CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN DANS LE PLUS BAS NIVEAU DE LANDAU
BOSE-EINSTEIN CONDENSATION IN THE LOWEST LANDAU LEVEL

NICOLAS ROUGERIE, UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES ET CNRS, LPMMC.

Proposition de stage, niveau Master 2.

Internship proposal, Master/Diploma level.

Version française

La compréhension mathématique de l'approximation dite de "champ moyen" pour le problème à N corps en mécanique quantique a considérablement progressé ces 20 dernières années. Une des motivations est venue de la physique des atomes froids, plus particulèrement du phénomène de condensation de Bose-Einstein, l'occupation d'un seul état quantique par un grand nombre de particules. Dans ces conditions, le comportement des particules est essentiellement indépendant et identiquement distribué, et des modèles réduits du problème à N corps deviennent exacts. Un thème de recherche important est d'étudier ce mécanisme avec des méthodes mathématiques rigoureuses.

Pour ce sujet de stage, on se propose de considérer l'approximation de champ moyen et la condensation de Bose-Einstein dans le cadre spécifique d'un gaz de bosons en rotation rapide. Dans ce contexte, des considérations énergétiques simples suggèrent un modèle réduit à la structure intéressante. Les N particules du gaz vivent essentiellement dans un plan, et leur fonction d'onde Ψ_N peut être cherchée sous la forme

$$\Psi(x_1, \ldots, x_N) = F(z_1, \ldots, z_N) e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2}$$

où on identifie les coordonnées planaires $x_j \in \mathbb{R}^2$ des particules avec des nombres complexes $z_j \in \mathbb{C}$, et où F est une fonction analytique (holomorphe) de ses N variables. Pour des particules bosoniques on impose en outre la symétrie

$$\begin{aligned}
\Psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N) &= \Psi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \\
F(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_N) &= F(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_N).
\end{aligned}$$

Le problème relevant est donc posé dans l'espace de Bargmann à N corps

$$\mathcal{B}^N := \left\{ F \text{ holomorphe et symétrique} \mid F(z_1, \ldots, z_N) e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2} \in L^2(\mathbb{R}^{2N}) \right\}$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{B}^N} := \left\langle F e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2}, G e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2N})}.$$

Le Hamiltonien que l'on souhaite considérer sur cet espace est l'opérateur

$$H_N = \sum_{j=1}^N z_j \partial_{z_j} + \lambda \sum_{1 \le i < j \le N} \delta_{ij}$$

Date: Septembre 2017.

où $\lambda > 0$ est un paramètre et δ_{ij} agit de la façon suivante:

$$\delta_{ij} F(z_1, \ldots, z_N) = \frac{1}{2\pi} F\left(z_1, \ldots, \frac{z_i + z_j}{2}, \ldots, \frac{z_i + z_j}{2}, \ldots, z_N\right).$$

L'énergie fondamentale du problème à N corps en considération est la plus petite valeur propre de l'opérateur H_N, vu comme agissant sur l'espace $\mathcal{B}^N$:

$$E(N) = \min \left\{ \langle F, H_N F \rangle_{\mathcal{B}^N} \ \langle F, F \rangle_{\mathcal{B}^N} = 1 \right\}.$$

On se propose d'étudier sous quelles conditions on peut calculer cette énergie[1] en utilisant une approximation de champ moyen, ce qui, dans ce contexte, revient à demander si

$$E(N) \sim \min \left\{ \left\langle f^{\otimes N}, H_N f^{\otimes N} \right\rangle_{\mathcal{B}^N} \ \middle| \ \langle f, f \rangle_{\mathcal{B}^1} = 1 \right\} \tag{1}$$

où f est maintenant une fonction d'une seule variable complexe et on note

$$f^{\otimes N}(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{j=1}^{N} f(z_j).$$

Il s'agit donc de réduire un problème à N corps (pour une fonction à N variables) en un problème à un corps (pour une fonction d'une variable), un problème de champ moyen typique. La signification physique de la substitution $F \to f^{\otimes N}$ est que toutes les particules occupent le même état quantique décrit par f.

Comme référence générale sur ce genre de problèmes, on pourra consulter par exemple [4, 7, 6]. La motivation physique pour étudier plus spécifiquement le cadre ci-dessus est fournie par le "régime de Hall quantique" dans un gaz de bosons en rotation rapide [1, 2, 3]. Le résultat (1) est en fait connu. Il a été démontré dans [5], au sens où les deux membres de l'équation ont le même comportement asymptotique dans la limite

$$N \to \infty, \quad \frac{\lambda}{N} \to 0.$$

La seconde condition est probablement optimale au sens où, pour $N \to \infty, \lambda N^{-1} \to \infty$ on n' espère *pas* que (1) soit correct.

La preuve donnée dans [5] est un remarquable tour de force, et une simplification serait grandement désirable, même quitte à faire une hypothèse plus forte que $\lambda N^{-1} \to 0$ dans un premier temps. Le but du stage est de chercher une telle simplification, en se basant sur une approche de la limite de champ moyen plus récente que celle de [5], dont certains aspects sont exposés par exemple dans [7, 6].

Suivant son parcours antérieur, l'étudiante aura à se familiariser soit avec les aspects physiques soit avec les aspects mathématiques de l'étude du problème à N corps en mécanique quantique[2]. Il s'agira ensuite d'étudier l'origine physique et la formulation mathématique du problème proposé, avant de chercher à démontrer, avec une preuve alternative (plus simple, de préférence) à celle de [5], le résultat (1) dans la limite $N \to \infty$, avec λ aussi grand que possible (comme fonction de N).

[1] Et les les fonctions propres associées.
[2] Voire avec les deux!

English version

The mathematical understanding of the so-called "mean-field" approximation for the quantum N body problem has made important progress these past 20 years. One motivation came from cold atoms physics, more specifically the Bose-Einstein condensation phenomenon. This refers to the occupancy of a single quantum state by a very large number of particles. In these conditions, the particles have an essentially independent identically distributed behavior, and reduced models of the N body problem become exact. An important research theme is to study this mechanism with rigorous mathematical methods.

For this internship, we propose to consider the mean-field approximation and Bose-Einstein condensation in the specific context of a rapidly rotating Bose gas. In this framework, simple energetic considerations suggest a reduced model with an interesting structure. The gas' N particles are confined to a plane and their wave-function Ψ_N may be looked for in the form

$$\Psi(x_1,\ldots,x_N) = F(z_1,\ldots,z_N)e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2}$$

where we identify the planar coordinates $x_j \in \mathbb{R}^2$ of the particles with complex numbers $z_j \in \mathbb{C}$, and F is an analytic (holomorphic) function of its N variables. For bosonic particles we moreover impose the symmetry

$$\begin{aligned}\Psi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_N) &= \Psi(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_N)\\ F(z_1,\ldots,z_i,\ldots,z_j,\ldots,z_N) &= F(z_1,\ldots,z_j,\ldots,z_i,\ldots,z_N).\end{aligned}$$

The relevant problem is thus posed in the N-body Bargmann space

$$\mathcal{B}^N := \left\{ F \text{ analytic and symmetric} \mid F(z_1,\ldots,z_N)e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2} \in L^2(\mathbb{R}^{2N}) \right\}$$

which is a Hilbert space for the scalar product

$$\langle F, G\rangle_{\mathcal{B}^N} := \left\langle F e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2}, G e^{-\sum_{j=1}^N |z_j|^2/2} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2N})}.$$

The Hamiltonian we wish to consider on this space is the operator

$$H_N = \sum_{j=1}^N z_j \partial_{z_j} + \lambda \sum_{1\leq i<j\leq N} \delta_{ij}$$

where $\lambda > 0$ is a parameter and δ_{ij} acts as follows:

$$\delta_{ij} F(z_1,\ldots,z_N) = \frac{1}{2\pi} F\left(z_1,\ldots,\frac{z_i+z_j}{2},\ldots,\frac{z_i+z_j}{2},\ldots,z_N\right).$$

The ground state energy of the considered N-body problem is the smallest eigenvalue of the operator H_N, seen as acting on $\mathcal{B}^N$:

$$E(N) = \min\left\{\langle F, H_N F\rangle_{\mathcal{B}^N}\ \langle F, F\rangle_{\mathcal{B}^N} = 1\right\}.$$

We propose to study under which conditions can one calculate this energy[3] by using a mean-field approximation, which, in this context, amounts to asking whether

$$E(N) \sim \min\left\{\left\langle f^{\otimes N}, H_N f^{\otimes N}\right\rangle_{\mathcal{B}^N} \mid \langle f, f\rangle_{\mathcal{B}^1} = 1\right\}, \tag{2}$$

where f is now a function of a single complex variable and we denote

$$f^{\otimes N}(z_1,\ldots,z_N) = \prod_{j=1}^N f(z_j).$$

[3] And the associated eigenfunctions.

The point is thus to reduce a N-body problem (for a function of N variables) to a one-body problem (for a function of a single variable). This is a typical mean-field problem. The physical significance of the substitution $F \to f^{\otimes N}$ is that all particles occupy the same quantum state, described by f.

As general references for this kind of problem, one can for example consult [4, 7, 6]. The physical motivation for specifically studying the above problem is given by the "quantum Hall regime" in a fast rotating Bose gas [1, 2, 3]. The result (2) is in fact known. It was proved in [5], in the sense that both sides of the equation have the same asymptotic behavior in the limit

$$N \to \infty, \quad \frac{\lambda}{N} \to 0.$$

The second conidtion is probably optimal in that, for $N \to \infty, \lambda N^{-1} \to \infty$ one does *not* hope that (1) is correct.

The proof given in [5] is remarkably intricate, and a simplification would be most welcome, even under a stronger assumption than $\lambda N^{-1} \to 0$ at first. The goal of the internship is to look for such a simplification, using an approach of the mean-field limit more recent than that of [5], certain aspects of which are reviewed in [7, 6].

Depending on her background, the student will have to familiarize herself with either the physical or mathematical aspects[4] of the quantum N-body problem. Then she will study the physical origin and mathematical formulation of the proposed problem, before looking for an alternative proof (preferably simpler than that of [5]) of the asymptotics (1) in the limit $N \to \infty$, with λ as large as possible (as a function of N).

Bibliographie/References

[1] A. Aftalion, X. Blanc, and J. Dalibard, *Vortex patterns in a fast rotating Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A, 71 (2005), p. 023611.

[2] N. R. Cooper, *Rapidly rotating atomic gases*, Advances in Physics, 57 (2008), pp. 539–616.

[3] M. Lewin and R. Seiringer, *Strongly correlated phases in rapidly rotating Bose gases*, J. Stat. Phys., 137 (2009), pp. 1040–1062.

[4] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. P. Solovej, and J. Yngvason, *The mathematics of the Bose gas and its condensation*, Oberwolfach Seminars, Birkhäuser, 2005.

[5] E. H. Lieb, R. Seiringer, and J. Yngvason, *Yrast line of a rapidly rotating Bose gas: Gross-Pitaevskii regime*, Phys. Rev. A, 79 (2009), p. 063626.

[6] N. Rougerie, *De Finetti theorems, mean-field limits and Bose-Einstein condensation.* arXiv:1506.05263, 2014. LMU lecture notes.

[7] ———, *Théorèmes de De Finetti, limites de champ moyen et condensation de Bose-Einstein*, Les cours Peccot, Spartacus IDH, Paris, 2016. Cours Peccot, Collège de France : février-mars 2014.

[4] Or both!