DENSITÉ D'UN GAZ DE BOSONS EN ROTATION RAPIDE
DENSITY OF A RAPIDLY ROTATING BOSE GAS

NICOLAS ROUGERIE, UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES ET CNRS, LPMMC.

Proposition de stage, niveau Master 2.

Internship proposal, Master/Diploma level.

Version française

Les conditions expérimentales remarquablement versatiles de la physique des atomes froids permettent d'émuler divers phénomènes de matière condensée de façon très bien contrôlée. Une direction de recherche particulièrement intéressante a été de simuler l'effet d'un champ magnétique extérieur sur une onde de matière cohérente, en analogie avec la riche physique des supraconducteurs, en particulier de type II. Plusieurs expériences ont ainsi observé des tourbillons quantifiés dans un condensat de Bose-Einstein en rotation. Dans un tel système, tous les atomes d'un gaz de Bose occupent le même état quantique, d'où la cohérence de phase. Dans la plupart des expériences, les atomes sont neutres, et les mettre en rotation permet d'imiter l'effet d'un champ magntétique, par l'analogie bien connue "force de Coriolis $\Leftrightarrow$ force de Lorentz".

Pour un condensat de Bose-Einstein en rotation très rapide, une simplification intéressante dans la modélisation intervient[3, 7, 10] et l'énergie relevante est (avec des unités ad-hoc)

$$\mathcal{E}_\varepsilon[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon V(x)|\psi|^2 + g|\psi|^4$$

avec

- une fonction d'onde $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ appartenant au plus bas niveau de Landau
$$\mathrm{LLL} = \left\{ \psi(x) = f(z)e^{-|z|^2/2} \,\middle|\, f \text{ analytique (holomorphe)} \right\}$$
où on utilise des coordonnées complexes $\mathbb{R}^2 \ni x \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$.
- $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, $\varepsilon \to 0$ dans la limite de rotation rapide.
- $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est un potentiel de piégeage, disons harmonique, $V(x) = \omega^2|x|^2$.
- $g > 0$ mesure les interactions répulsives entre les atomes du gaz.

Les deux simplifications importantes effectuées ci-dessus sont:

- Le gaz est quasiment bi-dimensionnel, à cause de la force centrifuge qui l'étale dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation.
- L'échelle d'énergie principale est fixée par la combinaison de l'énergie cinétique quantique et de la rotation. Comme pour un système sous fort champ magnétique, on se restreint donc aux fonctions propres de plus basse énergie d'un certain opérateur elliptique (Laplacien magnétique), ce qui donne la restriction à l'espace LLL.

Date: Septembre 2017.

Elles ont été justifiées mathématiquement dans [2]. Le problème de minimisation associé

$$E_\varepsilon = \min \left\{ \mathcal{E}_\varepsilon[\psi] \,\middle|\, \psi \in \mathrm{LLL}, \int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 = 1 \right\} \tag{1}$$

donne ainsi l'énergie fondamentale du condensat dans une limite appropriée. Il a motivé de nombreuses études, en particulier mathématiques, par exemple [1, 5, 4, 6, 11]. On se propose de résoudre une question laissée ouverte jusqu'à présent, concernant la limite physique relevante $\varepsilon \to 0$.

Sans la contrainte $\psi \in \mathrm{LLL}$, le problème de minimisation ci-dessus est exactement soluble[1] et donne un profil de densité de type "Thomas-Fermi". Une conjecture formulée par exemple dans [4] est la suivante: dans la limite $\varepsilon \to 0$ le problème se simplifie sous la forme

$$E_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \tilde{E}_\varepsilon = \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon V(x) |\psi|^2 + gb|\psi|^4 \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 = 1 \right\} \tag{2}$$

avec $b \sim 1.16$. En d'autres termes, le seul effet au premier ordre de la contrainte $\psi \in \mathrm{LLL}$ est de renormaliser le coefficient d'interaction g. Pour le calcul d'une approximation de l'énergie et de la densité de matière, on peut donc résoudre un problème de type Thomas-Fermi modifié. L'apparition du coefficient b est liée à la nucléation d'un réseau de tourbillons quantifiés dans le condensat.

Résoudre cette conjecture avec la constante espérée $b \sim 1.16$ est un problème ouvert majeur, lié à des questions de de cristallisation (réseaux d'Abrikosov). Il n'est pas question ici de l'attaquer directement, mais de montrer que (2) est vrai pour une valeur de b définie implicitement[2] par un problème de minimisation pour un gaz homogène. Il s'agit donc de justifier (par un théorème rigoureux) une forme d'approximation de densité locale.

L'étudiant aura ainsi à se familiariser avec la physique des condensats de Bose-Einstein en rotation, et avec les outils mathématiques permettant d'étudier le problème de minimisation (1). Il s'agit d'un problème non-linéaire de calcul des variations, dont tout le sel réside dans la structure très riche de l'espace variationnel LLL (également connu sous le nom d'espace de Fock-Bargmann).

Une fois ceci fait, l'attaque sur le sujet du stage proprement dit pourra s'appuyer sur l'article récent [8] où une approximation de densité locale a été rigoureusement justifiée, et sur des tavaux connexes en théorie de Ginzburg-Landau, par exemple [9].

[1] S'en convaincre à titre d'exercice...

[2] La conjecture majeure du domaine est de montrer que cette valeur coïncide avec celle espérée, $b \sim 1.16$.

English version

The remarkably versatile experimental conditions of cold atoms physics allow to emulate several condensed matter phenomena in a well-controled fashion. A very interesting research direction is to simulate the effect of an external magnetic field on a coherent matter wave, in analogy with the rich physics of superconductors, in particular of type II. Several experiments have observed quantized vortices in a rotating Bose-Einstein condensate. In such a system, all the atoms of a Bose gas occupy the same quantum state, whence the phase coherence. In most experiments, the particles under consideration are neutral. Making them rotate allows to imitate the effect of a magnetic field by relying on the well-known analogy "Coriolis force $\Leftrightarrow$ Lorentz force".

For a Bose-Einstein condensate in fast rotation, an interesting simplification occurs in the model [3, 7, 10] and the relevant energy is (in appropriate units)

$$\mathcal{E}_\varepsilon[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon V(x)|\psi|^2 + g|\psi|^4$$

with

- a wave-function $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ from the lowest Landau level
$$\mathrm{LLL} = \left\{ \psi(x) = f(z)e^{-|z|^2/2} \,\middle|\, f \text{ analytic (holomorphic)} \right\}$$
where we use complex coordinates $\mathbb{R}^2 \ni x \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$.
- $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $\varepsilon \to 0$ in the fast rotation limit.
- $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ is a trapping potential, say harmonic, $V(x) = \omega^2|x|^2$.
- $g > 0$ measures repulsive interactions between the gas' atoms.

Two important simplifications have been performed in the above:

- The gas is quasi bi-dimensional, because the centrifugal force makes it spread in the plane perpendicular to the axis of rotation.
- The main energy scale is set by the quantum kinetic energy and the rotation. As for a system under a strong magnetic field, one restricts attention to the eigenfunctions of lowest energy of a certain elliptic operator (magnetic Laplacian). This leads to setting the problem in the restricted space LLL.

Those have been mathematicaly justified in [2]. The associated minimisation problem,

$$E_\varepsilon = \min \left\{ \mathcal{E}_\varepsilon[\psi] \,\middle|\, \psi \in \mathrm{LLL}, \int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 = 1 \right\} \tag{3}$$

thus gives the ground state energy of the condensate in an appropriate limit. It has motivated numerous studies, in particular mathematical ones, e.g. [1, 5, 4, 6, 11]. We propose to tackle a question left open as of now, concerning the relevant physical limit $\varepsilon \to 0$.

Without the constraint $\psi \in \mathrm{LLL}$, the above minimization problem is exactly soluble[3] and gives a density profile of the "Thomas-Fermi" type. A conjecture made for example in [4] is as follows: in the limit $\varepsilon \to 0$ the problem simplifies to

$$E_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \tilde{E}_\varepsilon = \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon V(x)|\psi|^2 + gb|\psi|^4 \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 = 1 \right\} \tag{4}$$

with $b \sim 1.16$. In other words, the only leading order effect of the constraint $\psi \in \mathrm{LLL}$ is to renormalize the interaction coefficient g. To calculate an approximation to the energy and matter density, one may thus solve a problem of Thomas-Fermi type. The emergence of the b coefficient is linked with the nucleation of a lattice of quantized vortices in the condensate.

[3]Exercise !

Solving this conjecture with the hoped for constant $b \sim 1.16$ is a major open problem, linked to cristallisation questions (Abrikosov lattices). Attacking it directly is out of the question. Our goal will be to show that (4) is true for a value of b implicitly defined[4] by a minimization problem for an homogeneous gas. The point is thus to justify (by a rigorous theorem) a certain local density approximation.

The student will have to get acquainted with the physics of rotating Bose-Einstein condensates, and with the mathematical tools allowing to study the minimization problem (3). This is a non-linear variational problem, whose main interest stems from the rich structure of the variational space LLL (also known as Fock-Bargmann space).

Once this is done, the attack on the proposed problem could borrow ideas from the recent paper [8] where a local density approximation was justified rigorously, and on related works in Ginzburg-Landau theory, e.g. [9].

Bibliographie/References

[1] A. Aftalion and X. Blanc, *Vortex lattices in rotating Bose–Einstein condensates*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 38 (2006), pp. 874–893.

[2] ———, *Reduced energy functionals for a three-dimensional fast rotating Bose-Einstein condensates*, Annales Henri Poincaré, 25 (2008), pp. 339–355.

[3] A. Aftalion, X. Blanc, and J. Dalibard, *Vortex patterns in a fast rotating Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A, 71 (2005), p. 023611.

[4] A. Aftalion, X. Blanc, and F. Nier, *Lowest Landau level functional and Bargmann spaces for Bose-Einstein condensates*, J. Funct. Anal., 241 (2006), pp. 661–702.

[5] ———, *Vortex distribution in the lowest Landau level*, Phys. Rev. A, 73 (2006), p. 011601(R).

[6] X. Blanc and N. Rougerie, *Lowest-Landau-Level vortex structure of a Bose-Einstein condensate rotating in a harmonic plus quartic trap*, Phys. Rev. A, 77 (2008), p. 053615.

[7] N. R. Cooper, S. Komineas, and N. Read, *Vortex lattices in the lowest Landau level for confined Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A, 70 (2004), p. 033604.

[8] M. Correggi, N. Rougerie, and D. Lundholm, *Local density approximation for the almost-bosonic anyon gas*, Analysis and PDEs, 10 (2017), pp. 1169–1200.

[9] S. Fournais and A. Kachmar, *Nucleation of bulk superconductivity close to critical magnetic field*, Advances in Mathematics, 226 (2011), pp. 1213 – 1258.

[10] T. L. Ho, *Bose-Einstein condensates with large number of vortices*, Phys. Rev. Lett., 87 (2001), p. 060403.

[11] N. Rougerie, *Annular Bose-Einstein Condensates in the Lowest Landau Level*, App. Math. Res. Express, 2011 (2011), pp. 95–121.

[4] The major conjecture in the field is that this value coincides with that one hopes for, $b \sim 1.16$.