

Глава I

Многократное рассеяние света в случайно-неоднородных средах. Диффузионно-волновая спектроскопия

1.1 Методы теоретического описания процессов многократного рассеяния световых волн в случайно-неоднородных средах

Вследствие случайного расположения рассеивающих центров в случайно-неоднородных средах, напряженность электрического и индукция магнитного поля в рассеянной световой волне, также как и интенсивность рассеянного излучения, представляют из себя случайные функции пространственных координат $\mathbf{r}$ и времени t . В связи с этим, основной интерес представляет статистический анализ рассеянного света, хотя случайные реализации вышеперечисленных случайных полей, соответствующие заданному распределению рассеивателей в среде, также могут быть вычислены, например, методом Монте-Карло. Аналитический расчет статистических моментов поля в условиях многократного рассеяния представляет собой достаточно сложную задачу. Для ее решения применяется большое количество различных подходов (см., например, обзоры [29–32]), основные из которых будут рассмотрены в настоящем разделе.

1.1.1 Метод диаграмм

Обзор методов теоретического описания процессов многократного рассеяния волн в случайно-неоднородных средах представляется разумным начать с методов, связанных с использованием аппарата квантовой теории поля. Эти методы называют также диаграммными, т.к. их применение предполагает построение так называемых диаграмм Фейнмана, являющихся, по сути, компактными символическими изображениями некоторых интегральных выражений. В то время, как некоторые из таких выражений могли бы потребовать для своей записи нескольких страниц, соответствующие диаграммы могут быть изображены весьма компактно. При достаточном навыке возможно произведение арифметических операций с диаграммами, суммирование состоящих из них последовательностей и т.п. без явного выписывания соответствующих интегралов, что порой сильно упрощает выкладки. Кроме того, диаграммы позволяют наглядно представить исследуемые физические процессы. Хотя впервые диаграммный метод был использован в квантовой электродинамике (см., например, [33]), он получил затем распространение в различных областях физики [34–39].

Диаграммные методы анализа многократного рассеяния являются наиболее строгими из известных, поскольку предполагают вычисление статистических моментов рассеянной световой волны непосредственно на основе анализа уравнений Максвелла, записанных в среде со случайными флуктуациями диэлектрической (ε) и магнитной (μ) проницаемостей в пространстве и времени. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая, когда в среде отсутствуют сторонние заряды и токи. Тогда две пары уравнений Максвелла и материальные уравнения можно записать в виде [40, 41]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ — напряженности и индукции электрического и магнитного полей, соответственно, а c — скорость света в вакууме.

Будем считать среду немагнитной ($\mu \equiv 1$) и изотропной, а неоднородность среды — заключенной в зависящей случайным образом от координат и времени диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r}, t) = 1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}, t)$, где ε_1 — случайная часть диэлектрической проницаемости. Поскольку в условиях многократного рассеяния излучение существенным образом деполяризуется [11, 42, 43], мы ограничимся скалярным приближением, т.е. пренебрежем векторным характером электромагнитных волн. Тогда уравнения (1.1–1.3) могут быть известным образом сведены к волновому уравнению [40, 41]:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}, t)) \right] E(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.4)$$

Поскольку волновое уравнение (1.4) по своему виду близко к уравнению Шредингера [44, 45], описывающему волновую функцию квантовомеханического объекта в случайном потенциале, для его анализа могут быть применены методы, аналогичные используемым в квантовой механике и квантовой теории поля [34]. Предположив, что $E(\mathbf{r}, t)$ зависит от времени по гармоническому закону, и что $\varepsilon_1(\mathbf{r}, t)$ медленно меняется с течением времени (т.е. на временах порядка светового периода, это так называемое адиабатическое приближение), получаем уравнение для функции Грина G уравнения (1.4) [29, 36, 37]:

$$[\nabla^2 + k^2 (1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}, t))] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.5)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, λ — оптическая длина волны, δ — дельта-функция Дирака.

Поскольку решение $E(\mathbf{r}, t)$ уравнения (1.4) при заданном распределении источников излучения всегда может быть выражено через функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$, остановимся на последней более подробно. Анализ статистических моментов функции Грина при помощи метода диаграмм достаточно детально описан в литературе (см., например, [30, 38]), здесь мы приведем лишь некоторые важные результаты.

1.1.1.1 Диаграммный ряд для средней функции Грина. Уравнение Дайсона

Решение уравнения (1.5) можно записать в виде бесконечного ряда, который при усреднении по ансамблю реализаций преобразуется к виду [29, 36, 37]

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = & G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \\ & + k^4 \int \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t) \rangle d^3 r_1 d^3 r_2 + \\ & + k^8 \int \dots \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) G_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) G_0(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0) \times \\ & \times [\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t) \rangle \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_3, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_4, t) \rangle + \\ & + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_3, t) \rangle \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_4, t) \rangle + \\ & + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_4, t) \rangle \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_3, t) \rangle] d^3 r_1 \dots d^3 r_4 + \dots, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\bar{G}$ — средняя функция Грина и

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp \{ik |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (1.7)$$

— функция Грина однородной среды (“свободного пространства”). Для того, чтобы получить выражение (1.6), используют теорему взаимности ($G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t)$) [37] и считают случайное поле $\varepsilon_1(\mathbf{r}, t)$ гауссовым с нулевым средним.

Будем считать случайные поля $\varepsilon_1(\mathbf{r}, t)$ и $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$ однородными по аргументу t (стационарными). Тогда $\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$ будет зависеть

от разности $t_1 - t_2$, а $\bar{G}$ не будет зависеть от времени t . Теперь введем символические обозначения:

$$G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \overline{1 \quad 2}, \quad (1.8)$$

$$\bar{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \overline{1 \quad 2}, \quad (1.9)$$

$$k^4 \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \bullet_1 - - \bullet_2. \quad (1.10)$$

С использованием обозначений (1.8–1.10) ряд (1.6) можно переписать в виде (в формулах (1.11, 1.13) подразумевается $t_1 = t_2 = t$)

$$\begin{aligned} \overline{\quad \quad} &= \overline{\quad \quad} + \overline{\quad \quad} + \\ &+ \overline{\quad \quad} + \overline{\quad \quad} + \\ &+ \overline{\quad \quad} + \overline{\quad \quad} + \\ &+ \overline{\quad \quad} + \overline{\quad \quad} + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

По координатам всех внутренних вершин в (1.11) необходимо производить интегрирование. Как легко заметить, каждому слагаемому в сумме (1.6) соответствует диаграмма в сумме (1.11).

Дальнейший анализ ряда (1.6, 1.11) производят исходя из топологии диаграмм. Диаграмму называют слабо связной, если ее можно разделить на две отдельные диаграммы, разорвав какую-либо одну линию G_0 . Остальные диаграммы называют сильно связными. К слабо связным диаграммам относится, например, третье слагаемое в правой части (1.11), а остальные из изображенных членов этой бесконечной суммы являются сильно связными. Сумму всех сильно связных диаграмм, входящих в (1.11), обозначают через

$$\text{---} \bullet \bigcirc \bullet \text{---}, \quad (1.12)$$

где ядро массового оператора есть

$$\bullet \bigcirc \bullet = \overline{\bullet \quad \bullet} + \overline{\bullet \quad \bullet} + \overline{\bullet \quad \bullet} + \dots$$

1.1.1.3 Приближение Бурре и лестничное приближение

В приближении Бурре сумму сильно связанных диаграмм (1.12) находят, взяв для ядра массового оператора лишь первый член ряда (1.13). При этом уравнение (1.14) преобразуется и может быть решено методом последовательных приближений. В результате, получают выражение для средней функции Грина [37]:

$$\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp \{i k_{eff} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (1.19)$$

Явное выражение для k_{eff} в общем случае довольно громоздко [37]. Его, однако, можно упростить, задавшись определенным выражением для корреляционной функции случайного поля диэлектрической проницаемости в среде,

$$C(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) = k^4 \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (1.20)$$

Для среды, состоящей из рассеивающих свет частиц, размер которых много меньше длины волны излучения, хаотически блуждающих по закону броуновского движения с коэффициентом диффузии D_B , Фурье-образ корреляционной функции (1.20) есть [46, 47]

$$C(\mathbf{q}, t_1 - t_2) = \Delta \exp \{-q^2 D_B |t_1 - t_2|\}, \quad (1.21)$$

где $\Delta = (4\pi\alpha)^2 n k^2$, α — поляризуемость рассеивающих свет частиц, n — их концентрация. Средняя длина свободного пробега фотона в среде связана с Δ соотношением $\ell = 4\pi/\Delta$ [47]. При условии $\lambda \ll \ell$ имеем $k_{eff} \simeq k + i/(2\ell)$ [47].

При теоретическом анализе функции корреляции (1.15) часто используют так называемой “лестничное” приближение. В лестничном приближении в выражении для ядра оператора интенсивности (1.18) оставляют только первое слагаемое. Тогда из уравнения Бете-Солпитера

(1.16) легко получить выражение для функции когерентности [30, 38, 46]:

$$\begin{array}{|c|} \hline \Gamma \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{+} \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \vdots \\ \hline \text{+} \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \vdots \\ \hline \text{+} \end{array} + \dots \quad (1.22)$$

1.1.1.4 Веерные диаграммы

Лестничное приближение (1.22) не описывает возможной интерференции рассеянных волн внутри случайно-неоднородной среды, поэтому в тех ситуациях, когда такая интерференция играет важную роль, оно оказывается неприемлемым. Следующий по величине вклад в выражение для функции корреляции (1.15) дают так называемые “веерные” диаграммы. Сумма веерных диаграмм имеет вид [30, 46]

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{X} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \text{+} \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{X} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \hline \text{+} \end{array} + \dots \quad (1.23)$$

Необходимость учета веерных диаграмм возникает, например, при рассмотрении задачи когерентного обратного рассеяния света [48–51], а также при расчете флуктуаций проводимости в проводниках малых размеров [52–56], что является сходной в математическом плане задачей (см., например, [57]).

1.1.2 Метод уравнения переноса

Одним из самых плодотворных подходов к задаче многократного рассеяния волн различной физической природы является метод уравнения переноса [30, 38, 58–60]. Теория переноса широко применяется для описания рассеяния нейтронов в ядерных реакторах [61–64], электромагнитного излучения в атмосферах планет [65, 66], фоонов в кристаллах [67, 68].

Основной величиной, фигурирующей в теории переноса излучения, является так называемая лучевая интенсивность $I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$. Она равна мощности, которая была бы принята приемником с бесконечно малой

апертурой Δa , расположенным в точке $\mathbf{r}$ и принимающим излучение только из бесконечно малого телесного угла $\Delta\Omega$ в направлении $\hat{\Omega}$ в частотном диапазоне $\{\nu, \nu + \Delta\nu\}$ ($\Delta\nu \rightarrow 0$), деленной на $\Delta a \Delta\Omega \Delta\nu$. Единицей измерения лучевой интенсивности $I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$ является $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{стерад}^{-1} \cdot \text{с}$.

1.1.2.1 Общий вид уравнения переноса излучения

Рассматривая баланс энергии для бесконечно малого объема случайно-неоднородной среды, получают уравнение переноса излучения (УПИ) [10, 11, 59, 69]:¹

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega} + \mu_t I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \mu_s \int I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', t) p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' + S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t). \quad (1.24)$$

В этом уравнении c — скорость света в среде, $\mu_t = \mu_s + \mu_a$ — транспортный коэффициент, μ_s и μ_a — коэффициенты рассеяния и поглощения, равные произведению соответствующих сечений σ_s , σ_a на плотность числа частиц n : $\mu_s = \sigma_s n$, $\mu_a = \sigma_a n$. Наконец, $p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}')$ — это так называемая фазовая функция, определяющая часть лучевой интенсивности, которая рассеивается частицей в направлении $\hat{\Omega}$ при условии, что падающая на частицу волна направлена вдоль $\hat{\Omega}'$; $S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t)$ описывает пространственно-угловое распределение источников в среде и измеряется в единицах $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{стерад}^{-1} \cdot \text{с}$.

Кроме лучевой интенсивности в теории переноса удобно пользо-

¹Иногда интенсивность излучения в среде представляют в виде суммы ослабленной падающей и диффузной составляющих. Тогда УПИ записывается только для диффузной компоненты, а ослабленная падающая интенсивность в среде находится отдельно. В рамках задач, рассматриваемых в настоящей диссертации, диффузная компонента всегда много больше ослабленной падающей, поэтому мы везде пренебрегаем последней.

ваться плотностью энергии $u(\mathbf{r}, t)$ или средней интенсивностью $U(\mathbf{r}, t)$:

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} d\hat{\Omega} I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t), \quad U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega} I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t). \quad (1.25)$$

Полная плотность потока энергии в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t , есть

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega} I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega}. \quad (1.26)$$

Аналитические решения уравнения переноса излучения (1.24) могут быть найдены только в наиболее простых случаях; численное решение уравнения (1.24) достаточно трудоемко и требует большого объема вычислений. Поэтому часто от (1.24) при помощи дополнительных предположений переходят к более простым уравнениям.

1.1.2.2 Метод сферических гармоник

Одним из способов приближенного решения уравнения переноса (1.24) является так называемый метод сферических гармоник, или P_N - метод [10, 59]. Он основывается на разложении лучевой интенсивности и функции источника в уравнении (1.24) в ряд по сферическим гармоникам $Y_{l,m}$ и обрывании этого ряда при $l = N$:

$$I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \psi_{l,m}(\mathbf{r}, t) Y_{l,m}(\hat{\Omega}), \quad (1.27)$$

$$S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l q_{l,m}(\mathbf{r}, t) Y_{l,m}(\hat{\Omega}). \quad (1.28)$$

При этом фазовую функцию разлагают в ряд по полиномам Лежандра P_l :

$$p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} g_l P_l(\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l Y_{l,m}(\hat{\Omega}) Y_{l,m}^*(\hat{\Omega}'). \quad (1.29)$$

Разложение (1.29) подразумевает, что фазовая функции p зависит только от косинуса угла рассеяния $\hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}'$. Нетрудно убедиться, что $g_0 = 1$

и $g_1 = \langle \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}' \rangle$ — средний косинус угла рассеяния. Для удобства мы будем далее обозначать g_1 через g . Эту величину иногда называют параметром анизотропии рассеяния.

В P_1 -приближении в суммах (1.27, 1.28) оставляют только члены с $l = 0, 1$. При этом лучевая интенсивность и функция источника могут быть записаны в виде

$$I(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = U(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\Omega}, \quad (1.30)$$

$$S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) = S_0(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{S}_1(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\Omega}, \quad (1.31)$$

где

$$S_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\hat{\Omega} S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t), \quad \mathbf{S}_1(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} d\hat{\Omega} S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) \hat{\Omega}. \quad (1.32)$$

После подстановки выражений (1.30, 1.31) в (1.24) и интегрирования получившегося уравнения по телесному углу $\hat{\Omega}$ получаем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t) + \mu_a U(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = S_0(\mathbf{r}, t). \quad (1.33)$$

Если перед интегрированием по телесному углу произвести умножение обеих частей уравнения на $\hat{\Omega}$, то имеем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + (\mu'_s + \mu_a) \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{3} \nabla U(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}_1(\mathbf{r}, t), \quad (1.34)$$

где $\mu'_s = \mu_s(1 - g)$ — приведенный (редуцированный) коэффициент рассеяния. Величину $\ell^* = (\mu'_s)^{-1}$, имеющую размерность длины, называют транспортной длиной свободного пробега фотона. Она имеет простой физический смысл: пройдя в среде расстояние порядка ℓ^* , фотон теряет “память” о своем первоначальном направлении. Таким образом, излучение, рассеивающееся в случайно-неоднородной среде, изотропизуется на расстоянии порядка ℓ^* от границы среды.

Наконец, исключая $\mathbf{F}$ из уравнений (1.33, 1.34), получаем уравнение P_1 -приближения:

$$\begin{aligned} \left[-D_p \nabla^2 + c\mu_a + \frac{\partial}{\partial t} \right] U(\mathbf{r}, t) + \frac{3D_p}{c} \left[\mu_a \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\mathbf{r}, t) = \\ = cS_0(\mathbf{r}, t) + \frac{3D_p}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t} S_0(\mathbf{r}, t) - c \nabla \cdot \mathbf{S}_1(\mathbf{r}, t) \right], \end{aligned} \quad (1.35)$$

где $D_p = c/(3\mu'_s)$ — коэффициент диффузии света в среде. Некоторые авторы при выводе уравнения (1.35) получают $D_p = c/(3(\mu'_s + \mu_a))$ (см., например, [10]). Это, однако, некорректно, т.к. P_1 -приближение верно только при условии $\mu_a \ll \mu'_s$ (см., например, [73]), и коэффициент поглощения μ_a необходимо исключить из выражения для D_p [74]. Иначе получилось бы, что в выражении для D_p сохраняются члены всех порядков малости по малому параметру μ_a/μ'_s , в то время, как при выводе уравнения (1.35) члены тех же порядков малости были отброшены.

1.1.2.3 Диффузионное приближение

В диффузионном приближении подчеркнутые слагаемые в (1.35) отбрасываются [10, 70–72]. Член, содержащий $\mathbf{S}_1$, можно отбросить, только если источник света является изотропным. Обычно, однако, в качестве источника излучения используется лазер, излучение которого хорошо коллимировано. Поэтому поступают следующим образом. Область вблизи точки падения излучения на среду не рассматривают, и считают, что изотропный источник излучения расположен в глубине среды, на расстоянии порядка ℓ^* от границы [10, 75]. Поскольку на таком расстоянии от границы среды излучение уже почти полностью преобразуется в диффузное, описанный подход дает достаточно точные результаты.

Остальные отбрасываемые члены пропорциональны производным по времени от $U(\mathbf{r}, t)$ и $S_0(\mathbf{r}, t)$. Ими можно пренебречь только если $c\mu'_s/\omega_s \gg 1$, где ω_s — частота модуляции источника излучения. Это условие означает, что за период изменения S_0 должно происходить боль-

шое число актов рассеяния, то есть частота модуляции источника должна быть не слишком высокой.

Таким образом, с учетом сделанных выше предположений, получаем уравнение диффузии для средней интенсивности многократно рассеянного света в среде [10, 59, 70, 71]:

$$\left[\nabla^2 - \frac{c\mu_a}{D_p} - \frac{\partial}{\partial t} \right] U(\mathbf{r}, t) = -\frac{cS_0(\mathbf{r}, t)}{D_p}. \quad (1.36)$$

1.1.2.4 Граничные условия для средней интенсивности

Условие для $U(\mathbf{r}, t)$ на границе S рассеивающей и нерассеивающей сред, имеющих одинаковые показатели преломления, следует из условия равенства нулю потока энергии внутрь среды [10]:

$$U(\mathbf{r}, t) - \frac{2}{3}\ell^* (\hat{n} \cdot \nabla U(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1.37)$$

где $\hat{n}$ — единичная внутренняя нормаль к поверхности. Условие (1.37) является приближенным; степень его точности можно оценить, сравнив его с точным граничным условием, найденным для частного случая хорошо известной проблемы Милна [76, 77]. Точное решение проблемы Милна можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых удовлетворяет уравнению диффузии. Для этой части решения граничное условие записывается аналогично (1.37), но с заменой постоянной $2/3$ на 0.7104 [10, 77].

Для сравнения расчетов с реальными экспериментами, необходимо также учесть возможную разность показателей преломления рассеивающей и нерассеивающей сред. Это можно сделать путем использования в уравнении (1.37) некоторой постоянной Δ вместо константы $2/3$ [75, 78]:

$$U(\mathbf{r}, t) - \Delta \cdot \ell^* (\hat{n} \cdot \nabla U(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1.38)$$

При описании экспериментальных данных величина постоянной Δ часто подбирается эмпирически [75, 79, 80], однако она может быть выражена через эффективный коэффициент отражения R_{eff} диффузной интенсивности на границе S [75, 78]:

$$\Delta = \frac{2}{3} \times \frac{1 + R_{eff}}{1 - R_{eff}}, \quad (1.39)$$

где

$$R_{eff} = \frac{R_\phi + R_j}{2 - R_\phi + R_j}, \quad (1.40)$$

$$R_\phi = 2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta R_F(\theta) d\theta, \quad R_j = 3 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta R_F(\theta) d\theta, \quad (1.41)$$

$$R_F(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta}{n_2 \cos \theta_2 + n_1 \cos \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{n_2 \cos \theta - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_2} \right)^2, \quad \text{при } 0 < \theta < \theta_r, \quad (1.42)$$

$$R_F(\theta) = 1, \text{ при } \theta_r \leq \theta \leq \pi/2. \quad (1.43)$$

В формулах (1.42, 1.43) n_1, n_2 — показатели преломления прозрачной и рассеивающей сред, соответственно; угол θ_2 определяется условием $n_2 \sin \theta = n_1 \sin \theta_2$; θ_r — предельный угол полного отражения ($\sin \theta_r = n_1/n_2$) [40].

Формулы (1.39–1.43) не всегда просто использовать, т.к. часто возникают сложности с определением показателя преломления рассеивающей среды n_2 . Если последняя представляет собой взвесь маленьких частиц (показатель преломления $n_2^{(p)}$) в жидкости (показатель преломления $n_2^{(m)}$), то можно пользоваться эмпирической формулой [81]

$$n_2 \simeq \frac{1}{2} \left[\Phi \cdot n_2^{(p)} + (1 - \Phi) \cdot n_2^{(m)} + n_2^{(m)} \right], \quad (1.44)$$

где Φ — объемная концентрация частиц в суспензии.

Поскольку левая часть выражения (1.38) представляет из себя сумму двух первых членов в разложении $U(\mathbf{r}, t)$ в ряд Тейлора в точке,

находящейся на расстоянии $\Delta \cdot \ell^*$ от границы среды, обычно условие (1.38) заменяют нулевым условием для U на так называемой экстраполированной границе [10, 77] — поверхности, отстоящей от реальной границы на расстояние $\Delta \cdot \ell^*$.

1.1.2.5 Уравнение переноса для функции временной когерентности

Недавно в работах [82, 83] было показано, что уравнение типа уравнения переноса может быть записано и для временной автокорреляционной функции поля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} G_1^\Omega(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, \tau, t) + \nabla \cdot G_1^\Omega(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, \tau, t) \hat{\Omega} + \mu_t G_1^\Omega(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, \tau, t) = \\ = \mu_s \int G_1^\Omega(\mathbf{r}, \hat{\Omega}', \tau, t) g_1^s(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}', \tau) p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' + S(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t). \end{aligned} \quad (1.45)$$

В этом уравнении $G_1^\Omega(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, \tau, t) = \langle E(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t) E^*(\mathbf{r}, \hat{\Omega}, t + \tau) \rangle$ — это временная автокорреляционная функция светового поля в рассеянной волне, распространяющейся в направлении $\hat{\Omega}$, измеренная в точке $\mathbf{r}$ внутри случайно-неоднородной среды (усреднение производится по ансамблю реализаций); $g_1^s(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}', \tau)$ — это нормированная временная автокорреляционная функция, соответствующая однократному рассеянию; остальные величины те же, что и в уравнении переноса (1.24).

Временная автокорреляционная функция g_1^s , соответствующая однократному рассеянию, легко рассчитывается [9, 17]:

$$\begin{aligned} g_1^s(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}', \tau) &= \exp \left\{ -\frac{1}{6} q^2 \langle \Delta \mathbf{r}^2(\tau) \rangle \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{3} k^2 (1 - \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') \langle \Delta \mathbf{r}^2(\tau) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где $\langle \Delta \mathbf{r}^2(\tau) \rangle$ — средний квадрат смещения рассеивателя за время τ , $q = 2k \sin(\theta/2)$ — изменение импульса рассеянного фотона (θ — угол между $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}'$). В случае броуновского движения рассеивающих свет частиц $\langle \Delta \mathbf{r}^2(\tau) \rangle = 6D_B \tau$ [84].

Легко проверить, что уравнение (1.45) переходит в (1.24) при $\tau = 0$ (или при $D_B = 0$). Особенно важным является то, что уравнение (1.45) описывает временную корреляционную функцию рассеянного излучения как в режимах однократного и многократного рассеяния, так и в переходном режиме.

1.1.3 Метод интегралов по траекториям

Метод интегралов по траекториям, впервые предложенный Р. Фейнманом [85, 86], дает возможность проводить весьма наглядный анализ задач многократного рассеяния [87, 88]. Падающее на среду излучение представляется как поток фотонов, которые проходят через среду по всевозможным “траекториям”, рассеиваясь на неоднородностях диэлектрической проницаемости. Суммирование вкладов различных траекторий (интегрирование по траекториям) позволяет находить моменты рассеянного поля.

1.1.3.1 Рассеяние на броуновских частицах

Для упрощения анализа рассмотрим сначала случай точечных рассеивателей (размер рассеивателя $\ll \lambda$), изотропно рассеивающих свет. Пусть точечный источник излучения находится в точке $\mathbf{r}_0$. Тогда временная автокорреляционная функция рассеянного излучения, измеренная в точке $\mathbf{r}$, есть [89, 90]

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \tau) &= \langle E(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, n) \langle \exp \{i \Delta \varphi_n(\tau)\} \rangle = \\ &\simeq \sum_{n=1}^{\infty} I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, n) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle \Delta \varphi_n^2(\tau) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, n)$ — интенсивность излучения, приходящего из точки $\mathbf{r}_0$ в точку $\mathbf{r}$ по траекториям, включающим n актов рассеяния; $\Delta \varphi_n(\tau)$ — разность фаз двух фотонов, прошедших вдоль одной и той же траекто-

рии в моменты времени, разделенные промежутком τ . $I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, n)$ необходимо рассчитывать с учетом геометрии образца, а $\Delta\varphi_n(\tau)$ — с учетом движения рассеивателей в среде. Вторая строка в равенстве (1.47) имеет место только в случае $\langle \Delta\varphi_n(\tau) \rangle = 0$, что выполнено как для броуновского движения, так и для любых ламинарных потоков в несжимаемых суспензиях [91, 92].

В диффузионном приближении I является решением уравнения [51, 79, 91, 92]

$$\frac{dI}{dn} - \frac{1}{3}\ell^2 \nabla^2 I = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(n). \quad (1.48)$$

Если случайно-неоднородная среда заполняет все пространство, то [92]

$$I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, n) = \left(\frac{3}{4\pi\ell^2 n} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{3|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{4\ell^2 n} \right\}. \quad (1.49)$$

Выражение для I при более сложной геометрии образца можно получить из формулы (1.49), применяя метод изображений, аналогично тому, как это делается в задачах электростатики [40].

Если рассеиватели в среде движутся как броуновские частицы с коэффициентом диффузии D_B , то

$$\langle \Delta\varphi_n^2(\tau) \rangle = \frac{\tau}{\tau_0} n, \quad (1.50)$$

где $\tau_0 = (4k^2 D_B)^{-1}$ — время, необходимое отдельной частице для того, чтобы сместиться на расстояние порядка длины волны излучения λ [89, 90].

1.1.3.2 Рассеяние на потоках частиц

Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ есть распределение скоростей рассеивающих свет частиц в среде. Тогда, как показано в работах [91–93],

$$\Delta\varphi_n(\tau) = -\frac{k\ell\tau}{2\eta} \sum_{m=1}^n \sum_{i,j} A_{ij}(m) \sigma_{ij}(\mathbf{r}_m), \quad (1.51)$$

где $A_{ij}(m) = (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_i)(\hat{e}_m \cdot \hat{e}_j)$, $i, j = x, y, z$. $\hat{e}_m$ — единичный вектор, параллельный направлению рассеянной волны после акта рассеяния номер m , произошедшего в точке $\mathbf{r}_m$,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad (1.52)$$

— тензор напряжений [84]. Дальнейший анализ дает [92]

$$\langle \Delta \varphi_n^2(\tau) \rangle = \frac{2}{15} k^2 \ell^2 \tau^2 n \xi(n), \quad (1.53)$$

$$\xi(n) = \frac{1}{\eta^2} \int \left(\sum_{i \neq j} \sigma_{ij}^2(\mathbf{r}_1) \right) \rho_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}_1. \quad (1.54)$$

Здесь $\rho_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}_1$ — доля n -кратно рассеянных фотонов, траектории которых проходят из точки $\mathbf{r}_0$ в точку $\mathbf{r}$ через элемент объема $d^3 \mathbf{r}_1$ вблизи точки $\mathbf{r}_1$, деленная на n :

$$\rho_n(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}) = \frac{\int_0^n I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, m) I(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, n - m) dm}{n I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, n)}. \quad (1.55)$$

Для заданного распределения $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ скоростей частиц в среде выражения (1.52–1.55) могут быть использованы для вычисления $\langle \Delta \varphi_n^2(\tau) \rangle$, а затем по формуле (1.47) можно найти временную корреляционную функцию рассеянного излучения $G_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \tau)$.

Хотя метод интегрирования по траекториям в описанном выше виде применим только в случае точечных изотропно рассеивающих излучение частиц, полученные с его помощью результаты можно обобщить и на случай анизотропного рассеяния (см., например, [51, 80, 89]. Для этого во всех формулах достаточно заменить ℓ на ℓ^* . Физическое обоснование такой возможности состоит в том, что в среде с анизотропными рассеивателями рассеяние света также можно рассматривать на основе модели случайного блуждания фотонов, однако теперь единичный “акт рассеяния” включает в себя несколько (порядка ℓ^*/ℓ) реальных актов

однократного рассеяния и среднее расстояние между двумя такими актами равно не ℓ , а ℓ^* .

1.1.3.3 Метод Монте-Карло

Метод стохастического моделирования, называемый также методом Монте-Карло (МК), широко используется при анализе задач многократного рассеяния [64, 94–99]. Основная идея этого метода состоит в использовании вычислительной мощности современных компьютеров для перебора огромного количества возможных траекторий фотонов в среде. При этом последовательно рассматриваются акты рассеяния фотонов на отдельных рассеивателях и распространение фотонов между актами рассеяния. Такой подход имеет как достоинства (возможность моделирования практически любых условий распространения излучения: сферически несимметричные диаграммы рассеяния, изменение поляризации излучения при рассеянии и/или при распространении между актами рассеяния, сложная пространственно-неоднородная динамика рассеивателей и т.д.), так и недостатки (большие затраты машинного времени, трудности интерпретации полученных результатов).

Тем не менее, нам представляется целесообразным использование метода Монте-Карло не только в тех случаях, когда решение задачи не удастся найти аналитически, но и для выявления рамок применимости тех или иных аналитических результатов, полученных с использованием неизбежных приближений и допущений.

1.2 Диффузионно-волновая спектроскопия

Значительные успехи в исследовании многократного рассеяния волн различной физической природы, имевшие место в 70-80-х годах, привели к появлению новых методик исследования и диагностики случайно-неоднородных сред, наиболее яркой из которых является так

называемая диффузионно-волновая спектроскопия (ДВС). Идея ДВС заключается в извлечении полезной информации о случайно-неоднородной многократно рассеивающей среде из экспериментально измеренных временных автокорреляционных функций интенсивности рассеянного излучения $G_2(\tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle$. Альтернативный подход заключается в измерении спектральной мощности

$$S(\omega) = \int I^2(t) \cos(\omega t) dt \quad (1.56)$$

рассеянного излучения. Согласно теореме Винера-Хинчина [100, 101], $G_2(\tau)$ и $S(\omega)$ связаны между собой соотношением:

$$S(\omega) = \frac{\langle I(t) \rangle^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [g_2(\tau) - 1] \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (1.57)$$

где $g_2(\tau) = G_2(\tau) / \langle I(t) \rangle^2$. Обычно рассчитывают временную автокорреляционную функцию поля $G_1(\tau) = \langle E(t)E^*(t + \tau) \rangle$. Нормированная автокорреляционная функция поля $g_1(\tau) = G_1(\tau) / G_1(0)$ связана с $g_2(\tau)$ соотношением Зигерта:

$$g_2(\tau) = 1 + \beta |g_1(\tau)|^2. \quad (1.58)$$

Здесь $0 < \beta \leq 1$ — апертурная функция, определяемая используемой измерительной системой (числом пятен спекл-картины в пределах апертуры измерительного прибора, длиной когерентности излучения лазера и т.п.) [9, 102].

ДВС можно рассматривать как расширение традиционной корреляционной спектроскопии однократного рассеяния [3–9] на случай многократно рассеивающих сред. В основе теории ДВС, однако, лежат иные физические принципы и методы расчета.

1.2.1 Основы диффузионно-волновой спектроскопии

Идея ДВС, первые экспериментальные результаты и простая теоретическая модель для их объяснения были впервые представлены в конце

80-х годов в работах [89, 90]. Строгий теоретический расчет временных корреляций излучения в условиях многократного рассеяния был проведен в работе [47]. Исчерпывающий анализ этих результатов дан в работах [25, 26].

В первых экспериментах использовалась кювета ширины $L \sim 1$ мм, заполненная взвесью полистироловых сфер в воде. Диаметр сфер — от десятых долей микрона до нескольких микрон, объемная концентрация сфер — от десятых долей процента до 10% (в результате $\ell^* \sim 100$ мкм $\ll L$). При комнатной температуре и атмосферном давлении рассеиватели случайным образом перемещались в среде с коэффициентом самодиффузии $D_B \sim 10^{-13} \div 10^{-12}$ м²/с. На кювету падал лазерный пучок с длиной волны $\lambda \sim 0.5$ мкм и шириной, превышающей ℓ^* , излучение которого многократно рассеивалось в среде. Временная автокорреляционная функция рассеянного излучения измерялась либо с той же, либо с противоположной стороны кюветы. Оказалось, что характерное время когерентности рассеянного излучения гораздо меньше, чем можно было бы ожидать в условиях однократного рассеяния. Измеренные нормированные временные автокорреляционные функции $g_1(\tau) = G_1(\tau)/G_1(0)$ хорошо описывались выражениями, полученными методом интегрирования по траекториям (см. п. 1.1.3.1):

$$g_1(\tau) = \frac{(L/\ell^*)\sqrt{3\tau/(2\tau_0)}}{\text{sh} \{(L/\ell^*)\sqrt{3\tau/(2\tau_0)}\}} \quad (1.59)$$

для прошедшего света и

$$g_1(\tau) = \exp \left\{ -\gamma \sqrt{3\tau/(2\tau_0)} \right\} \quad (1.60)$$

для диффузно отраженного света. В этих выражениях $\tau_0 = (4k^2 D_B)^{-1} \sim 10^{-3}$ с (см. п. 1.1.3.1), $\gamma = 1 + \Delta$ — численная константа порядка двух (роль постоянной Δ объясняется в п. 1.1.2.4). Формулы (1.59, 1.60) получены в предположении $\tau \ll \tau_0$.

В работе [47] временные автокорреляционные функции многократно рассеянного света были вычислены с использованием диаграммных методов (см. п. 1.1.1). Выражение, полученное для прошедшего через слой случайно-неоднородной среды света, совпадает с (1.59), а для корреляционной функции диффузно отраженного света было найдено

$$g_1(\tau) = \frac{1}{[1 + \sqrt{3\tau/(2\tau_0)}]^2}, \quad (1.61)$$

что согласуется с (1.60) только в пределе $\tau \ll \tau_0$. Несмотря на то, что метод диаграмм является математически более строгим, обнаруживается значительное расхождение экспериментальных результатов с выражением (1.61), в то время, как формула (1.60) хорошо согласуется с экспериментальными данными даже при $\tau \sim \tau_0$ [25, 26].

1.2.2 Диффузионно-волновая спектроскопия в условиях направленных потоков рассеивателей

Хотя эксперименты, заложившие основания ДВС, были проведены с образцами, частицы которых двигались подобно броуновским, вскоре рамки ДВС были расширены. В частности, в работах [80, 91–93] были рассчитаны временные автокорреляционные функции света, рассеянного на направленно движущихся частицах. В работах [80, 93] эти расчеты получили экспериментальное подтверждение, и был предложен метод диагностики потоков частиц в многократно рассеивающих средах, основанный на применении ДВС.

1.2.2.1 Диффузионно-волновая спектроскопия в сдвиговом потоке

Наиболее простым примером потока в плоскопараллельном слое случайно-неоднородной среды ширины L , перпендикулярном оси z , является

так называемый сдвиговый поток,¹ в котором поле скоростей частиц линейно зависит от z :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{v_{max}}{L} z \hat{e}_x. \quad (1.62)$$

Здесь v_{max} — максимальное значение скорости потока, достигаемой при $z = L$, $\hat{e}_x$ — единичный вектор, направленный вдоль оси x и задающий направление потока.

В предположении, что на среду падает плоская световая волна, в работах [80, 91–93] с использованием метода, кратко описанного в п. 1.1.3.2, было получено

$$\langle \Delta \varphi_n^2(\tau) \rangle = 4 \left(\frac{\tau}{\tau_s} \right)^2 n, \quad (1.63)$$

где $\tau_s = \sqrt{30}/(k\ell^*\Gamma)$, $\Gamma = v_{max}/L$ — модуль градиента скорости потока. Использование этого результата вместе с формулой (1.47), проинтегрированной по $\mathbf{r}_0$ (приближение плоской волны), дает для временной автокорреляционной функции выражение [91, 92]

$$G_1(\tau) = \int_1^\infty I(n) \exp \left\{ -\frac{\tau}{2\tau_0} n - 2 \left(\frac{\tau}{\tau_s} \right)^2 n \right\} dn, \quad (1.64)$$

где $I(n)$ — средняя рассеянная интенсивность, приходящаяся на процессы рассеяния порядка n . Конкретный вид $I(n)$ зависит от геометрии эксперимента и в диффузионном приближении может быть найден как решение уравнения (1.48) с граничными условиями на границе образца (см. п. 1.1.2.4).

В формуле (1.64) учтено, что, наряду с направленным движением, рассеиватели в среде всегда подвержены случайному броуновскому блужданию. Поэтому в задаче имеется два характерных времени: τ_s ,

¹Такой поток часто называют плоским течением Куэтта [84].

определяемое параметрами потока, и τ_0 , обратно пропорциональное коэффициенту диффузии рассеивателей. Полученные на основе формулы (1.64) результаты будут, строго говоря, верны только при $\tau < \tau_0, \tau_s$.

Расчет по формуле (1.64) дает

$$g_1(\tau) = \frac{1}{1 - \gamma\ell^*/L} \frac{\text{sh} [(L/\ell^* - \gamma)\sqrt{6(\tau/\tau_s)^2 + 3\tau/(2\tau_0)}]}{\text{sh} [(L/\ell^*)\sqrt{6(\tau/\tau_s)^2 + 3\tau/(2\tau_0)}]} \quad (1.65)$$

для диффузно отраженного света и

$$g_1(\tau) = \frac{L}{\gamma\ell^*} \frac{\text{sh} [\gamma\sqrt{6(\tau/\tau_s)^2 + 3\tau/(2\tau_0)}]}{\text{sh} [(L/\ell^*)\sqrt{6(\tau/\tau_s)^2 + 3\tau/(2\tau_0)}]} \quad (1.66)$$

для прошедшего через слой случайно-неоднородной среды света [80].

1.2.2.2 Диффузионно-волновая спектроскопия в пузелейлевском потоке

Если скорость потока зависит от координат более сложным образом, чем в случае сдвигового потока (1.62), анализ усложняется. Например, для пузелейлевского потока

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 4v_{max} \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right) \hat{e}_x \quad (1.67)$$

формулы (1.63 – 1.66) остаются в силе, однако входящее в них характерное время τ_s надо заменить на τ_p , определяемое эффективным градиентом Γ_{eff} скорости в потоке: $\tau_p = \sqrt{30}/(k\ell^*\Gamma_{eff})$ [92]. Вычисление величины Γ_{eff} нетривиально, однако в первом приближении ее можно заменить среднеквадратичным градиентом скорости $\langle(\nabla\mathbf{v}(\mathbf{r}))^2\rangle^{1/2}$. Полученные таким образом теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными измерениями [80].

1.2.2.3 Диффузионно-волновая спектроскопия в турбулентном потоке

Рассмотрение многократного рассеяния света в турбулентном потоке рассеивающих свет частиц было проведено в работе [103]. Разность ско-

ростей двух рассеивателей, находящихся на расстоянии $\mathbf{\Lambda}$ друг от друга, есть

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (1.68)$$

Если ϕ — доля турбулентных областей в объеме среды, то

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{\Lambda}) = \phi \Delta \mathbf{v}_h(\mathbf{r}) + (1 - \phi) \Delta \mathbf{v}_{nh}(\mathbf{r}, \mathbf{\Lambda}), \quad (1.69)$$

где $\Delta \mathbf{v}_h(\mathbf{r})$ — разность скоростей, обусловленная наличием турбулентных вихрей, а $\Delta \mathbf{v}_{nh}(\mathbf{r})$ — разность скоростей, связанная с ламинарным потоком рассеивателей.

Последовательное рассмотрение задачи приводит к выводу, что дисперсию разности фаз $\langle \Delta \varphi_n^2(\tau) \rangle$ можно представить как сумму двух слагаемых:

$$\langle \Delta \varphi_n^2(\tau) \rangle = \langle \Delta \varphi_n^2(\tau) \rangle_{(lam)} + \langle \Delta \varphi_n^2(\tau) \rangle_{(turb)}, \quad (1.70)$$

где первое слагаемое описывает дефазировку, обусловленную ламинарным потоком (полем разности скоростей $\Delta \mathbf{v}_{nh}(\mathbf{r}, \mathbf{\Lambda})$ в формуле (1.69)), а второе — дефазировку, связанную с наличием в потоке турбулентных вихрей (описываемых величиной $\Delta \mathbf{v}_h(\mathbf{r})$ в формуле (1.69)). Характерные времена, связанные с этими двумя факторами декорреляции излучения, есть [103]

$$\tau_{(lam)} = \frac{1}{1 - \phi} \sqrt{\frac{30\sqrt{3\pi}}{k^2 \langle v_{nh}(\ell^*)^2 \rangle}}, \quad (1.71)$$

$$\tau_{(turb)} = \frac{\sqrt{12}}{\phi k \sqrt{\langle v_h(\ell^*)^2 \rangle - \langle v_h(\ell^*) \rangle^2}}. \quad (1.72)$$

В случае $\phi \simeq 1$ (развитая турбулентность) имеем

$$G_1(\tau) = \int_1^\infty I(n) \exp \left\{ -2 \left(\frac{\tau}{\tau_{(turb)}} \right)^2 n \right\} dn. \quad (1.73)$$

В общем случае $0 < \phi < 1$ достаточно простой формулы для временной автокорреляционной функции получить не удастся.

1.2.3 Применения диффузионно-волновой спектроскопии

Впервые предложенная чуть более 10 лет назад, методика ДВС в настоящее время широко применяется для исследования различных случайно-неоднородных сред, в которых выполнены условия многократного рассеяния. Наиболее важные и интересные применения ДВС лежат, без сомнения, в области биомедицинской диагностики [19, 20, 22–24, 104–106]. Многие биологические среды (например, кожные ткани и кровь) являются непрозрачными в видимом диапазоне электромагнитного излучения, что обусловлено не столько поглощением, сколько многократным характером рассеяния света в них (условие $\mu_a \ll \mu'_s$ почти всегда выполнено) [14, 20]. Характеристики покидающей такую среду излучения в большинстве случаев не могут быть объяснены в приближении однократного рассеяния, поэтому традиционная корреляционная спектроскопия однократного рассеяния [3–9] не может быть применена для *in vivo* диагностики таких сред. В то же время, ДВС изначально развивалась как спектроскопия многократно рассеянных волн и идеально подходит для задач медицинской диагностики.

В последнее время ДВС все чаще применяется в различных областях физики в качестве методики исследования. В работах [107, 108] методом ДВС исследовался режим перехода частиц в суспензии от баллистического движения к броуновскому случайному блужданию; в работе [109] наблюдалось динамическое рассеяние света на ультразвуковых волнах в суспензии. Методика ДВС применяется также для изучения динамики концентрированных суспензий в условиях сильного взаимодействия между взвешенными частицами [110–115].

В последнее время ДВС находит также и промышленные приме-

нения. В работах [116–119], например, развивается модификация ДВС, предназначенная для изучения динамики и реорганизации пен и кремов. Здесь ДВС может дать крайне важную информацию об устойчивости тех или иных составов, об их реакции на внешние деформации и т.п.

1.2.4 Некоторые современные тенденции в развитии диффузионно-волновой спектроскопии

Методика ДВС находится в постоянном развитии. Одной из интересных тенденций является исследование корреляций интенсивности при больших временах задержки τ .

Как показано в работах [120, 121], корреляционную функцию интенсивности излучения $G_2(\tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle$ в условиях многократного рассеяния можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$G_2(\tau) = G_2^{(1)}(\tau) + \frac{1}{g}G_2^{(2)}(\tau) + \frac{1}{g^2}G_2^{(3)}(\tau), \quad (1.74)$$

где $g \gg 1$ — безразмерный кондактанс.¹ Первое слагаемое в формуле (1.74) максимально по величине, но достаточно быстро спадает с ростом τ . Именно $G_2^{(1)}(\tau)$ измеряется обычно в экспериментах по ДВС. Второе слагаемое в (1.74) гораздо меньше, чем первое, однако оно спадает с ростом τ медленнее [122]. Впервые корреляционная функция $G_2^{(2)}(\tau)$ была экспериментально измерена в работе [81]. Корреляционная функция $G_2^{(2)}(\tau)$ позволит, возможно, расширить область применения ДВС, несмотря на экспериментальные трудности ее измерения.

Наконец, поведение $G_2^{(3)}(\tau)$ в оптическом случае не до конца ясно; хотя к настоящему моменту уже имеется сообщение об эксперименталь-

¹В английском языке *conductance* и *conductivity* — это два различных термина. Последний переводится как *проводимость*, а первый употребляется в русском научном языке в транскрипции с английского.

ном измерении этого члена [123], строгий теоретический расчет $G_2^{(3)}(\tau)$ до сих пор не проведен.

Другим направлением развития ДВС является ее применение для анализа анизотропных сред (в частности, жидких кристаллов) [124–128]. Здесь также оказывается возможным использование диффузионного приближения уравнения переноса, однако теперь коэффициент диффузии света зависят от направления его распространения.

Настоящая диссертация посвящена одному из наиболее перспективных направлений развития ДВС — диффузионно-волновой спектроскопии случайно-неоднородных сред с пространственно неоднородной динамикой рассеивателей. Необходимо отметить, что исследования в данном направлении ведут еще несколько научных групп [129–138], работы которых во многом дополняют материал, изложенный в настоящей диссертации.

Выводы к главе I

1. Существуют различные методы анализа многократного рассеяния излучения в случайно-неоднородных средах, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки:

- Метод *диаграмм* — это наиболее общий метод, являющийся максимально строгим в математическом смысле и позволяющий корректно описывать физические процессы, происходящие в условиях многократного рассеяния. Его использование, однако, сопряжено с громоздкими математическими выкладками, которые, к сожалению, не всегда приводят к достаточно компактным результатам.
- Метод *уравнения переноса излучения (УПИ)* основывается на феноменологическом уравнении баланса энергии (уравнении

Больцмана), которое изначально не содержит многих особенностей рассеяния оптических волн (например, полностью игнорируется возможность интерференции полей, рассеянных различными частицами). В то же время, метод УПИ очень удобен для расчетов во многих практически важных случаях, особенно в связи с существованием различных приближенных методов анализа УПИ (P_N -приближение и т.п.).

- Метод *интегралов по траекториям* основывается на идее корпускулярно-волнового дуализма и дает наглядный путь анализа задачи многократного рассеяния. Этот метод наиболее удобен для реализации в виде алгоритма численного моделирования, хотя с его помощью можно получать и аналитические результаты.

2. Методика диффузионно-волновой спектроскопии (ДВС) в настоящее время достаточно хорошо разработана для макроскопически однородных сред с броуновским движением, а также для сред со сдвиговыми или пуазейлевскими потоками рассеивающих свет частиц. Однако, во многих приложениях требуется учет макроскопически неоднородной динамики рассеивателей (локализованные в пространстве потоки, области с более (или менее) интенсивным движением рассеивателей и т.п.). Поэтому актуальной является задача анализа динамического многократного рассеяния света в средах с пространственно неоднородной динамикой рассеивающих центров.
