MEAN-FIELD LIMITS FOR FERMIONS IN LARGE MAGNETIC FIELDS
LIMITES DE CHAMP MOYEN POUR DES FERMIONS SOUS FORT CHAMP MAGNÉTIQUE

NICOLAS ROUGERIE, UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES ET CNRS, LPMMC.
NICOLAS.ROUGERIE@LPMMC.CNRS.FR

Proposition de stage, niveau Master 2.

Internship proposal, Master/Diploma level.

Version française

On entend par "limite de champ moyen" le processus conduisant d'un modèle fondamental de particules en interaction (linéaire en général) à un modèle effectif (non linéaire) pour la description d'une seule particule typique. L'étude mathématique des limites de champ moyen quantiques a fait beaucoup de progrès ces vingt dernières années. Ce sujet se place dans ce cadre.

On se propose d'étudier la limite de champ moyen de l'état fondamental d'un système de fermions (particules satisfaisant le principe d'exclusion de Pauli) confinés, sous un fort champ magnétique, en s'inspirant des travaux récents [1, 2] et des plus anciens [3, 4, 5, 6].

Pour fixer les idées on expose ici seulement un modèle 2D ayant pour Hamiltonien

$$H_N = \sum_{j=1}^{N} \left(-\mathrm{i}\nabla_{\mathbf{x}_j} + \mathbf{A}(x_j)\right)^2 + V(\mathbf{x}_j) + \sum_{1\leq i<j\leq N} w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \tag{1}$$

agissant sur l'espace $L^2_{\mathrm{asym}}(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{C})$ des fonctions d'onde fermioniques (i.e. antisymétriques par rapport à léchange des coordonnées $(\mathbf{x}_j)_{j=1,\ldots,N}$ des particules. Les données sont

- le potentiel vecteur $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ d'un champ magnétique extérieur B, avec
$$\mathrm{curl}\,(\mathbf{A}) = B \tag{2}$$
- un potentiel scalaire confinant $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
- un potentiel d'interaction de paire $w : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $w(-\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$.

Il s'agira d'étudier dans une certaine limite l'état fondamental de H_N (première fonction propre et valeur propre associée), pour obtenir une description effective en termes du minimiseur d'une fonctionnelle d'énergie de type Thomas-Fermi magnétique

$$\mathcal{E}^{\mathrm{TF}}[\rho] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(f(\mathbf{x},\rho(\mathbf{x})) + V(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x})w(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

où

- ρ représente la densité spatiale des particules: $\rho \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$
- $f(\mathbf{x},\rho(\mathbf{x}))$ est une énergie cinétique locale, à préciser.

Deux cas non traités dans la littérature pourront nous intéresser plus particulièrement:

Date: Octobre 2019.

- limite de fort champ magnétique avec confinement dans une boîte fixe: formellement $V = +\infty$ en dehors d'un domaine borné
- limite de fort champ magnétique inhomogène, c'est à dire $B = B(\mathbf{x})$ dans (2).

Dans les deux cas, il s'agit d'étudier une limite jointe champ moyen/semi-classique, et de se familiariser avec les outils mathématiques correspondants.

English version

"Mean-field limit" refers to the process leading from a fundamental model of interacting particles (linear most of the time) to an effective model (non-linear) for the evolution of a single typical particle. The mathematical study of quantum mean-field limits has made a lot of progress in the past twenty years. This internship topic is part of this general effort.

We propose to study the mean-field limit of the ground state of a system of confined fermions (particles satisfying the Pauli exclusion principle) under a strong magnetic field, taking inspiration from the recent works [1, 2] and the older ones [3, 4, 5, 6].

To fix ideas we expose here only a 2D model with Hamiltonian

$$H_N = \sum_{j=1}^{N} \left(-\mathrm{i}\nabla_{\mathbf{x}_j} + \mathbf{A}(x_j)\right)^2 + V(\mathbf{x}_j) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} w(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \tag{3}$$

acting on the space $L^2_{\mathrm{asym}}(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{C})$ of fermionic wave-functions (i.e. antisymmetric under the exchange of the coordinates $(\mathbf{x}_j)_{j=1,\ldots,N}$ of the particles). The data here are

- the vector potential $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ of a an external magnetic field B, with

$$\operatorname{curl}(\mathbf{A}) = B \tag{4}$$

- a confining scalar potential $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
- a pair interaction potential $w : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $w(-\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$.

We shall study a certain limit of the ground state of H_N (lowest eignevalue and associated eigenfunctions) to obtain an effective description in terms of the minimization of a magnetic Thomas-Fermi type functional

$$\mathcal{E}^{\mathrm{TF}}[\rho] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(f(\mathbf{x}, \rho(\mathbf{x})) + V(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

where

- ρ represents the spatial density of particles: $\rho \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$
- $f(\mathbf{x}, \rho(\mathbf{x}))$ is a local kinetic energy, to be made precise.

Two cases that have not been treated so far could be of interest to us:

- strong magnetic field limit in a fixed box: formally $V = +\infty$ outside of a bounded domain
- strong magnetic field limit with inhomogeneous magnetic field, that is $B = B(\mathbf{x})$ in (4).

In both cases, one must study a joint mean-field/semi-classical limit, and acquaint oneself with the appropriate mathematical tools.

Bibliographie/References

[1] S. Fournais, M. Lewin, and J.-P. Solovel, *The semi-classical limit of large fermionic systems*. arXiv:1510.01124, 2015.

[2] S. Fournais and P. Madsen, *Semi-classical limit of confined fermionic systems in homogeneous magnetic fields*. arXiv:1907.00629, 2019.

[3] E. H. Lieb and B. Simon, *The Thomas-Fermi theory of atoms, molecules and solids*, Adv. Math., 23 (1977), pp. 22–116.

[4] E. H. Lieb, J.-P. Solovej, and J. Yngvason, *Asymptotics of heavy atoms in high magnetic fields: I. Lowest Landau band regions*, Comm. Pure Appl. Math., 47 (1994), pp. 513–591.

[5] ———, *Asymptotics of heavy atoms in high magnetic fields: II. Semi-classical regions*, Comm. Math. Phys, 161 (1994), pp. 77–124.

[6] ———, *Ground states of large quantum dots in magnetic fields*, Phys. Rev. B, 51 (1995), pp. 10646–10665.