RÉDUCTION DIMENSIONNELLE POUR UN SYSTÈME D'ANYONS
DIMENSIONAL REDUCTION FOR A SYSTEM OF ANYONS

NICOLAS ROUGERIE, UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES ET CNRS, LPMMC.
NICOLAS.ROUGERIE@LPMMC.CNRS.FR

Proposition de stage, niveau Master 2.

Internship proposal, Master/Diploma level.

Version française

Les anyons [9, 10] sont des quasi-particules, jusqu'ici hypothétiques, de statistique fractionnaire, c'est à dire que leur comportement interpole entre celui des deux types de particules fondamentales connues, bosons et fermions. De manière équivalente, on peut les voir comme des bosons portant une "charge magnétique" effective. Il a été conjecturé [2, 5] qu'elles jouent un rôle important dans la physique de l'effet Hall fractionnaire.

Pour des raisons topologiques les anyons ne peuvent se manifester qu'en dimensionalité réduite, 2D ou 1D. Le but du stage est d'étudier le passage entre modèles 2D et 1D. Brièvement, on partira par exemple du modèle pour N anyons 2D dans un potentiel harmonique, donné par le Hamiltonien

$$H^{\alpha}_{\rm 2D} := \sum_{j=1}^{N} \left(-\mathrm{i}\nabla_{\mathbf{x}_j} + \alpha \mathbf{A}(\mathbf{x}_j)\right)^2 + V(\mathbf{x}_j) \tag{1}$$

où

- $H^{\alpha}_{\rm 2D}$ agit sur l'espace $L^2_{\rm sym}(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{C})$ des fonctions invariantes par l'échange de leurs coordonnées (bosoniques)
- $\alpha \in [0,2[$ donne le type d'anyons que l'on regarde ($\alpha = 0$ correspond aux bosons, $\alpha = 1$ aux fermions)
- le potentiel vecteur
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_j) = \sum_{k\neq j} \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^{\perp}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}$$
modélise la charge magnétique portée par les particules.
- V est le potentiel de piégeage
$$V(\mathbf{x}) = V(x_1,x_2) = \omega_1^2|x_1|^2 + \omega_2^2 |x_2|^2.$$

Pour étudier le passage 2D $\to$ 1D il s'agit de rendre le piège très confinant dans une des deux directions $\omega_1 \gg \omega_2$ par exemple. Dans un premier temps on se focalisera sur la question la plus simple, celle de l'énergie fondamentale, première valeur propre de l'opérateur $H^{\alpha}_{\rm 2D}$, et les fonctions propres associées. Par quel type de modèle 1D sont-elles décrites dans la limite $\omega_1 \gg \omega_2$?

Date: Octobre 2019.

Il existe plusieurs modèles possibles pour des anyons 1D, voir par exemple [6, 7, 8]. Celui qui semble le meilleur candidat semble être de type Calogero

$$H_{\mathrm{1D}}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{N} -\partial_{x_j}^2 + \omega_2^2 |x_j|^2 + 2\alpha^2 \sum_{1\le j<k\le N} \frac{1}{|x_j - x_k|^2}, \tag{2}$$

agissant sur $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^N)$. De tels modèles ont attiré l'attention par leur caractère complètement intégrable.

Le contexte que nous avons en tête est celui des quasi-particules de l'effet Hall fractionnaire. Ce sont des objets 2D et il est assez bien établi que leur Hamiltonien est de type (1). Par contre, la plupart des expériences proposées pour vérifier leur caractère anyonique impliquent leur transport le long de canaux de bords, effectivement 1D. Il est donc logique d'étudier, comme dans le modèle ci-dessus, le comportement d'anyons 2D dans un guide d'onde 1D. On pourra consulter par exemple [1, 3, 4] pour des techniques de réduction dimensionnelle.

English version

Anyons [9, 10] are so far hypothetical quasi-particles with fractional statistics. This means their behavior should interpolate between that of the two types of existing fundamental particles: bosons and fermions. Equivalently, one can see them as bosons carrying an effective "magnetic charge". It is conjectured [2, 5] that they play an important role in fractional quantum Hall physics.

For topological reasons, anyons can only exist in reduced dimensionality, 2D or 1D. The goal of the internship is to study the transition between 2D and 1D models. Briefly, we can start from the model for N 2D anyons in a harmonic potential given by the Hamiltonian

$$H_{2\mathrm{D}}^{\alpha} := \sum_{j=1}^{N} \left(-\mathrm{i}\nabla_{\mathbf{x}_j} + \alpha \mathbf{A}(\mathbf{x}_j)\right)^2 + V(\mathbf{x}_j) \tag{3}$$

where

- $H_{2\mathrm{D}}^{\alpha}$ acts on the space $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{C})$ of bosonic functions, i.e. invariant under the exchange of the coordinates $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^2$
- $\alpha \in [0, 2[$ sets the type of anyons we consider ($\alpha = 0$ corresponds to bosons, $\alpha = 1$ to fermions)
- the vector potential
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_j) = \sum_{k \neq j} \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^{\perp}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}$$
models the magnetic charge carried by the particles.
- V is the trapping potential
$$V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2) = \omega_1^2 |x_1|^2 + \omega_2^2 |x_2|^2.$$

To study the 2D $\to$ 1D limit, one makes the trap very confining in one of the two space directions, $\omega_1 \gg \omega_2$ for example. At first we shall focus on the simplest question, that of the ground state energy, first eigenvalue of the operator $H_{2\mathrm{D}}^{\alpha}$, and the associated eigenfunctions. What type of 1D model describes them in the limit $\omega_1 \gg \omega_2$?

There are several possible models for 1D anyons, see e.g. [6, 7, 8]. That which seems the most relevant is of Calogero type

$$H_{1\mathrm{D}}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{N} -\partial_{x_j}^2 + \omega_2^2 |x_j|^2 + \alpha^2 \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{|x_j - x_k|^2}, \tag{4}$$

acting on $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^N)$. Such models have attracted attention as per their complete integrability.

The context we have in mind is that of the quasi-particles of the fractional quantum Hall effect. They are 2D objects and it is fairly well established that their Hamiltonian is of the type (3). However, most proposed experiments to test their anyonic character imply transport along edge channels, a 1D situation. It thus makes sense to study, as above, the behavior of 2D anyons in 1D wave guides. Technics for dimensional reduction may be found for example in [1, 3, 4].

Bibliographie/References

[1] A. Aftalion and X. Blanc, *Reduced energy functionals for a three-dimensional fast rotating Bose-Einstein condensates*, Annales Henri Poincaré, 25 (2008), pp. 339–355.

[2] S. Arovas, J. Schrieffer, and F. Wilczek, *Fractional statistics and the quantum Hall effect*, Phys. Rev. Lett., 53 (1984), pp. 722–723.

[3] E. H. Lieb, R. Seiringer, and J. Yngvason, *One-dimensional Bosons in three-dimensional traps*, Phys. Rev. Lett., 91 (2003), p. 150401.

[4] E. H. Lieb, R. Seiringer, and J. Yngvason, *One-dimensional behavior of dilute, trapped Bose gases*, Commun. Math. Phys., 244 (2004), pp. 347–393.
[5] D. Lundholm and N. Rougerie, *Emergence of fractional statistics for tracer particles in a Laughlin liquid*, Phys. Rev. Lett., 116 (2016), p. 170401.
[6] D. Lundholm and J. P. Solovej, *Hardy and Lieb-Thirring inequalities for anyons*, Comm. Math. Phys., 322 (2013), pp. 883–908.
[7] ———, *Local exclusion principle for identical particles obeying intermediate and fractional statistics*, Phys. Rev. A, 88 (2013), p. 062106.
[8] ———, *Local exclusion and Lieb-Thirring inequalities for intermediate and fractional statistics*, Ann. Henri Poincaré, 15 (2014), pp. 1061–1107.
[9] J. Myrheim, *Anyons*, in Topological aspects of low dimensional systems, A. Comtet, T. Jolicœur, S. Ouvry, and F. David, eds., vol. 69 of Les Houches - Ecole d'Ete de Physique Theorique, 1999, pp. 265–413.
[10] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, 1990.