controled experimental conditions, of certain emblematic phenomena, gives new relevance to refined analysis of certain fundamental models. In particular, the observation of Bose-Einstein condensates (starting from the mid-90s) has opened and/or rejuvenated a whole branch of mathematical physics whose aim is the rigorous description of this new phase of matter.

The first condensates were made of atoms interacting via short-range forces, of the van der Waals type essentially. More recently, condensates with dipole-dipole interactions were obtained. Those are long-ranged, and strongly anisotropic, which paves the way for new phenomena. In particular, a too powerful dipolar term can lead to the gas' collapse, because of its attractive component. A delicate question is thus that of the stability of such an object, resulting from the competition between contact and dipole-dipole interactions. The goal of the internship is to make original contributions on the stability/instability transition by proving rigorous theorems.

The proposed starting point is the model for a dipolar Bose gas confined to a plane, obtained from the 3D model in [5, 3, 2] and other references. If all the atoms occupy a single quantum state (i.e. when there is Bose-Einstein condensation), the energy of the system is given by (in appropriate units)

$$\mathcal{E}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + V(x_1,x_2)|\psi|^2 + \frac{\beta - \lambda + 3n_3^2\lambda}{2\sqrt{2}\varepsilon} |\psi|^4 \right) dx_1 dx_2 + \frac{3\lambda}{16\pi^3} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-2n_3^2)\xi_1^2 - n_3^2 \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + s^2} e^{-\varepsilon^2 s^2/2} \left|\hat{\rho}(\xi)\right|^2 ds d\xi_1 d\xi_2.$$

This functional may be rewritten in several different ways. Here we choose the expression using Fourier variables of [2, 1]. The notation is as follows:

- $\psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ is the wave-function common to all the condensates' atoms, that we seek to determine. We denote $\rho = |\psi|^2$ the associated matter density and $\hat{\rho}$ its Fourier transform.
- $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^+$ is an external potential confining the particles, for example an harmonic potential $V(x) = \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2$.
- β and λ are two real parameters setting the strength of contact and dipole-dipole interactions, respectively. Both can have either sign.
- $\varepsilon > 0$ measures the thickness of the gas in the direction perpendicular to the x_1, x_2 plane where the problem is set.
- n_3 is the vertical component (perpendicular to the x_1, x_2 plane) of the dipoles' orientation. Our convention is that the horizontal component[3] is along x_1.
- A handful of numerical factors $\pi, \sqrt{2}, \dots$ appear, with no qualitative importance whatsoever.

The stability/instability question is formulated in terms of the *existence of a ground state*, that is to say, a minimizer of the above functional under a unit mass constraint[4]

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 = 1.$$

We thus consider the infimum

$$E = \inf \left\{ \mathcal{E}[\psi] \mid \int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 = 1 \right\}$$

and we ask for which values of the parameters $\beta, \lambda, n_3, \varepsilon$

(1) the ground state energy is finite, $E > -\infty$.

[3] Its amplitude n_1 satisfies $n_1^2 = 1 - n_3^2$.

[4] A more physical but equivalent convention is to fix the mass equal to N, the particle number.

(2) a minimizer ψ achieving the infimum exists, $\mathcal{E}[\psi] = E$.

If these two conditions are satisfied, the system is stable, if not, it is unstable. Ideally, one wishes to completely solve the problem by dividing the parameter space into exactly two regions, proving that there is stability in one and instability in the other. The question of the minimizers' behavior when one approaches the instability region is also of great interest. For the case without dipole-dipole interactions, all this has been solved in [4]. Dipolar interactions add new aspects because of their long range and anisotropy (appearing in a somewhat implicit form in the last term of the energy). We also note that the total interaction is neither purely attractive nor purely repulsive, and that it is critical with respect to the kinetic energy (first term of the energy). For dipolar interactions, partial results were obtained in [1], but they do not exhaust the richness of the problem.

Physically we thus seek to characterize the experimental parameters leading to a stable condensate, or to its collapse. Mathematically, we attack a (strongly) non-convex, non-linear minimization problem, with a possible loss of compactness of minimizing sequences. Depending on her background, the student will thus need to familiarize herself

- with basic cold atoms and Bose-Einstein condensate physics, to understand the problem's origin and its practical interest.
- with the appropriate non-linear functional analysis tools: sharp Gagliardo-Nirenberg interpolation inequalities, concentration-compactness methods...

Once acquired this basic knowledge, the goal will be, depending on the project's progress and on the students' taste, to extend the stability/instability results of [1] as far as possible, and/or to adapt the analysis of the critical case following [4].

Bibliographie/References

[1] W. Bao, N. ben Abdallah, and Y. Cai, *Gross-Pitaevskii-Poisson equations for dipolar Bose-Einstein condensates with anisotropic confinement*, SIAM J. Math. Anal., 44 (2012), pp. 1713–1741.

[2] Y. Cai, M. Rosenkranz, Z. Lei, and W. Bao, *Mean-field regime of trapped dipolar Bose-Einstein condensates in one and two dimensions*, Phys. Rev. A, 82 (2010), p. 043623.

[3] F. Cartarius, A. Minguzzi, and G. Morigi, *Multi-mode Bose-Hubbard model for quantum dipolar gases in confined geometries*, Phys. Rev. A, 95 (2017), p. 063603.

[4] Y. Guo and R. Seiringer, *Symmetry breaking and collapse in Bose-Einstein condensates with attractive interactions*, Lett. Math. Phys., 104 (2014), pp. 141–156.

[5] M. Raghunandan, C. Mishra, K. Lakomy, P. Pedri, L. Santos, and R. Nath, *Two dimensional bright solitons in dipolar Bose-Einstein condensates with tilted dipoles*, Phys. Rev. A, 92 (2015), p. 013637.