

Mémoire pour l'obtention de
l'Habilitation à Diriger des Recherches
présenté par

Sergey E. SKIPETROV

à l'Université Joseph Fourier
Grenoble I

Spécialité : Physique

Dynamique des figures de tavelures en milieux désordonnés

Composition du Jury

Mr	C. Boccara	(Rapporteur)
Mr	M. Campillo	
Mr	A. Lagendijk	(Rapporteur)
Mr	R. Maynard	
Mr	C. Miniatura	
Mr	B. Shapiro	(Rapporteur)
Mr	B. van Tiggelen	

Soutenance prévue le 6 Mars 2007

Ce mémoire a été préparé au sein du
Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Roger Maynard pour m'avoir initié à la physique ondulatoire des systèmes désordonnés, pour les nombreuses discussions que nous avons eu et qui m'ont beaucoup aidé dans mon travail, et encore plus pour le soutien humain qu'il a su apporter à mes projets, scientifiques ou non. C'est grâce à Roger que j'ai pu venir à Grenoble et effectuer le travail décrit dans ce mémoire. Je n'aurais jamais pu réussir les études résumées dans les pages suivantes sans soutien, aide, et conseil de Roger.

Je suis très reconnaissant envers Bart van Tiggelen avec qui nous avons travaillé ensemble ces dernières années. Non seulement Bart a su me faire profiter de ses nombreuses connaissances dans le domaine de la physique des ondes, mais j'ai également beaucoup apprécié les discussions de problèmes physiques divers que nous avons eu avec lui.

Je remercie Claude Boccara, Ad Lagendijk, et Boris Shapiro d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et d'y avoir consacré leur temps, malgré leurs nombreuses obligations. Je suis également reconnaissant à Michel Campillo et Christian Miniatura pour avoir bien voulu juger ce travail.

Je tiens à remercier mes collaborateurs à Grenoble et en Europe : Frank Scheffold (Université de Fribourg, Suisse), Georg Maret et Thomas Gisler (Université de Constance, Allemagne), Olivier Bourgeois (Grenoble, France).

Je suis reconnaissant à Frank Hekking et Alain Pasturel, co-directeurs du LPMMC de 2003 à 2006, pour une ambiance créative et très stimulante du point de vue scientifique qu'ils ont su créer au laboratoire et dont j'ai bien profité. Je remercie également Françoise Berthoud pour son aide dans la résolution de problèmes liés à l'informatique.

Un grand merci à Vincent Rossetto et Nicolas Cherroret pour la lecture attentive de ce mémoire et pour les corrections très utiles qu'ils y ont apportées.

Je remercie tous les membres du LPMMC avec qui j'ai partagé mes problèmes et mes joies depuis mon arrivée à Grenoble.

Enfin, j'ai une pensée toute particulière pour mon épouse Anna, dont le soutien ne m'a jamais fait défaut et à mon fils Maxime qui a su contribuer à sa façon à l'aboutissement de ce travail.

Avant-propos

Depuis la soutenance d'une thèse de doctorat en 1998, mon activité de recherche a porté principalement sur la diffusion des ondes en milieux désordonnés. Je me suis également intéressé à deux nouvelles thématiques : la thermodynamique de systèmes mésoscopiques (métaux et supraconducteurs) et le transfert d'information en milieux désordonnés. Ces trois sujets de recherche ont un point commun : il s'agit dans les trois cas d'étudier les phénomènes d'interférences (classiques ou quantiques) dans un environnement désordonné, et d'évaluer l'impact de ces phénomènes sur les observables physiques. Les phénomènes d'interférences sont au cœur de la « physique mésoscopique » — un domaine de recherche très interdisciplinaire où se rencontrent la physique des solides, l'optique, l'acoustique, la sismologie.

Pour raison de cohérence thématique, il ne serait pas possible de traiter tous ces sujets dans un même mémoire. J'ai choisi donc de ne présenter ici qu'une partie de mes travaux, — la partie la plus importante et la plus cohérente du point de vue thématique. Dans ce mémoire je vais aborder la *dynamique* des ondes en milieux désordonnés, les problèmes fondamentaux et les applications qui en découlent.

Table des matières

Introduction	vii
Chapitre 1 Spectroscopie, imagerie, et microscopie des ondes diffusées	1
1.1 Spectroscopie des ondes diffusées	1
1.2 Spectroscopie des ondes diffusées dans les milieux non ergodiques	5
1.3 Détection de l'activité cérébrale par corrélation temporelle de la lumière diffusée	8
1.4 Spectroscopie des ondes diffusées avec les corrélations de longue portée . .	10
1.5 Corrélations non universelles pour une microscopie des milieux désordonnés	12
Chapitre 2 Figures de tavelures en milieux désordonnés et non linéaires	15
2.1 Équation d'onde non linéaire et effet Kerr optique	15
2.2 Méthode de Langevin	16
2.3 Analyse de stabilité	18
2.4 Quelques commentaires	19
Chapitre 3 Propagation d'impulsions courtes en milieux fortement désor- donnés	21
3.1 Théorie de transport et approximation de diffusion	21
3.2 Théorie auto-cohérente de la localisation	23
3.3 Localisation d'ondes dans un guide d'ondes désordonné	25
3.4 Corrélations de longue portée dans un guide d'ondes désordonné	27
3.5 Localisation d'ondes dans un milieu désordonné tridimensionnel	29
Chapitre 4 Dynamique des figures de tavelures quantiques	35
4.1 Qu'est-ce que la figure de tavelures quantiques ?	35
4.2 Statistique de comptage de photons transmis à travers un milieu désordonné	37
4.3 Fluctuations du nombre de photons transmis pour la lumière non classique	39

4.4	Théorie quantique de la spectroscopie des ondes diffusées	41
4.5	Diffusion de la lumière dans des nuages d'atomes froids et laser aléatoire .	43
	Conclusion	45
	Bibliographie	47

Introduction

Beaucoup de milieux naturels (tissus biologiques, brouillard, etc.) et artificiels (mousses, émulsions, suspensions, cristaux photoniques et phononiques, etc.) sont désordonnés. Il est donc important de comprendre la propagation d'ondes (électromagnétiques, acoustiques, élastiques, etc.) en présence d'un désordre afin de pouvoir les utiliser pour sonder des milieux complexes d'une part, et développer de nouveaux matériaux et dispositifs qui profiteront du désordre pour avoir certaines propriétés inhabituelles ou exécuter certaines tâches spécifiques d'autre part.

Lorsqu'une onde cohérente — une onde lumineuse, par exemple — est diffusée dans un milieu désordonné, sa cohérence spatiale est rapidement détruite et la distribution spatiale de l'intensité de l'onde dans le milieu devient aléatoire (cf. Figs. 1 et 2) [1, 2, 3, 4]. On parle dans ce cas de « tavelures » (ou « speckle » en anglais). Malgré leur apparence aléatoire, les figures de tavelures ne le sont pas complètement et possèdent certaines corrélations spatiales [3, 4, 5, 6, 7]. Les corrélations de courte portée, dites corrélations de type « C_1 », peuvent être identifiées en estimant la taille typique de zones sombres et brillantes dans la figure de tavelures (cf. Fig. 2). Cette taille s'avère être de l'ordre de la longueur d'onde λ , d'où l'on conclue que les corrélations de courte portée ne s'étalent que sur les distances de l'ordre de λ [8]. Bien que cela puisse paraître surprenant, les tavelures possèdent aussi des corrélations dites de longue portée, appelées corrélations de type « C_2 » [9]. Ce sont des corrélations entre les zones sombres ou brillantes éloignées. Les corrélations de longue portée ne sont pas facilement identifiables par une simple étude de figures comme la Fig. 2 puisqu'elles sont extrêmement faibles dans les conditions d'une expérience typique. Toutefois, on peut établir par des mesures précises que lorsque l'on varie la fréquence du faisceau incident, son angle d'incidence, ou encore les positions des diffuseurs dans le milieu, les différentes zones de tavelures n'évoluent pas de façons complètement indépendantes, mais ont une composante synchrone dans leur évolution. Cette corrélation faible est de longue portée : même les zones distantes sont corrélées, et la corrélation décroît très lentement avec la distance. Finalement, les tavelures sont aussi caractérisées par une corrélation de portée infinie dont la magnitude est encore moins importante, mais qui ne décroît pas avec la distance. Pour détecter cette corrélation, on mesure les figures de tavelures qui résultent de beaucoup de réalisations différentes du désordre dans l'échantillon et l'on remarque que pour une réalisation donnée *toute* la figure de tavelures est soit un tout petit peu plus lumineuse, soit un tout petit peu moins lumineuse que la moyenne. A ce jour, on connaît deux type de corrélations de portée

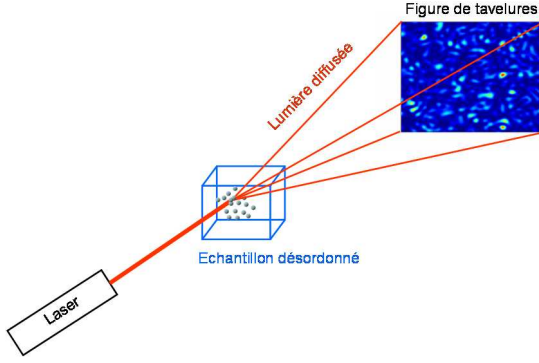


FIG. 1 – Représentation schématique d’une expérience de diffusion multiple de la lumière. Un faisceau laser est diffusé par un milieu désordonné (une suspension de petites particules diélectriques, par exemple). La distribution de l’intensité diffusée est aléatoire et on l’appelle la « figure de tavelures » (ou « speckle » en anglais). L’image de la figure de tavelures utilisée dans cette figure ainsi que dans la Fig. 2 et la Fig. 4.1 est un résultat d’une simulation numérique effectuée par Andreas Völker (Université de Fribourg, Suisse).

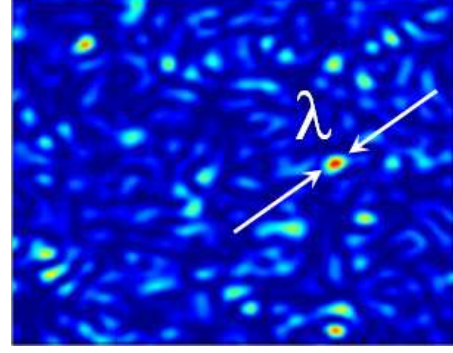


FIG. 2 – La figure de tavelures à l’intérieur d’un milieu désordonné. Dans l’expérience de la Fig. 1, la taille des tavelures projetées sur un écran dépend de la longueur d’onde de la lumière, du rayon du faisceau incident, et de la distance entre l’échantillon désordonné et l’écran. A l’intérieur de l’échantillon, les zones sombres et brillantes de la figure de tavelures ont une taille de l’ordre de la longueur d’onde λ .

infinie : les corrélations de type « C_3 »¹ et les corrélations de type « C_0 ».²

Dans le cadre de ce mémoire nous allons nous intéresser à la *dynamique* de figures de tavelures, c.-à-d. à leurs variations temporelles. En effet, les corrélations de portées courtes, longues et infinies, que nous venons de décrire, n’existent pas qu’en espace mais aussi en temps. La caractérisation statistique des figures de tavelures dynamiques (leur intensité moyenne, leurs fluctuations, et leurs corrélations), ainsi que les applications de nos connaissances sur la statistique de tavelures pour caractériser les milieux désordonnés, sont les sujets que nous allons traiter, sans pouvoir faire leur revue complète, dans les pages qui suivent.

Dans quelles circonstances les figures de tavelures varient-elles au cours du temps ? Pour discuter de cette question, dans le cadre de ce mémoire nous choisissons le modèle le plus simple. Nous supposons que la propagation d’une onde dans un milieu désordonné est décrite par une équation d’onde scalaire :

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ [1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)] \Psi(\mathbf{r}, t) \} = S(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

où $\Psi(\mathbf{r}, t)$ est le champ ondulatoire (champ électrique ou magnétique pour une onde

¹La corrélation C_3 fait partie de la classification « C_i » de Feng et coll. [5] et elle est nécessaire pour expliquer les fluctuations universelles de conductance [10, 11]. Nous n’allons pas considérer C_3 dans ce mémoire car l’auteur n’a pas contribué à l’étude de ce type de corrélation.

²L’existence de la corrélation C_0 n’a été remarquée que récemment par Shapiro [12].

électromagnétique, par exemple), c est la vitesse de l'onde en l'absence du désordre, $\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ décrit le désordre dans le milieu (c'est la partie aléatoire de la constante diélectrique pour une onde électromagnétique), et $S(\mathbf{r}, t)$ est le terme source. Bien que beaucoup de phénomènes soient communs aux ondes de différentes natures [4], dans ce mémoire nous allons, pour être plus concrets, utiliser le langage de l'optique, comme nous avons déjà commencé à le faire en définissant les quantités physiques dans l'Éq. (1).

Considérons maintenant une source d'ondes quasi monochromatique, $S(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t)$, dont l'amplitude $s(\mathbf{r}, t)$ varie lentement en fonction du temps : $|\partial s(\mathbf{r}, t)/\partial t| \ll \omega_0$, et des variations lentes de la constante diélectrique $1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)$: $|\partial[\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)]/\partial t| \ll 1/T_{\text{prop}}$ avec T_{prop} le temps typique qu'il faut pour que l'onde parcoure la distance entre la source et le point de détection.³ Le champ $\Psi(\mathbf{r}, t)$ se met alors sous la forme $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t)$ avec une amplitude $\psi(\mathbf{r}, t)$ qui ne varie que lentement en fonction du temps : $|\partial\psi(\mathbf{r}, t)/\partial t| \ll \omega_0$, et l'équation (1) devient

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + k_0^2 [1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)] \psi(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

où $k_0 = \omega_0/c$ est le nombre d'onde. À partir de cette équation on peut identifier au moins deux raisons pour que l'intensité de l'onde $I(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$, qui décrit la figure de tavelures, soit dépendante du temps t :

- soit la constante diélectrique $1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ varie en fonction du temps (un milieu désordonné fluctuant, où les diffuseurs sont animés par un mouvement brownien, un écoulement, etc., ou un milieu plus complexe, comme une mousse, par exemple, qui change sa structure au cours du temps),
- soit le terme source $s(\mathbf{r}, t)$ varie en fonction du temps (une source impulsionnelle ou modulée, par exemple).

La première de ces deux possibilités — les fluctuations temporelles de la figure de tavelures dues à la dynamique propre du milieu — sera considérée dans le premier chapitre de ce mémoire. Une bonne compréhension du lien direct qui existe entre $\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ et l'onde diffusée permet, dans certains cas, de résoudre le problème inverse et de remonter à la dynamique du milieu à partir des fluctuations de la figure de tavelures mesurées à sa surface. Cela est à l'origine de la spectroscopie et de l'imagerie par ondes diffusées (« diffusing-wave spectroscopy » et « diffusing-wave imaging » en anglais) dont nous allons aussi discuter dans le Chap. 1.

La deuxième possibilité — l'évolution temporelle des figures de tavelures due à une source impulsionnelle — fera l'objet du troisième chapitre. En particulier, nous allons nous intéresser aux effets d'un désordre extrêmement fort qui pourra donner lieu au phénomène de localisation forte (ou « localisation de Anderson ») [13] — l'arrêt complet du transport ondulatoire dû au désordre. Bien que ce phénomène soit étudié depuis déjà presque 50 ans, il y a eu très récemment un progrès important en ce qui concerne son observation pour la lumière en trois dimensions. L'approche théorique que nous présentons dans le Chap. 3 permet de mieux comprendre les derniers résultats expérimentaux.

³ $T_{\text{prop}} = L/c$ dans un milieu homogène et $T_{\text{prop}} \sim L^2/D$ dans un milieu diffusant, où D est le coefficient de diffusion de l'onde et L est la distance entre la source et le détecteur.

Bien qu'elle ne soit pas explicite dans l'Éq. (2), il existe une troisième raison pour que la figure de tavelures ait une dynamique temporelle :

- les effets non linéaires (l'effet Kerr optique, par exemple).

Certains milieux changent leurs propriétés vis-à-vis de la propagation d'ondes en fonction de l'intensité de ces ondes. On dit que ces milieux sont « non linéaires » : en optique, par exemple, la constante diélectrique peut être fonction de l'intensité $I(\mathbf{r}, t)$ [14]. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Kerr optique et en présence d'un mécanisme de rétroaction (« feedback ») — une cavité, par exemple, — il peut rendre le système optique instable [15]. Dans le deuxième chapitre de ce mémoire nous montrons que le désordre peut assurer une rétroaction suffisamment forte pour que la figure de tavelures devienne spontanément instable et donc *dynamique* (c'est-à-dire dépendant du temps) sans raison apparente.

Finalement, le quatrième chapitre sera consacré à un problème nouveau et, hélas, encore mal compris par l'auteur. Ce chapitre joue le rôle de la partie « projets » de ce mémoire. Lorsque l'on discute de la diffusion multiple de la lumière dans les milieux désordonnés, on utilise souvent (presque toujours !) — et ce mémoire n'en est pas une exception — les termes « champ » et « intensité ». Toutefois, lorsque l'on réalise une expérience optique, on effectue les mesures à l'aide de photo-détecteurs, qui produisent une séquence de « clics » provenant de l'absorption de *photons* à la surface de ces photo-détecteurs. Le nombre de clics n est un nombre aléatoire et la figure de tavelures *quantiques* $n(\mathbf{r})$, avec $\mathbf{r}$ la position du détecteur, subit des fluctuations quantiques, même lorsque le milieu désordonné est statique et linéaire, et lorsque la source de la lumière est monochromatique. Cela nous mène à reconnaître une quatrième raison pour les fluctuations de la figure de tavelures au cours du temps :

- les effets quantiques.

Dans une expérience optique « habituelle », on accumule un grand nombre n de « clics » pendant un certain temps τ suffisamment long pour que n soit aussi grand que possible, mais, en même temps, assez court pour que le milieu puisse être supposé statique pendant le temps de la mesure, et pour que chaque photon voie exactement le même désordre que les autres. C'est ce nombre de « clics » n que l'on appelle ensuite « intensité » (avec, éventuellement, une certaine normalisation) et c'est cette quantité que l'on compare avec les résultats théoriques basés sur l'équation d'onde (1). Il est connu qu'une telle approche est correcte sous condition que $n \gg 1$ et si la lumière utilisée dans l'expérience est dans l'état *cohérent* [16]. Par contre, cette approche ne sera plus valable si n devient petit (sauf pour certaines quantités, comme on le verra par la suite) ou si la lumière utilisée dans l'expérience n'est pas dans l'état cohérent, mais dans un état dit « non classique » : par exemple, l'état « comprimé » (« squeezed light ») ou l'état de Fock. Pour correctement décrire la diffusion multiple de la lumière non classique et pour comprendre ce qui se passe lorsque le nombre n de photons détecté est petit, il faut admettre que la lumière n'est pas une onde classique et qu'elle a bien des propriétés quantiques. Ces dernières doivent être prises en compte dans l'analyse des problèmes de diffusion multiple. Nos premiers pas dans cette direction, ainsi que les perspectives de ce domaine de recherche, seront discutés dans le quatrième chapitre de ce mémoire.

Chapitre 1

Spectroscopie, imagerie, et microscopie des ondes diffusées

Ce chapitre est basé sur les publications suivantes :

- S.E. Skipetrov et R. Maynard, « Nonuniversal corrélations in multiple scattering » *Phys. Rev. B* **62**, 886 (2000).
- F. Scheffold, S.E. Skipetrov, S. Romer et P. Schurtenberger, « Diffusing-wave spectroscopy of nonergodic media », *Phys. Rev. E* **63**, 061404 (2001).
- J. Li, G. Dietsche, D. Iftime, S.E. Skipetrov, G. Maret, T. Elbert, B. Rockstroh et T. Gisler, « Noninvasive detection of functional brain activity with near-infrared diffusing-wave spectroscopy », *Journal of Biomedical Optics* **10**, 044002 (2005).
- B.A. van Tiggelen et S.E. Skipetrov, « Fluctuations of local density of states and C_0 speckle corrélations are equal », *Phys. Rev. E* **73**, 045601(R) (2006).
- S. Balog, P. Zakharov, F. Scheffold et S.E. Skipetrov, « Photocount statistics in mesoscopic optics », *Phys. Rev. Lett.* **97**, 103901 (2006).
- F. Jaillon, S.E. Skipetrov, J. Li, G. Dietsche, G. Maret et T. Gisler, « Diffusing-wave spectroscopy from head-like tissue phantoms : influence of a non-scattering layer », *Optics Express* **14**, 10181 (2006).

1.1 Spectroscopie des ondes diffusées

Lorsque la source de lumière est monochromatique, c'est-à-dire lorsque $s(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r})$ dans l'Éq. (2), et le milieu est linéaire, l'évolution temporelle de $\delta\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ due au mouvement de diffuseurs, représente la seule raison pour que la figure de tavelures fluctue au cours du temps. Pour établir le lien entre le mouvement des diffuseurs et les fluctuations de l'intensité diffusée, on peut se baser sur l'image intuitive suivante [4]. On représente une onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ dans un milieu désordonné par une somme d'ondes partielles $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ qui suivent des chemins différents dans le milieu :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i \psi_i(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

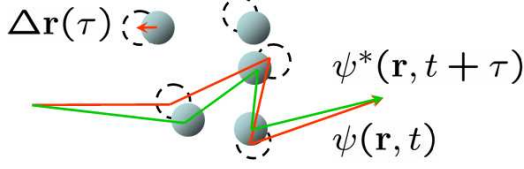


FIG. 1.1 – Le principe de la spectroscopie des ondes diffusées («diffusing-wave spectroscopy» ou DWS en anglais). A l'instant t , une onde partielle parcourt un certain chemin et la somme de toutes les ondes partielles donne lieu à une certaine valeur du champ $\psi(\mathbf{r}, t)$ au point $\mathbf{r}$. Un bref intervalle de temps τ plus tard, les ondes partielles parcourent des chemins légèrement modifiés à cause du mouvement de diffuseurs. Le nouveau champ $\psi(\mathbf{r}, t + \tau)$ n'est pas égal à $\psi(\mathbf{r}, t)$. Le type (mouvement brownien, mouvement directionnel, ou autre) et l'intensité du mouvement de diffuseurs peuvent être déduits de la fonction de corrélation du champ $g_1(\mathbf{r}, \tau) = \langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle / \langle |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle$.

où l'indice i énumère les chemins.⁴ Les chemins correspondant à deux temps t et $t + \tau$ sont représentés sur la Fig. 1.1. Ces chemins parcourent la même séquence de diffuseurs, mais ils ne sont pas identiques, car les diffuseurs se sont déplacés de petites distances $\Delta \mathbf{r}(\tau)$ pendant le temps τ . Pour caractériser les fluctuations de $\psi(\mathbf{r}, t)$ provoquées par les déplacements de diffuseurs, on utilise la fonction de corrélation

$$g_1(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle}{\langle |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle}, \quad (1.2)$$

où les crochets $\langle \dots \rangle$ désignent la moyenne d'ensemble. En utilisant la représentation (1.1), on obtient

$$\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \sum_i \sum_j \langle \psi_i(\mathbf{r}, t) \psi_j^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \sum_i \langle \psi_i(\mathbf{r}, t) \psi_i^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle, \quad (1.3)$$

⁴On utilise le terme «chemin» pour une séquence de collisions de l'onde avec les diffuseurs (cf. Fig. 1.1).

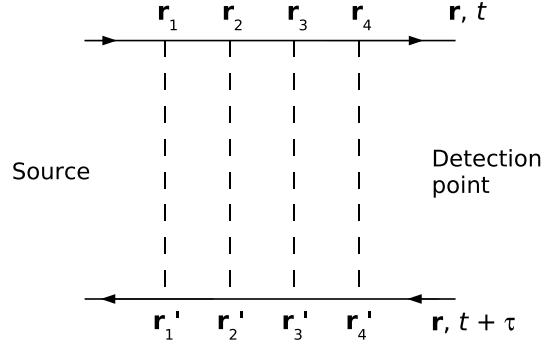


FIG. 1.2 – Exemple de diagramme en échelle (ou diagramme «ladder» en anglais) qui contribue à la fonction de corrélation $\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle$. Les lignes pleines dénotent les fonctions de Green moyennes $G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1})$ correspondant à l'instant t (celles avec les flèches vers le point de détection) et les fonctions de Green $G^*(\mathbf{r}'_i, \mathbf{r}'_{i+1})$ correspondant à l'instant $t + \tau$ (celles avec les flèches dans le sens opposé). Les traits correspondent à la fonction de corrélation de la constante diélectrique du milieu $\langle \delta \varepsilon(\mathbf{r}_i, t) \varepsilon(\mathbf{r}'_i, t + \tau) \rangle$.

où les termes « croisés » $\langle \psi_i(\mathbf{r}, t) \psi_j^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle$ avec $i \neq j$ s'annulent sous condition que la distance typique ℓ entre deux diffusions (le libre parcours moyen) est beaucoup plus grande que la longueur d'onde λ . Cette condition est largement vérifiée dans la plupart de milieux désordonnés « réels » et nous la supposons vérifiée dans ce chapitre.⁵ L'annulation des termes croisés pour $\ell \gg \lambda$ est facile à comprendre. Si les chemins i et j ne sont pas identiques, ils doivent différer d'au moins une diffusion. Cela implique une différence de longueurs de ces chemins de l'ordre de ℓ , et donc une différence de phases de l'ordre de $k\ell = 2\pi\ell/\lambda \gg 2\pi$. Comme la phase n'est définie que modulo 2π , on conclut que la différence de phases accumulées par deux ondes partielles, dont les chemins ne diffèrent que d'une seule diffusion, est aléatoire. C'est cette différence de phases aléatoire qui annule la moyenne du produit $\psi_i(\mathbf{r}, t) \psi_j^*(\mathbf{r}, t + \tau)$ pour $i \neq j$. Dans le langage des diagrammes, ne prendre en compte que les termes avec $i = j$ dans l'Éq. (1.3) correspond à la sommation de diagrammes « en échelle » (diagrammes de type « ladder » en anglais) en négligeant tous les autres diagrammes. Un exemple de diagramme en échelle est présenté sur la Fig. 1.2.

En représentant une onde partielle $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ arrivant au point $\mathbf{r}$ en termes d'une amplitude $a_i(t)$ et d'une phase $\phi_i(t)$, et en supposant que l'amplitude est beaucoup moins affectée par le mouvement de diffuseurs que la phase, que la phase $\phi_i(t)$ est une variable aléatoire gaussienne, que les fluctuations de $a_i(t)$ et de $\phi_i(t)$ sont indépendantes, que la moyenne de $|a_i(t)|^2$ ne dépend que de la longueur s du chemin, et que pour les grandes distances entre la source de lumière et le détecteur la principale contribution à $g_1(\mathbf{r}, \tau)$ est due aux chemins longs, on peut remplacer la sommation dans l'Éq. (1.3) par une intégration et réduire cette équation à

$$\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \int_0^\infty ds \langle I(\mathbf{r}, s) \rangle \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \Delta \phi_s(\tau)^2 \rangle \right]. \quad (1.4)$$

Ici $\langle I(\mathbf{r}, s) \rangle$ est la part de l'intensité moyenne qui arrive au point $\mathbf{r}$ par des chemins de longueur s , et $\langle \Delta \phi_s(\tau)^2 \rangle$ est la variance de la différence de phases entre deux chemins de longueur s qui visitent les mêmes diffuseurs, mais qui sont séparés en temps par un intervalle τ . $\langle \Delta \phi_s(\tau)^2 \rangle$ est directement liée aux mouvements de diffuseurs : $\langle \Delta \phi_s(\tau)^2 \rangle = (2/3)k^2 \langle \Delta \mathbf{r}(\tau)^2 \rangle s / \ell^*$. Ici $\langle \Delta \mathbf{r}(\tau)^2 \rangle$ est la moyenne du carré du déplacement d'un diffuseur pendant un temps τ , $\ell^* \geq \ell$ est le libre parcours moyen de transport qui tiens compte de l'anisotropie de diffusion, et k est le nombre d'onde dans le milieu. Pour le mouvement brownien de diffuseurs avec un coefficient de diffusion D_B (avec « B » pour Brown), $\langle \Delta \mathbf{r}(\tau)^2 \rangle = 6D_B\tau$ et, par conséquent,

$$\langle \Delta \phi_s(\tau)^2 \rangle = 4 \frac{s}{\ell^*} \frac{\tau}{\tau_0} \quad (1.5)$$

avec $\tau_0 = (k^2 D_B)^{-1}$.

Dans l'approximation de diffusion [1, 2, 3, 4], $\langle I(\mathbf{r}, s) \rangle$ obéit à une équation de diffusion

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle I(\mathbf{r}, s) \rangle - \frac{\ell^*}{3} \nabla^2 \langle I(\mathbf{r}, s) \rangle + \frac{1}{\ell_a} \langle I(\mathbf{r}, s) \rangle = P(\mathbf{r}) \delta(s), \quad (1.6)$$

⁵Nous verrons dans le Chap. 3 que dans le cas opposé de $\ell < \lambda$ le phénomène de localisation forte peut avoir lieu et que l'approximation faite dans l'Éq. (1.3) n'est plus acceptable dans ce régime.

où $P(\mathbf{r})$ est la distribution spatiale de sources de lumière dans le milieu et ℓ_a est la longueur d'absorption. On en conclut que la fonction de corrélation $G_1(\mathbf{r}, t) = \langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle$ obéit également à une équation de diffusion :

$$[\nabla^2 - \alpha(\tau)^2] G_1(\mathbf{r}, \tau) = -\frac{3}{\ell^*} P(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

avec

$$\alpha(\tau)^2 = \frac{3}{\ell^* \ell_a} + \frac{k^2}{\ell^{*2}} \langle \Delta \mathbf{r}(\tau)^2 \rangle. \quad (1.8)$$

L'équation (1.7) permet de calculer la fonction de corrélation du champ diffusé pour une source $P(\mathbf{r})$ et pour une géométrie arbitraire de l'échantillon désordonné. Les conditions aux limites à appliquer à la surface A de échantillon sont

$$G_1(\mathbf{r}, \tau) + z_0 [\mathbf{n} \cdot \nabla G_1(\mathbf{r}, \tau)] = 0, \quad (1.9)$$

où $z_0 \sim \ell^*$ est la longueur d'extrapolation qui tient compte des réflexions internes à la surface ($z_0 = \frac{2}{3}\ell^*$ en l'absence des réflexions internes) et $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire normal en chaque point du bord A . La condition (1.9) est obtenue en remarquant que le comportement diffusif n'existe qu'à l'intérieur du milieu désordonné et en imposant l'annulation de l'intensité diffusée entrant dans le milieu.

L'analyse théorique que nous venons de présenter sert de fondation à une technique expérimentale très puissante qui permet de sonder la dynamique des milieux désordonnés en utilisant les ondes optiques. Cette technique porte le nom de « spectroscopie des ondes diffusées » (« diffusing-wave spectroscopy » ou DWS, en anglais) [17, 18]. L'idée de la DWS est de mesurer la perte de cohérence temporelle d'une onde lumineuse due aux mouvements de diffuseurs dans le milieu et d'en déduire l'évolution du milieu au cours du temps. En bref, on mesure la fonction de corrélation $g_2(\tau) = \langle I(t)I(t+\tau) \rangle / \langle I(t) \rangle^2 - 1$ de l'intensité $I(t)$ de la lumière diffusée dans le milieu. Si l'on accepte l'hypothèse gaussienne pour le champ diffusé, alors $g_2(\tau) = |g_1(\tau)|^2$. Plus les mouvements des diffuseurs dans le milieu sont rapides, plus $g_2(\tau)$ et $g_1(\tau)$ décroissent avec τ . La forme fonctionnelle de cette décroissance permet d'étudier le caractère des mouvements (mouvements browniens, écoulements, etc.). Selon la classification des corrélations dans la figure de tavelures que nous avons introduit dans l'introduction, la fonction de corrélation $g_2(\tau)$ est une corrélation de type C_1 : $g_2(\tau) \equiv C_1(\tau)$. Elle est donc de courte portée en temps et elle aurait été de courte portée en espace, si on avait défini $g_1(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}, \tau)$ avec $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ au lieu de $\mathbf{r}$ dans l'argument de ψ^* dans l'Éq. (1.2) [8].

L'application de la DWS pour sonder les suspensions de petites particules, les émulsions, les mousses et d'autres milieux désordonnés est maintenant devenue standard. Dans les deux sections suivantes nous montrons que la DWS peut aussi être appliquée dans des milieux beaucoup plus *complexes*. Nous appelons ici complexes les milieux qui, en plus d'être désordonnés, ont une complexité supplémentaire, qui les distingue des milieux désordonnés plus simples (suspensions, émulsions, mousses, etc.). Le premier exemple d'un milieu désordonné complexe que nous allons considérer est un milieu « non ergodique », qui n'obéit pas à l'hypothèse d'ergodicité. Le deuxième exemple est un milieu biologique avec sa structure complexe et macroscopiquement hétérogène (la tête humaine).

1.2 Spectroscopie des ondes diffusées dans les milieux non ergodiques

L'hypothèse ergodique stipule que la moyenne d'ensemble, que l'on symbolise par les crochets $\langle \dots \rangle$, et qui apparaît dans les définitions des fonctions de corrélation $g_1(\tau)$ et $g_2(\tau)$, peut être remplacée par la moyenne temporelle. Cette dernière est *beaucoup* plus facile à mesurer car au lieu de répéter l'expérience sur un grand nombre d'échantillons avec des réalisations différentes de désordre, il suffit d'utiliser un seul échantillon, qui, grâce à son évolution naturelle au cours du temps, va passer par tous les états microscopiques possibles. Heureusement, l'hypothèse ergodique est vérifiée dans beaucoup de milieux désordonnés, notamment dans les suspensions de petites particules, et cela facilite beaucoup l'application de la DWS à ces milieux. Toutefois, il existe des milieux désordonnés que l'on aimerait bien étudier par de méthodes optiques (comme la DWS), mais qui n'ont pas les propriétés requises pour que l'hypothèse ergodique soit vérifiée. Un gel est un exemple d'un tel milieu.

Les particules constituant un gel se déplacent librement à petite échelle de temps, mais se retrouvent coincées dans des régions d'espace très limitées pour les temps longs. Chaque particule n'explore donc qu'une partie de l'échantillon, typiquement une partie de taille δ . La moyenne du carré du déplacement d'une particule peut être mise sous la forme suivante [19] :

$$\langle \Delta \mathbf{r}(\tau)^2 \rangle = \delta^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\tau}{\tau_c} \right)^p \right] \right\}, \quad (1.10)$$

avec τ_c le temps qu'il faut pour que la particule parcoure une distance de l'ordre de δ , et $p \sim 1$. Puisqu'une particule donnée reste toujours à l'intérieur d'une sphère de rayon $\sim \delta$, les configurations du désordre avec cette particule à l'extérieur de cette sphère ne se réalisent jamais ! Cela empêche le remplacement de la moyenne d'ensemble par la moyenne temporelle. Peut-on, malgré cela, proposer une méthode de mesure qui éviterait de faire la moyenne d'ensemble dans l'expérience ?

En collaboration avec Frank Scheffold au Laboratoire de Physique de la Matière Molle (Université de Fribourg, Suisse) et ses collègues nous avons proposé une technique que nous avons appelée la « technique à deux cellules ». Cette technique permet d'appliquer la DWS aux milieux non ergodiques (comme les gels ou les milieux solides) sans les difficultés supplémentaires liées à la nécessité d'effectuer les moyennes d'ensemble. L'idée consiste à rajouter une cellule auxiliaire, remplie par un milieu désordonné ergodique (une suspension diluée de particules, par exemple), derrière la cellule qui contient l'échantillon à étudier (cf. Fig. 1.3). En ajustant les paramètres de la suspension dans la deuxième cellule, on peut rendre ergodique l'intensité transmise par le « sandwich » de deux cellules (cf. Fig. 1.4). Cela permet d'appliquer la DWS de façon habituelle en faisant la moyenne temporelle au lieu de la moyenne d'ensemble. Le signal mesuré de cette façon est, bien sûr, influencé par la deuxième cellule, mais, car on connaît tout sur la suspension dont elle est remplie, on peut facilement compenser son influence et retrouver la fonction de corrélation $g_2(\tau)$ qui aurait été mesurée avec une seule cellule si la moyenne d'ensemble avait été faite.

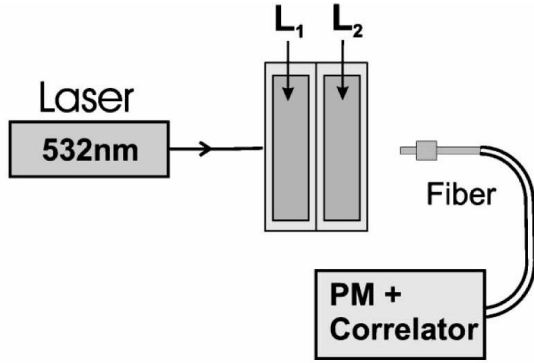


FIG. 1.3 – Schéma de l'arrangement expérimental qui permet l'application de la DWS dans les milieux non ergodiques. Le milieu non ergodique (un gel, par exemple) est dans la première cellule (épaisseur L_1). La deuxième cellule (épaisseur L_2) est remplie par un milieu ergodique (une suspension diluée, par exemple). L'intensité transmise à travers le « sandwich » de deux cellules représente un signal ergodique pour lequel la moyenne temporelle est égale à la moyenne d'ensemble.

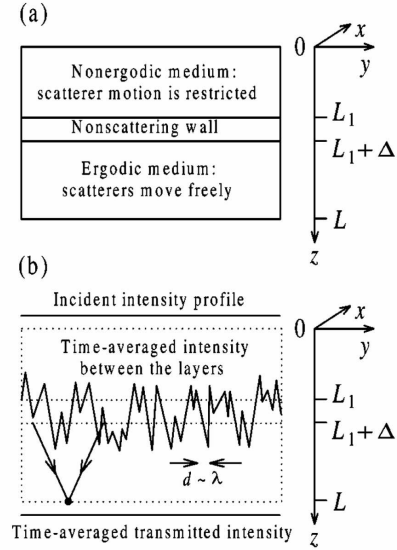


FIG. 1.4 – Illustration du principe de la technique à deux cellules. (a) Le montage complet est constitué de deux cellules (épaisseurs L_1 et L_2) séparées par un mur en verre transparent (épaisseur Δ). (b) Intensité moyennée sur le temps. Après la première cellule, l'intensité moyenne fluctue d'un endroit à l'autre (signal non ergodique). Après la deuxième cellule, l'intensité moyenne ne dépend plus de la position (signal ergodique).

Nous avons appliqué la technique à deux cellules pour étudier la transition « sol-gel » dans une suspension concentrée de particules. La figure 1.5 montre que notre méthode permet de mesurer les fonctions de corrélation dans un milieu non ergodique, ce qui nécessiterait la moyenne d'ensemble si une seule cellule avait été utilisée. La confrontation des fonctions de corrélation de la Fig. 1.5 avec la théorie que nous avons développée permet de caractériser le gel à tout stade de sa formation.

La description théorique de la diffusion de la lumière dans un milieu à deux couches que nous avons appliquée pour tracer les courbes théoriques de la Fig. 1.5 peut être développée à partir de l'Éq. (1.7). Au lieu de donner les formules complètes qui sont assez longues et qui, de toute façon, peuvent être trouvées dans les publications indiquées au début de ce chapitre, nous nous limiterons ici à un cas particulier, simple et important à la fois. Les paramètres du milieu dans la deuxième cellule peuvent être ajustés de telle façon que la fonction de corrélation $g_2(\tau)$ en transmission à travers le « sandwich » de deux cellules se réduit à un simple produit de fonctions de corrélation qui auraient été mesurées pour chacune de deux cellules indépendamment. Le domaine d'application de cette « règle de multiplication » s'élargit considérablement lorsque le verre qui sépare les cellules absorbe

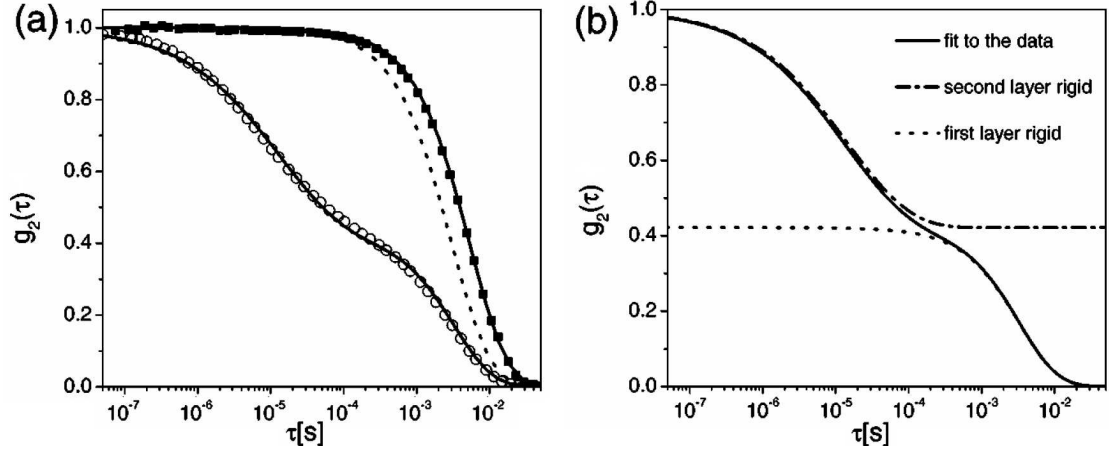


FIG. 1.5 – (a) Fonctions de corrélation expérimentales de l'intensité transmise à travers un échantillon constitué de deux cellules (cercles) et à travers la deuxième cellule seule (carrés). La première cellule est remplie d'un gel colloïdal (fraction volumique de particules $\Phi = 7\%$, libre parcours moyen de transport $\ell^* = 53 \mu\text{m}$, épaisseur de cellule $L_1 = 1,75 \text{ mm}$). La deuxième cellule est remplie d'une poudre de TiO_2 dispersée dans glycérol (diamètre de particules est inférieur à $5 \mu\text{m}$, $\ell^* = 41 \mu\text{m}$, épaisseur de cellule $L_2 = 1,9 \text{ mm}$). Les lignes pleines sont obtenues en résolvant l'Éq. (1.7) pour deux cellules turbides séparées par un mur en verre. La ligne pointillée montre la courbe théorique avec la première cellule remplie d'un milieu solide (diffuseurs immobiles). (b) Différentes contributions à la fonction de corrélation pour un échantillon constitué de deux cellules. La ligne pleine est la même que dans la figure (a). Les lignes pointillées correspondent au cas de la première et de la deuxième cellule remplies d'un milieu solide [pour la première cellule, c'est la même courbe que celle de la figure (a), mais multipliée par 0,42].

la lumière.⁶ Cette règle apparaît très pratique pour l'interprétation d'expériences : il suffit de diviser la fonction de corrélation $g_2(\tau)$ mesurée pour l'ensemble de deux cellules par $g_2(\tau)$ correspondant à la cellule auxiliaire pour obtenir la fonction de corrélation pour le gel dans la première cellule, et, on le rappelle, sans faire la moyenne d'ensemble qui aurait été nécessaire si la technique à deux cellules n'avait pas été utilisée.⁷

La technique à deux cellules a marqué une étape importante dans l'étude optique des propriétés des milieux non ergodiques. Une approche alternative, qui a de plus en plus de succès aujourd'hui, consiste à utiliser une caméra CCD. Les caméras CCD modernes sont suffisamment rapides pour accéder à la dynamique des milieux diffusants et elles permettent de moyennner la fonction de corrélation sur l'ensemble de pixels, en résolvant le problème de non-ergodicité [20, 21].

⁶Il ne faut pas, bien sûr, que cette absorption soit trop importante, mais un certain degré d'absorption diminue le poids relatif des chemins optiques qui reviennent dans la première cellule après avoir visité la deuxième. La contribution de ces chemins à la fonction de corrélation n'obéit pas à la règle de multiplication.

⁷Dans l'hypothèse gaussienne pour le champ diffusé $\psi(\mathbf{r}, t)$, la règle de multiplication s'applique aussi bien à $g_2(\tau)$ qu'à $g_1(\tau)$, puisque $g_2(\tau) = |g_1(\tau)|^2$.

1.3 Détection de l'activité cérébrale par corrélation temporelle de la lumière diffusée

Depuis l'introduction de la DWS en 1987, ses applications potentielles dans le domaine de l'imagerie médicale ont été une des motivations principales pour son développement [22, 23, 24]. Très récemment, en collaboration avec l'équipe de Georg Maret (Université de Constance, Allemagne), nous avons réussi à montrer que la DWS peut être utilisée pour détecter et pour visualiser l'activité cérébrale chez l'homme. Grâce à une absorption relativement faible par les tissus biologiques de la lumière en infrarouge proche (longueur d'onde ~ 800 nm), on peut sonder l'activité du cerveau humain de façon non invasive par les moyens optiques utilisés à travers la peau et le crâne (cf. Fig. 1.6).

Comme dans toutes les applications de la DWS, l'observable dans ces expériences est la fonction de corrélation de l'intensité diffusée $g_2(\tau)$. Pour décrire la diffusion de la lumière dans un milieu très complexe tel que la tête humaine, nous utilisons le modèle à trois couches (la peau, le crâne, et le cortex cérébral) illustré sur la Fig. 1.7. L'équation de diffusion (1.7) a été résolue pour ce modèle et les épaisseurs des deux premières couches (la peau et le crâne), les libres parcours moyens de la lumière, les longueurs d'absorption, et les constantes de diffusion des centres de diffusion dans les couches ont été ajustés dans des limites raisonnables pour optimiser l'accord avec les données (cf. Tab. 1.1).⁸ Comme le montre la Fig. 1.8, la théorie et l'expérience sont en assez bon accord. Cela démontre que $g_2(\tau)$ contient de l'information sur l'activité du cerveau et que les mesures de $g_2(\tau)$ peuvent être utilisées pour reconstruire une image de cette activité. L'expérience conduite à Constance a été répétée avec onze personnes volontaires pour permettre l'analyse statistique de résultats. La confrontation des données avec le modèle théorique a permis de distinguer très clairement les périodes d'activité des périodes de repos, et même de faire la différence entre l'activité de la main droite et celle de la main gauche (cf. Fig. 1.8). Des résultats très similaires ont été obtenus pour la stimulation visuelle du cortex visuel primaire.

TAB. 1.1 – Paramètres qui donnent le meilleur accord de la théorie basée sur l'Éq. (1.7) avec les données (cf. Fig. 1.8).

	Épaisseur	Libre parcours moyen ℓ^*	Longueur d'absorption ℓ_a	Coefficient de diffusion D_B en repos	Coefficient de diffusion D_B , stimulation contralatérale (main droite)	Coefficient de diffusion D_B , stimulation ipsilatérale (main gauche)
Peau	1 mm	0,5 mm	39,7 mm	$1,0 \cdot 10^{-9}$ cm ² /s	$1,5 \cdot 10^{-9}$ cm ² /s	$1,2 \cdot 10^{-9}$ cm ² /s
Crâne	4,7 mm	0,5 mm	39,7 mm	0	0	0
Cortex	∞	0,6 mm	29,6 mm	$4,9 \cdot 10^{-9}$ cm ² /s	$1,3 \cdot 10^{-8}$ cm ² /s	$9,8 \cdot 10^{-9}$ cm ² /s

⁸À priori, il n'y a aucune raison pour que la dynamique de centres de diffusion dans la tête humaine soit brownienne. Toutefois, nous avons trouvé que le modèle brownien décrit les données mieux que les autres modèles aussi simples (mouvement balistique ou écoulement aléatoire).

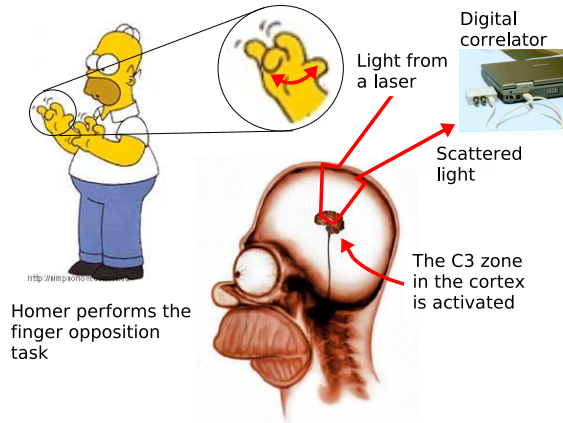


FIG. 1.6 – L'expérience consiste à illuminer la tête du patient droitier par un faisceau laser (longueur d'onde 802 nm) à l'aide d'une fibre optique et à mesurer la corrélation $g_2(\tau)$ de la lumière multiple diffusée en utilisant une deuxième fibre, placée à une distance de l'ordre de 20 mm de la première, et un corrélateur numérique. La lumière pénètre dans le cortex cérébral à travers la peau et le crâne. La décroissance plus ou moins rapide de $g_2(\tau)$ témoigne de l'activité cérébrale dans la zone C3 du cortex, cette zone étant située à proximité des fibres. L'activité cérébrale dans la zone C3 est stimulée par des mouvements que le patient effectue avec les doigts de sa main droite, par contre les mouvements des doigts de sa main gauche ne doivent stimuler aucune activité dans la zone C3 du cortex. Il est important de noter que toute la procédure est non invasive. Cette figure est créée à partir des images trouvées sur les sites web simpsonovi.comics.cz, www.simpsonstrivia.com.ar et www.correlator.com.

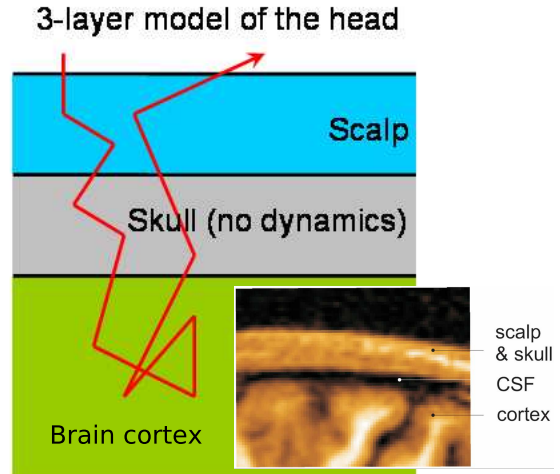


FIG. 1.7 – Le modèle à trois couches de la structure optique de la tête humaine que nous utilisons pour décrire les résultats de l'expérience illustrée par la Fig. 1.6. La première couche représente la peau, la deuxième — le crâne, et le troisième — le cortex cérébral. Une couche fine et transparente du liquide cébrospinal entre le cortex et le crâne est négligée dans la principale partie de notre analyse. Nous montrons *a posteriori* que son rôle est important pour l'étude quantitative de l'activité cérébrale, mais n'affecte guère nos conclusions qualitatives. L'encadré montre une image de la structure de la tête humaine obtenue par l'imagerie à résonance magnétique nucléaire.

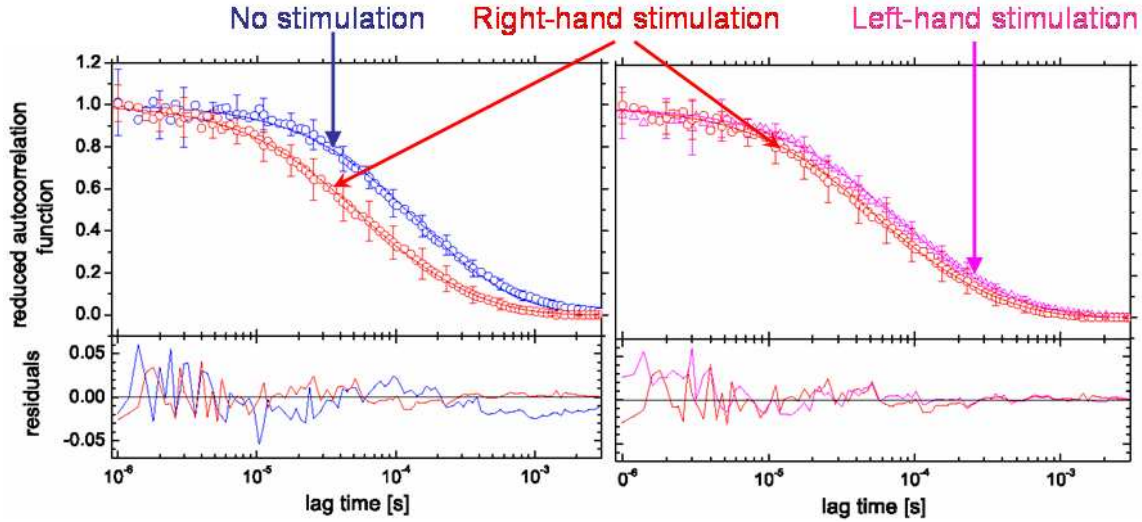


FIG. 1.8 – Fonctions de corrélation $g_2(\tau)$ mesurées dans l'expérience de la Fig. 1.6 lorsque le patient droitier effectue des mouvements avec les doigts de sa main droite (stimulation controlatérale, figure à gauche, courbe inférieure) ou n'effectue aucun mouvement (figure à gauche, courbe supérieure). On voit clairement que la fonction de corrélation décroît plus vite dans le premier cas. Si les mouvement sont effectués par les doigts de la main gauche (stimulation ipsilatérale), l'effet est moins fort (figure à droite, courbe supérieure). La correspondance entre la théorie (lignes continues obtenues avec les paramètres de la Tab. 1.1) et les données (symboles) est très bonne.

1.4 Spectroscopie des ondes diffusées avec les corrélations de longue portée

La corrélation $g_2(\tau)$ dont nous avons discuté dans les sections précédentes de ce chapitre est une corrélation de courte portée (une corrélation de type C_1). La corrélation de longue portée $C_2(\tau)$ a été mesurée, pour la première fois, par F. Scheffold et coll. [25].⁹ Elle peut être calculée en utilisant la méthode de Langevin [29, 30].¹⁰

L'idée de la méthode de Langevin consiste à considérer chaque point d'espace où l'intensité $I(\mathbf{r}, t)$ s'écarte de sa valeur moyenne $\langle I(\mathbf{r}) \rangle$ comme une « source secondaire ». Les ondes émises par ces sources se propagent par diffusion. Il en résulte une corrélation entre $I(\mathbf{r}_1)$ et $I(\mathbf{r}_2)$, où $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ sont deux points distants. Pour trouver cette corrélation, on écrit une équation de diffusion pour la fluctuation de l'intensité $\delta I(\mathbf{r}, t) = I(\mathbf{r}, t) - \langle I(\mathbf{r}) \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta I(\mathbf{r}, t) - D \nabla^2 \delta I(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t), \quad (1.11)$$

⁹La corrélation fréquentielle $C_2(\Delta\omega)$ a été étudiée par A. Genack et coll. dans un guide d'ondes désordonné [49] et par M.P. van Albada et coll. dans une tranche tridimensionnelle [27, 28].

¹⁰L'utilisation de la méthode de Langevin donne les mêmes résultats qu'un calcul plus rigoureux qui consiste à joindre 4 propagateurs en échelle par intermédiaire d'un vertex appelé la « boîte de Hikami », cf. Fig. 3.4(b).

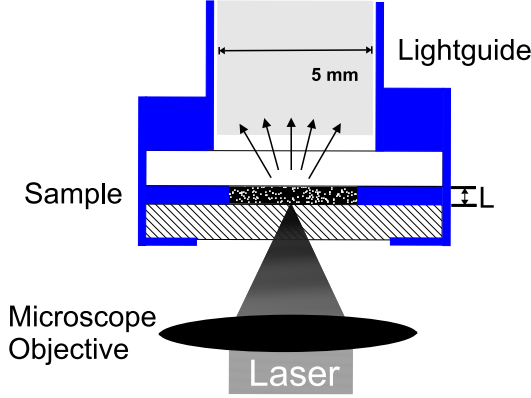


FIG. 1.9 – Représentation schématique de l'expérience de mesure des corrélations de longue portée (C_2). Un faisceau laser est focalisé en une tache de quelques microns à la surface d'une suspension de petites particules diélectriques (épaisseur de l'échantillon $L = 0,5$ mm, libre parcours moyen de transport $\ell^* = 0,7$ μm). Toute la lumière transmise est collectée par une fibre optique multi-mode.

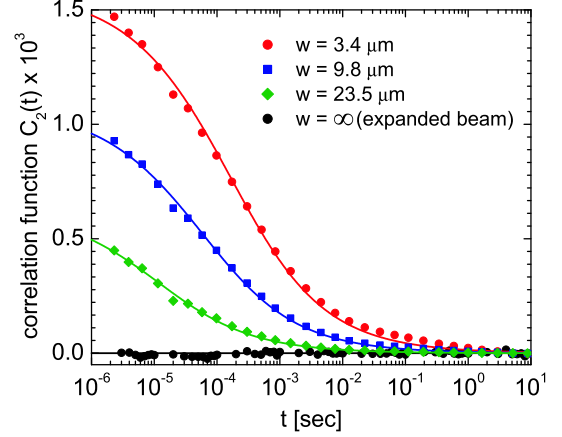


FIG. 1.10 – Corrélation temporelle de la lumière transmise dans l'expérience de la Fig. 1.9 pour différentes tailles w de la tache focale. Les lignes montrent les régressions effectuées à partir de l'Éq. (1.13).

où $D = c\ell/3$ est le coefficient de diffusion de la lumière, c est la vitesse de la lumière,¹¹ et $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ sont les sources aléatoires qui s'annulent en moyenne et dont la corrélation est donnée par

$$\langle j_{\text{ext}}^{(i)}(\mathbf{r}, t) j_{\text{ext}}^{(j)}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle = \frac{2\pi\ell c^2}{3k^2} |\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t_1) \rangle|^2 \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \quad (1.12)$$

On voit que la corrélation $C_1 = |\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t_1) \rangle|^2$ joue, en quelque sort, le rôle d'une source pour la corrélation de type C_2 . Pour un milieu désordonné infini où les diffuseurs sont animés par un mouvement brownien, les Éqs. (1.11) et (1.12) donnent, typiquement, une corrélation $\langle \delta I(\mathbf{r}, t) \delta I(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle$ de l'ordre de $1/(k\ell)^2 \ll 1$. Elle décroît comme $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ avec la distance entre $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}_1$ et comme $1/\sqrt{\tau}$ avec le temps $\tau = |t - t_1|$.

Nous avons calculé la corrélation C_2 pour une situation qui correspond aux expériences effectuées récemment dans le laboratoire de Frank Scheffold (Université de Fribourg, Suisse). Dans ces expériences, on focalise un faisceau laser sur la surface d'un échantillon désordonné puis on collecte toute la lumière transmise avec une fibre optique multi-mode (cf. Fig. 1.9). On mesure donc le coefficient de *transmission totale* $T(t)$. La forte focalisation du faisceau incident favorise les croisement de chemins des ondes partielles dans le milieu, et on peut montrer que ce sont ces croisements qui sont à l'origine

¹¹La vitesse dans la définition de D n'est pas égale à c dans l'équation d'onde (1). Plus rigoureusement, c'est la *vitesse de transport d'énergie* qui entre dans l'expression de D [31].

de la corrélation C_2 . Le résultat de notre calcul est

$$C_2(\tau) = \frac{\langle T(t)T(t+\tau) \rangle}{\langle T(t) \rangle^2} - 1 = \frac{2}{3g} \exp\left(\frac{3\tau}{4\tau_2}\right) \left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{3\tau}{4\tau_2}}\right) \right], \quad (1.13)$$

où Φ est la fonction d'erreur, $\tau_2 = \tau_0(\ell^*/w)^2$, $g = (4/9)\sqrt{2/\pi}k^2\ell^*w$, et où nous avons supposé que la taille de la tache focale w est plus petite que l'épaisseur de l'échantillon L .¹² Cette formule décrit bien les résultats expérimentaux (cf. Fig. 1.10), lorsque l'on ajuste g et τ_2 . Les valeurs $g \sim 10^3$ et $\tau_2 \sim 10^{-5}$ – 10^{-4} s qui donnent le meilleur accord avec les données sont proches des valeurs calculées à partir de w , ℓ^* , k et τ_0 .

La corrélation $C_2(\tau)$ a une magnitude très faible : $C_2(\tau) \sim 10^{-3}$, tandis que $C_1(\tau) = g_2(\tau) \sim 1$. En même temps, la décroissance de C_2 en temps est beaucoup plus lente que celle de C_1 : $C_2 \sim 1/\sqrt{\tau}$, tandis que $C_1 \sim \exp(-\tau/\tau_1)$. C_2 est donc de longue portée en temps. La faible magnitude de C_2 et la difficulté de mesure qui en découle sont les principaux obstacles à son application comme sonde des milieux désordonnés. L'existence des corrélations de longue portée dans les figures de tavelures dynamiques, bien établie à ce jour, reste un phénomène fondamental très intéressant qui n'a pas encore trouvé d'applications pratiques.

1.5 Corrélations non universelles pour une microscopie des milieux désordonnés

La corrélation du champ $g_1(\mathbf{r}, \tau)$ et les corrélations de l'intensité C_1 et C_2 , dont nous avons discuté dans les sections précédentes, peuvent être utilisées pour faire de l'imagerie d'un milieu diffusant. Toutefois, la résolution spatiale d'une telle méthode d'imagerie est limitée par le libre parcours moyen ℓ^* de la lumière dans le milieu. Cette limitation est due au caractère diffusif des processus qui sont à l'origine de ces corrélations : après tout, la corrélation du champ $G_1(\mathbf{r}, \tau)$ obéit à une équation de diffusion (1.7) ! Toutefois, il existe une possibilité (du moins, une possibilité théorique) de visualiser un milieu désordonné avec une résolution spatiale bien supérieure à ℓ^* et même allant jusqu'à la limite ultime de toutes les méthodes d'imagerie optique, la longueur d'onde λ . Une telle « microscopie » des milieux diffusants n'est pas réalisée à ce jour. Le but de cette section est de présenter des résultats théoriques qui suggèrent que la microscopie des milieux désordonnés doit être possible.

L'idée est d'utiliser un autre type de corrélation de l'intensité diffusée, non pas la corrélation de type C_1 ou C_2 , mais une corrélation de type C_0 . C_0 est une corrélation de portée infinie qui a été proposée par Boris Shapiro [12]. Cette corrélation,

$$C_0(\Delta\mathbf{r}, \tau) = \frac{\langle \delta I(\mathbf{r}, t) \delta I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t + \tau) \rangle}{\langle I(\mathbf{r}) \rangle \langle I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \rangle}, \quad \Delta\mathbf{r} \gg \ell, \quad (1.14)$$

n'a une magnitude considérable que pour les ondes provenant d'une source très petite dont la taille est inférieure ou comparable à la longueur d'onde λ . Pour une source bien

¹² $C_2(\tau)$ a été considéré par Berkovits et Feng dans la limite opposée de $w \gg L$ [7]. Notre résultat est similaire à ce obtenu par de Boer et coll. pour $C_2(\Delta\omega)$ [28].

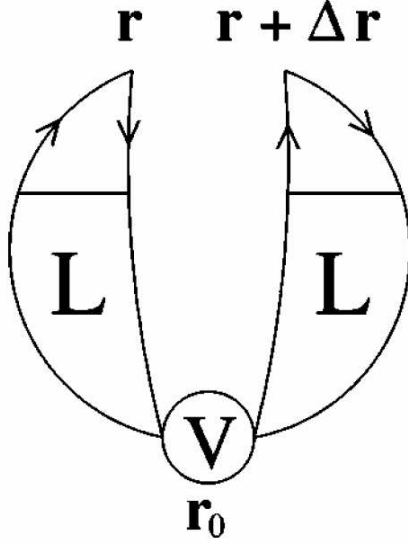


FIG. 1.11 – Le diagramme pour la fonction de corrélation de l'intensité C_0 . Les L dénotent les propagateurs en échelle («ladder propagators») correspondant à l'instant t (celui de gauche) et à l'instant $t + \tau$ (celui de droite). Les lignes pleines dénotent les fonctions de Green moyennes G (avec les flèches vers $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$) et G^* (avec les flèches vers $\mathbf{r}_0$). Le vertex V localisé au point $\mathbf{r}_0$ est détaillé sur la Fig. 1.12.

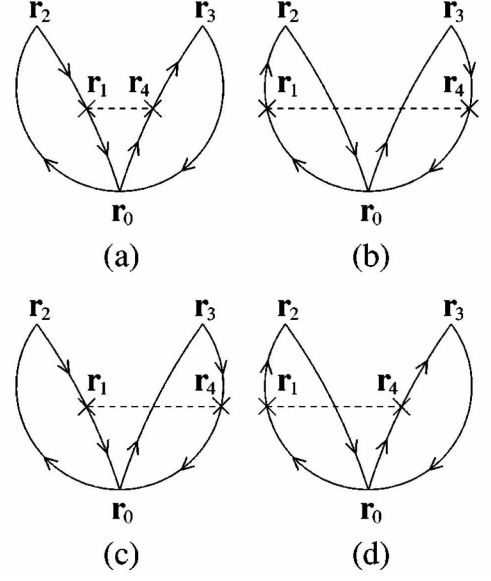


FIG. 1.12 – Les diagrammes qui contribuent au vertex V de la Fig. 1.11. Les lignes dénotent les fonctions de Green moyennes G^* (celles avec les flèches vers $\mathbf{r}_0$) et G (celles avec les flèches dans le sens opposé). Dans chaque diagramme, les lignes qui vont de $\mathbf{r}_0$ à $\mathbf{r}_2$ correspondent à l'instant t , et celles qui vont de $\mathbf{r}_0$ à $\mathbf{r}_3$ à l'instant $t + \tau$. Les croix symbolisent la diffusion (un facteur k_0^2 est associé à chaque croix). Les lignes pointillées dénotent les fonctions de corrélation des fluctuations de constante diélectrique. Des intégrations doivent être effectuées sur $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ et $\mathbf{r}_4$. $\mathbf{r}_0$ est la position de la source.

plus petite que λ , la magnitude de C_0 est de l'ordre de $1/k\ell$.¹³ On voit donc que dans un milieu faiblement diffusant ($k\ell \gg 1$), C_0 est beaucoup plus faible que la corrélation $C_1 \sim 1$. Malgré cela, on peut espérer à mesurer C_0 et la distinguer de C_1 en utilisant sa portée infinie en espace : le calcul (cf. Figs. 1.11 et 1.12) montre que C_0 ne décroît pas avec la distance $\Delta\mathbf{r}$ entre les points de mesure ! Plus précisément, dans un milieu infini avec les centres de diffusion animés par un mouvement brownien on trouve

$$C_0(\Delta\mathbf{r}, \tau) \simeq \frac{\pi}{k\ell} \begin{cases} 1 - \frac{8}{\pi^{3/2}} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}, & \text{pour } \tau \ll \tau_0, \\ \left(\frac{\tau_0}{4\pi\tau}\right)^{3/2}, & \text{pour } \tau \gg \tau_0, \end{cases} \quad (1.15)$$

¹³Dans cette section, nous nous limitons à la diffusion isotrope et mettons $\ell^* = \ell$. Dans le cas d'une diffusion anisotrope, le calcul de C_0 se complique considérablement.

avec le même $\tau_0 = (k^2 D_B)^{-1}$ que dans l'Éq. (1.5). Il doit donc être possible de mesurer C_0 pour deux points de mesure éloignés de la source ($|\mathbf{r}| \gg \ell$, $|\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}| \gg \ell$) et l'un de l'autre ($|\Delta\mathbf{r}| \gg \ell$). Dans ce cas, le terme C_0 doit donner la contribution principale à la fonction de corrélation car tous les autres termes sont beaucoup plus faibles (C_1 est négligeable pour $|\Delta\mathbf{r}| > \ell$, $C_2 \sim 1/(k\ell)^2 \ll C_0$ et $C_3 \sim 1/(k\ell)^4 \ll C_0$ [4, 7]).

Une particularité très importante de C_0 par rapport aux autres corrélations est sa sensibilité à la structure du désordre à la proximité de la source. En fait, on peut montrer que le libre parcours moyen ℓ et le temps τ_0 dans l'expression (1.15) ont les valeurs correspondant à une région d'espace de taille de l'ordre de λ autour de la source. Si les paramètres du milieu sont fonctions de la position, C_0 ne sera sensible qu'à leurs valeurs à proximité immédiate de la source. En mesurant C_0 très loin de la source, on peut donc en déduire les propriétés du désordre (au moins ℓ et τ_0) près de la source, et cela avec une résolution spatiale de l'ordre de λ !

On peut se demander si C_0 est liée aux autres quantités caractérisant un milieu désordonné et, plus généralement, à quoi sommes nous sensibles lorsque nous mesurons C_0 ? La réponse à cette question est assez surprenante : apparemment, la corrélation C_0 ne reflète rien d'autre que la corrélation de la densité d'état locale $\rho(\mathbf{r}, t)$ au point source $\mathbf{r}_0$:

$$C_0(\Delta\mathbf{r}, \tau) = \frac{\langle \delta\rho(\mathbf{r}_0, t) \delta\rho(\mathbf{r}_0, t + \tau) \rangle}{\langle \rho(\mathbf{r}_0, t) \rangle^2}. \quad (1.16)$$

En particulier, pour $\tau = 0$ on conclut que C_0 est égale à la variance de la densité d'état locale $\langle \delta\rho(\mathbf{r}_0, t)^2 \rangle / \langle \rho(\mathbf{r}_0, t) \rangle^2$. Cela veut dire qu'en mesurant la corrélation de l'intensité diffusée *très* loin d'une source ponctuelle, on a accès à la fluctuation et à la corrélation temporelle de la densité d'état locale au point source. Sous condition d'avoir un moyen de contrôle de la position d'une source de petite taille (par exemple, un atome ou une molécule fluorescente, une fibre optique avec une ouverture inférieure à λ , etc.), nous avons donc une possibilité d'effectuer une « microscopie de la densité d'état locale » dans un milieu désordonné. Cette possibilité n'est pour le moment que purement théorique et elle n'a pas encore été confirmée expérimentalement, mais nous sommes persuadés que cela n'est qu'une question de temps !

Chapitre 2

Figures de tavelures en milieux désordonnés et non linéaires

Ce chapitre est basé sur les publications suivantes :

- S.E. Skipetrov et R. Maynard, « Instabilities of waves in nonlinear disordered media », *Phys. Rev. Lett.* **85**, 736 (2000).
- S.E. Skipetrov, « Temporal fluctuations of waves in weakly nonlinear disordered media », *Phys. Rev. E* **63**, 056614 (2001).
- S.E. Skipetrov, « Langevin description of speckle dynamics in nonlinear disordered media », *Phys. Rev. E* **67**, 016601 (2003).
- S.E. Skipetrov, « Instability of speckle patterns in random media with noninstantaneous Kerr nonlinearity », *Optics Letters* **28**, 646 (2003).
- S.E. Skipetrov, « Dynamic instability of speckle patterns in nonlinear random media », *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 168 (2004).

2.1 Équation d'onde non linéaire et effet Kerr optique

Dans ce chapitre nous allons considérer la propagation des ondes en milieux dits « non linéaires ». Cette dénomination est utilisée pour les milieux dont la réponse optique dépend de l'intensité de l'onde. Naturellement, la description mathématique de la propagation des ondes dans les milieux non linéaires fait appel aux équations différentielles non linéaires. Nous allons nous concentrer sur l'équation d'onde non linéaire :

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \left[1 + \delta\epsilon(\mathbf{r}) + \epsilon_2 |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \right\} = s(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t), \quad (2.1)$$

où on peut identifier la « constante diélectrique non linéaire » $\epsilon(\mathbf{r}, t) = 1 + \delta\epsilon(\mathbf{r}) + \epsilon_2 |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Cette dernière est constituée de deux contributions. La partie linéaire de $\epsilon(\mathbf{r}, t)$, $1 + \delta\epsilon(\mathbf{r})$, décrit le désordre. La partie non linéaire de $\epsilon(\mathbf{r}, t)$, $\epsilon_2 |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$, est proportionnelle à l'intensité de l'onde $I(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Cette proportionnalité peut avoir lieu dans les milieux qui manifestent l'effet Kerr optique. Cet effet est généralement faible : le coefficient de non-linéarité ϵ_2 est petit dans la plupart de matériaux et la partie non li-

néaire de la constante diélectrique $\varepsilon_2 I$ est très inférieure à 1 pour les intensités I réalistes.¹⁴ La proportionnalité de la constante diélectrique à l'intensité brise le principe de superposition et empêche la représentation de la propagation ondulatoire par une somme d'ondes partielles indépendantes (comme sur la Fig. 1.1). La constante diélectrique « ressentie » par un chemin donné est maintenant affectée par tous les autres chemins (cf. Fig. 2.1). Dans la plupart de milieux, la réponse non linéaire n'est pas instantanée, comme c'est le cas dans l'Éq. (2.1), mais apparaît avec un certain retard. Bien que ce retard complique l'analyse, il est possible de le prendre en compte et il ne modifie pas nos résultats de façon qualitative. Pour cette raison, nous n'allons pas considérer le retard de la réponse non linéaire dans ce mémoire.

D'une part, il est très tentant de poser $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t)$ et de réduire l'Éq. (2.1) à une équation stationnaire pour $\psi(\mathbf{r})$. La situation stationnaire a été considérée précédemment par Agranovich et Kravtsov [33], de Boer et coll. [34] et Heidereich et coll. [35]. Dans ce cas, l'intensité $I(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ est indépendante du temps, ce que veut dire que la figure de tavelures est stationnaire et elle ne représente pas beaucoup d'intérêt dans le cadre de ce mémoire qui porte sur sa *dynamique*. D'autre part, il est connu que les équations non linéaires peuvent impliquer l'instabilité des solutions stationnaires. Autrement dit, une solution sous forme $\psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t)$ peut toujours exister (et on a bien le droit de l'étudier !), mais elle serait instable par rapport aux faibles perturbations et, par conséquent, elle ne se réalisera *jamaïs* dans une expérience. Pour décrire une expérience réaliste, on peut toujours mettre $\Psi(\mathbf{r}, t)$ sous la forme $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t)$, mais il faut garder la dépendance temporelle de ψ . Afin de pouvoir avancer dans notre analyse malgré cette complication, nous allons supposer que la variation temporelle de l'enveloppe $\psi(\mathbf{r}, t)$ est extrêmement lente. Par ailleurs, nous n'allons considérer qu'une non-linéarité faible (le sens du mot « faible » sera clarifié plus tard), car cela nous autorisera à la traiter par la méthode de perturbations. En même temps, nous nous limitons dans ce chapitre (tout comme dans le chapitre précédent) au cas d'un désordre faible, tel que $k\ell \gg 1$ et nous supposons que les effets de localisation forte ne se manifestent pas.

2.2 Méthode de Langevin

Dans la limite d'une faible non-linéarité, il est logique de supposer que l'intensité moyenne a le même comportement diffusif que dans un milieu linéaire :¹⁵

$$-\frac{\ell}{3} \nabla^2 \langle I(\mathbf{r}) \rangle = P(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

où $\langle I(\mathbf{r}) \rangle$ ne dépend pas du temps car la source $P(\mathbf{r})$ est stationnaire. On peut effectivement démontrer cela rigoureusement et on peut même montrer que le libre parcours moyen ℓ de l'onde peut être pris égal à sa valeur dans un milieu linéaire, si

$$(\Delta n)^2 k\ell \ll 1, \quad (2.3)$$

¹⁴Dans certains matériaux (tels que les cristaux liquides nématiques, par exemple) la non-linéarité peut être très forte et la partie non linéaire de l'indice de réfraction peut atteindre des valeurs de l'ordre de 0,1 pour les intensités tout à fait réalistes [32].

¹⁵Nous ne considérons que le cas d'une diffusion isotrope : $\ell^* = \ell$.

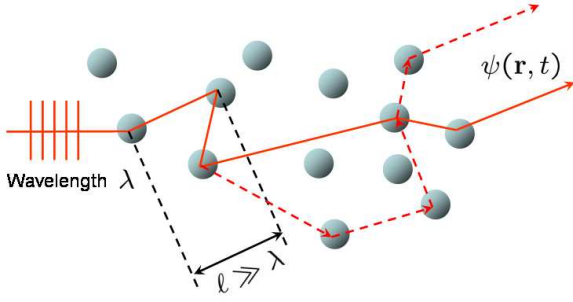


FIG. 2.1 – Représentation schématique de la propagation d'une onde dans un milieu désordonné et non linéaire. Contrairement au cas d'un milieu linéaire, les différents chemins ne sont plus indépendants : le chemin pointillé modifie la constante diélectrique ressentie par le chemin représenté par une ligne pleine et réciproquement.

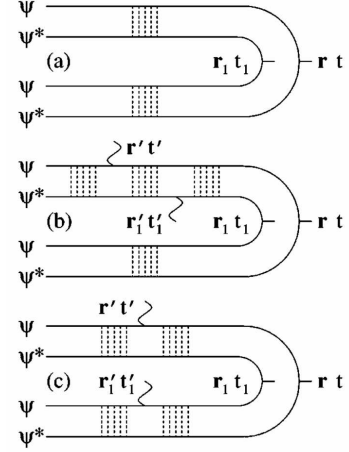


FIG. 2.2 – Le diagramme (a) donne la corrélation des sources de Langevin $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$. Les lignes pleines dénotent le champ ψ et le champ conjugué ψ^* . Les lignes pointillées symbolisent les diffusions de ψ et ψ^* par les mêmes hétérogénéités. Les diagrammes (b) et (c) sont obtenus par différentiation fonctionnelle du diagramme (a) et ils contribuent à la fonction de corrélation de fonctions de réponse $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')$. Les lignes ondulées correspondent aux facteurs k^2 .

où $\Delta n = n_2 \langle I(\mathbf{r}) \rangle$ est la valeur typique de la partie non linéaire de l'indice de réfraction $n(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}) + \varepsilon_2 I(\mathbf{r}, t)} \simeq n_0(\mathbf{r}) + n_2 I(\mathbf{r}, t)$ dans le milieu. Nous constatons donc que dans la limite d'un faible désordre, définie par l'Éq. (2.3), l'intensité moyenne n'est pas affectée par la non-linéarité.

Considérons maintenant les fluctuations de l'intensité $\delta I(\mathbf{r}, t) = I(\mathbf{r}, t) - \langle I(\mathbf{r}) \rangle$. Ces fluctuations sont caractérisées par une corrélation de courte portée C_1 qui, si la condition (2.3) est vérifiée, reste identique à celle dans un milieu linéaire, et par une corrélation de longue portée C_2 . Dans un milieu linéaire, cette dernière peut être calculée par la méthode de Langevin que nous avons introduite dans la Sect. 1.4. Nous allons maintenant généraliser la méthode de Langevin aux milieux non linéaires. Cela nous permettra de décrire le mécanisme de rétroaction qui s'établit entre les sources de Langevin $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ et les fluctuations de l'intensité dans un milieu non linéaire. Établissons d'abord un lien entre une variation infinitésimale de la constante diélectrique du milieu $\Delta \varepsilon(\mathbf{r}, t)$ et la variation $\Delta \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ des courants de Langevin que $\Delta \varepsilon(\mathbf{r}, t)$ provoque. De façon très générale, on peut écrire

$$\Delta \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3 \mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \Delta \varepsilon(\mathbf{r}', t'). \quad (2.4)$$

Cette équation exprime tout simplement le fait qu'une variation de la constante diélec-

trique dans un endroit donné $\mathbf{r}'$ à l'instant t' peut, en principe, provoquer un changement de l'intensité $I(\mathbf{r}, t)$, et donc des courants $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$, dans un autre endroit $\mathbf{r}$ à l'instant t postérieur à t' . Les « fonctions de réponse » $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \delta \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) / \delta \epsilon(\mathbf{r}', t')$ sont aléatoires. Leurs moyennes s'annulent et leurs corrélations $\langle q^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Delta t) q^{(j)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \Delta t_1) \rangle$ sont données par les diagrammes (b) et (c) de la Fig. 2.2. Ces diagrammes sont obtenus par différentiation fonctionnelle de l'Éq. (1.12).

Nous remarquons maintenant que la partie linéaire de la constante diélectrique $1 + \delta \epsilon(\mathbf{r})$ ne varie pas, car le désordre est supposé statique, et elle ne contribue donc pas à $\Delta \epsilon$ dans l'Éq. (2.4). Par contre, la partie non linéaire $\epsilon_2 I(\mathbf{r}, t)$ de la constante diélectrique peut varier et c'est elle qu'il faut mettre dans l'Éq. (2.4) à la place de ϵ . Finalement, en supposant que les variations $\Delta \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ et $\Delta \epsilon(\mathbf{r}', t')$ se produisent pendant un intervalle de temps $\delta t \rightarrow 0$ et en divisant l'Éq. (2.4) par δt , on obtient une équation dynamique pour $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_2 \int_V d^3 \mathbf{r}' \int_0^\infty d\Delta t \mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Delta t) \frac{\partial}{\partial t} \delta I(\mathbf{r}', t - \Delta t). \quad (2.5)$$

Les équations (1.11) et (2.5) sont des équations auto-cohérentes. La première équation décrit l'évolution des fluctuations de l'intensité dues aux courants de Langevin, tandis que la deuxième équation décrit le mécanisme de rétroaction qui modifie les courants de Langevin en fonction des fluctuations de l'intensité.

2.3 Analyse de stabilité

En l'absence de non-linéarité ($\epsilon_2 = 0$), l'équation d'onde (2.1) a une solution stationnaire $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t)$. Cette solution est unique et stable par rapport aux faibles perturbations externes. Cela correspond à une figure de tavelures statiques $I(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$. Étudions maintenant la stabilité d'une solution stationnaire $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t)$ et de la figure de tavelures statiques $I(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ dans un milieu non linéaire, où la non-linéarité est faible dans le sens de l'Éq. (2.3). Nous considérons une excitation infinitésimale $\delta I(\mathbf{r}, t) = \delta I(\mathbf{r}, \nu) \exp(i\nu t)$ de $I(\mathbf{r})$ dans un milieu de taille L .¹⁶ Après substitution de cette expression et d'une expression similaire pour $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ dans les Éqs. (1.11) et (2.5), on obtient une équation qui lie la fréquence complexe $\nu = \Omega - i\Lambda$ de l'excitation et le *paramètre de bifurcation* $p = (\Delta n)^2 (L/\ell)^3$. Cette équation est trop longue et complexe pour être présentée ici ; en plus, elle ne peut être résolue que numériquement. Nous présentons la surface $p(\Omega, \Lambda)$ décrite par cette équation sur la Fig. 2.3. Si l'exposant de Lyapunov Λ correspondant à la fréquence Ω de l'excitation est négatif, l'amplitude d'une telle excitation décroît exponentiellement en temps et l'excitation disparaît. Par contre, si $\Lambda > 0$, l'amplitude de l'excitation croît exponentiellement. Cela est un signe d'une instabilité de la figure de tavelures stationnaires par rapport aux faibles excitations périodiques.

Il se trouve que pour p inférieur à une valeur critique p_c de l'ordre de 1, les exposants

¹⁶À partir d'ici, notre analyse est plutôt qualitative et ne prend pas en compte la forme exacte du milieu (une sphère, un cube, etc.).

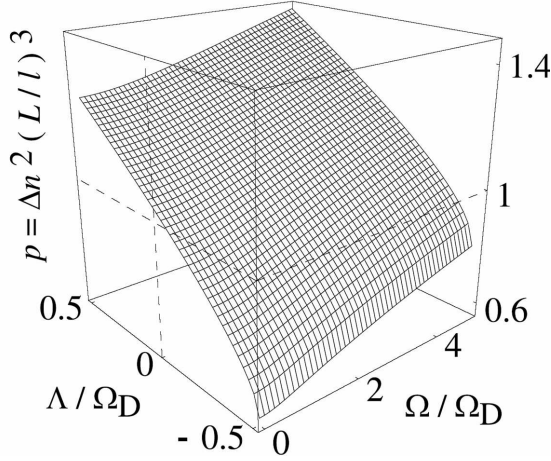


FIG. 2.3 – La surface qui décrit la stabilité de la figure de tavelures dans un milieu désordonné et non linéaire de taille L . La fréquence d'excitation Ω et l'exposant de Lyapunov Λ sont donnés en unités de $\Omega_D = D/L^2$. Pour une valeur donnée du paramètre de bifurcation p la surface définit Λ en fonction de Ω . Si $\Lambda > 0$, la figure de tavelures stationnaires est instable par rapport aux excitations périodiques de fréquence Ω .

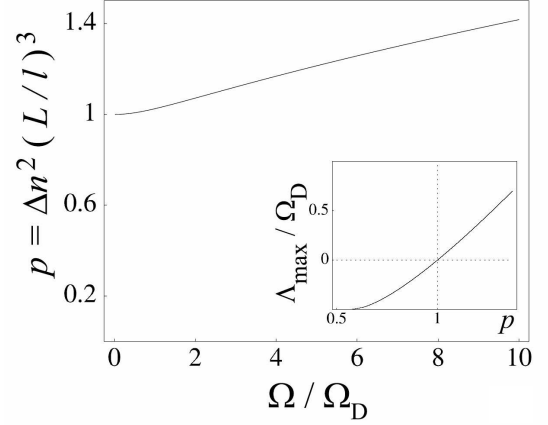


FIG. 2.4 – Le « diagramme de phase » de la figure de tavelures dans un milieu désordonné et non linéaire de taille L . La figure de tavelures est instable par rapport aux excitations de fréquence Ω lorsque le paramètre de bifurcation p est supérieur à une valeur critique de l'ordre de 1 montrée sur la figure. L'encadré montre la valeur maximale de l'exposant de Lyapunov en fonction de p .

de Lyapunov Λ sont négatifs pour *toutes* fréquences Ω .¹⁷ Cela veut dire que toute excitation de la figure de tavelures stationnaires, quelle que soit sa fréquence, est atténuée exponentiellement au cours du temps. Par conséquent, les tavelures sont stables par rapport aux faibles perturbations, lorsque $p < 1$. Par contre, pour $p > 1$ un intervalle de fréquences $0 < \Omega < \Omega_{\max}$ (un « intervalle d'instabilité ») s'ouvre. $\Lambda > 0$ dans cet intervalle de fréquences. La figure de tavelures devient instable par rapport aux faibles perturbations dynamiques dont les fréquences appartiennent à l'intervalle d'instabilité.

2.4 Quelques commentaires

L'instabilité de la figure de tavelures au-delà d'un certain seuil de non-linéarité est le résultat central de ce chapitre. Dans une expérience, l'instabilité doit se manifester par des fluctuations *spontanées* de la figure de tavelures. Ces dernières n'ont pas encore été observées expérimentalement, bien qu'une première indication de leur existence vienne de paraître [36]. Nous présentons ici quelques commentaires qui clarifient notre résultat théorique est montrent les problèmes qu'il pose :

¹⁷La valeur exacte de p_c ne peut pas être déterminée à partir de notre analyse et, de toute façon, elle n'est pas universelle, mais varie en fonction de la géométrie de l'échantillon et de la source d'ondes. Dans ce mémoire, on pose $p_c = 1$ pour simplifier la discussion qualitative du phénomène d'instabilité.

- Le seuil d'instabilité $p \simeq 1$ est *extensif*. Autrement dit, il peut être atteint même pour une non-linéarité arbitrairement faible ($\Delta n \rightarrow 0$), si la taille du milieu est suffisamment grande ($L \rightarrow \infty$). Dans un milieu désordonné réel, l'absorption doit être prise en compte et la taille du milieu L doit être remplacée par la longueur d'absorption L_a dans la définition de p , lorsque L_a est inférieure à L .
- La croissance exponentielle et illimitée de l'amplitude d'une excitation de la figure de tavelures, que l'on trouve pour $\Lambda > 0$, est une conséquence de la linéarité des Éqs. (1.11) et (2.5). Ces équations ne s'appliquent que lorsque l'amplitude de l'excitation $\delta I(\mathbf{r}, t)$ reste faible. Par conséquent, bien que notre analyse soit suffisante pour démontrer l'existence de l'instabilité, elle ne permet pas une caractérisation complète de la dynamique des figures de tavelures au-delà du seuil d'instabilité.
- Le seuil d'instabilité croît avec la fréquence d'excitation Ω (cf. Fig. 2.4). Par conséquent, lorsque l'on augmente l'intensité de l'onde incidente (et donc lorsque l'on augmente p), l'instabilité apparaîtra d'abord pour les excitations de basses fréquences ($\Omega \rightarrow 0$) et ensuite pour les excitations de fréquences de plus en plus élevées. Comme la composition spectrale des fluctuations spontanées de tavelures au-delà du seuil est limitée aux fréquences Ω dans l'intervalle d'instabilité (c'est-à-dire aux fréquences Ω pour lesquelles $\Lambda > 0$), on en conclut que le spectre des fluctuations doit s'élargir et les fluctuations doivent s'accélérer lorsque p augmente.
- Pour p supérieur à 1, le spectre de fréquences pour lesquelles $\Lambda > 0$ (l'intervalle d'instabilité) est continu et il s'étend jusqu'aux fréquences infiniment basses. Cela laisse supposer que les fluctuations de la figure de tavelures sont *chaotiques* au-delà du seuil d'instabilité.
- Une analyse détaillée de la surface $p(\Omega, \Lambda)$ présentée sur la Fig. 2.3 permet d'obtenir une estimation du temps caractéristique le plus court des fluctuations spontanées des tavelures : $\tau \sim 1/\Omega_D \sqrt{p-1}$ pour $p-1 \ll 1$. Dans un milieu avec une réponse non linéaire non instantanée, τ ne peut pas être plus court que le temps de réponse non linéaire τ_{NL} , et la courbe $p(\Omega)$ de la Fig. 2.4 croît plus vite avec Ω . En même temps, le seuil d'instabilité « absolu » $p \simeq 1$ n'est pas affecté par le retard de la réponse non linéaire car il est atteint pour $\Omega \rightarrow 0 \ll 1/\tau_{\text{NL}}$, quel que soit τ_{NL} .
- On ne connaît absolument rien sur l'amplitude des fluctuations spontanées au-delà du seuil. Notre approche actuelle ne nous permet pas de calculer cette amplitude. Si elle s'avérait être très faible, le phénomène d'instabilité serait difficile à observer.

Chapitre 3

Propagation d'impulsions courtes en milieux fortement désordonnés

Ce chapitre est basé sur les publications suivantes :

- S.E. Skipetrov et B.A. van Tiggelen, « Dynamics of weakly localized waves », *Phys. Rev. Lett.* **92**, 113901 (2004).
- S.E. Skipetrov, « Enhanced mesoscopic corrélations in dynamic speckle patterns », *Phys. Rev. Lett.* **93**, 233901 (2004).
- S.E. Skipetrov et B.A. van Tiggelen, « Weak localization of short pulses in disordered waveguides », *Acta Physica Polonica A* **109**, 101 (2006).
- S.E. Skipetrov et B.A. van Tiggelen, « Dynamics of Anderson localization in open 3D media », *Phys. Rev. Lett.* **96**, 043902 (2006).

3.1 Théorie de transport et approximation de diffusion

Dans un milieu désordonné linéaire et solide, où les centres de diffusion sont immobiles, la figure de tavelures n'évolue en temps que si la source d'ondes n'est pas monochromatique. Le cas le plus simple et, en même temps important, est le cas d'une source impulsionnelle. La propagation d'une courte impulsion dans un milieu désordonné est décrite par l'équation d'onde suivante :

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ [1 + \delta\varepsilon(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}, t) \} = s(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t), \quad (3.1)$$

où $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ représente le désordre statique, ω_0 est la fréquence centrale de l'impulsion, et $s(\mathbf{r}, t)$ décrit l'enveloppe de l'impulsion. Pour une impulsion suffisamment courte, mais toujours plus longue que la période $2\pi/\omega_0$ de l'onde, et si le désordre est faible ($k\ell \gg 1$), on peut réduire l'Éq. (3.1) à une équation de diffusion pour l'intensité moyenne $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle$ [4] :¹⁸

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle - D_B \nabla^2 \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = P(\mathbf{r}) \delta(t), \quad (3.2)$$

¹⁸Plus précisément, $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$ décrit la densité d'énergie dans le milieu. Nous allons l'appeler « intensité » dans le cadre de ce mémoire, mais il faut bien se rappeler que sa définition n'est pas identique à la définition de l'intensité dans un milieu homogène.

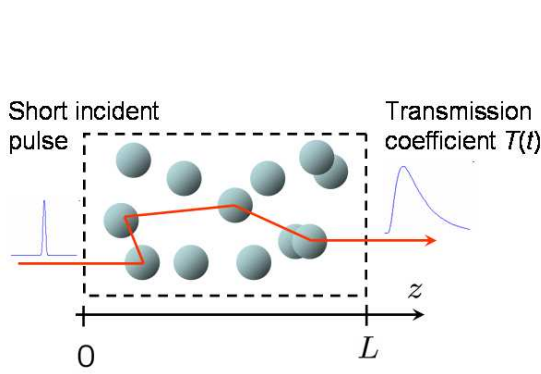


FIG. 3.1 – Schéma de l'expérience de transmission d'une impulsion courte à travers un milieu désordonné d'épaisseur L . L'impulsion est multiplesment diffusée dans le milieu et le coefficient de transmission dépendant du temps $T(t)$ est mesuré.

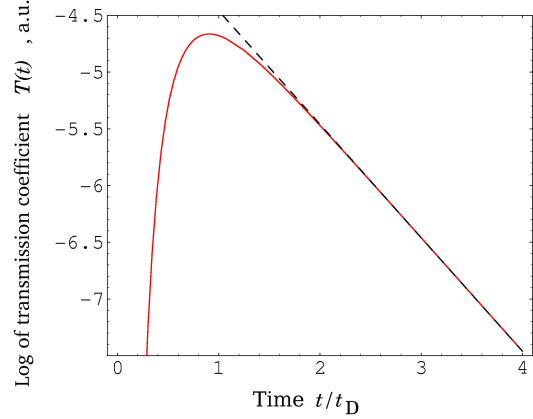


FIG. 3.2 – Coefficient de transmission $T(t)$ correspondant à l'expérience de la Fig. 3.1 calculé dans l'approximation de diffusion (trait continu). Pour les temps longs $t \gg t_D = (L + 2z_0)^2/\pi^2 D_B$ on trouve $T(t) \sim \exp(-t/t_D)$ (tirés). Ici $z_0 \sim \ell$ est la longueur d'extrapolation.

où $D_B = c\ell/3$ est le coefficient de diffusion de la lumière (avec «B» pour Boltzmann).¹⁹ Les conditions aux limites pour $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$ sont déterminées à partir de la condition d'annulation de l'intensité diffusée entrant dans le milieu :

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle + z_0 (\mathbf{n} \cdot \nabla) \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad (3.3)$$

où $z_0 \sim \ell$ permet de décrire les réflexions internes dues au contraste d'indice de réfraction entre le milieu désordonné et le milieu extérieur ($z_0 = \frac{2}{3}\ell$ en l'absence de contraste) et $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire normal en chaque point du bord A du milieu désordonné.

L'équation (3.2) est facile à résoudre dès que la source $P(\mathbf{r})$ est spécifiée. Pour la transmission d'une onde plane à travers une plaque désordonnée d'épaisseur L (cf. Fig. 3.1) on pose $P(\mathbf{r}) = \delta(z - \ell)$ et on trouve le coefficient de transmission dépendant du temps :

$$\begin{aligned} T(t) &= -D_B \frac{\partial}{\partial z} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle|_{z=L} = \\ &= \frac{2\pi D_B}{(L + 2z_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \sin\left(\frac{n\pi\ell}{L + 2z_0}\right) \exp\left(-n^2 \frac{t}{t_D}\right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec $t_D = (L + 2z_0)^2/\pi^2 D_B$. Ce résultat est illustré sur la Fig. 3.2 et il nous servira de référence dans les sections suivantes de ce chapitre.

Une courbe $T(t)$ mesurée expérimentalement permet de déterminer le coefficient de diffusion D_B . Au lieu d'accorder $T(t)$ avec l'Éq. (3.4), on peut également profiter du fait

¹⁹Tout comme dans le Chap. 2, nous nous limitons au cas d'une diffusion isotrope.

que $T(t) \sim \exp(-t/t_D)$ pour les temps longs, et donc

$$D_B = -\frac{(L + 2z_0)^2}{\pi^2} \frac{d}{dt} \ln T(t) \quad (3.5)$$

pour $t \gg t_D$.

Une analyse très similaire peut être réalisée pour le coefficient de réflexion $R(t)$. Pour la réflexion d'un milieu semi-infini on obtient $R(t) \sim 1/t^{3/2}$.

3.2 Théorie auto-cohérente de la localisation

Dans la section précédente nous nous sommes servis de l'approximation de diffusion pour étudier la transmission d'une courte impulsion à travers un milieu désordonné. Cette même approximation a été largement utilisée dans les Chaps. 1 et 2 de ce mémoire, et cela peut donner l'impression de son « universalité » et de sa validité dans toutes circonstances. Toutefois, on peut facilement identifier des processus qui ne sont pas pris en compte dans l'approximation de diffusion. Si l'on représente le champ d'une onde dans un milieu désordonné sous forme d'une somme des champs correspondant à différentes ondes partielles dont chacune suit son propre chemin, l'intensité (qui, elle, est égale au carré du champ) sera représentée par une somme double de toute les paires de chemins possibles. Dans l'approximation de diffusion, on ne retient que les paires composés de deux chemins identiques (les diagrammes en échelle ou les « ladder diagrams » en anglais), cf. Fig. 3.3(a). En même temps, il peut y avoir des chemins qui ne diffèrent que par une « boucle » qu'ils parcourent en sens opposés (les diagrammes croisés ou les « maximally crossed diagrams » en anglais), cf. Fig. 3.3(b). C'est ce type de processus qui donnent la correction la plus importante (la correction dite de « localisation faible ») à l'approximation de diffusion. Plus formellement, le diagramme qui décrit la localisation faible est présenté sur la Fig. 3.4(a). Les effets décrits par ce diagramme ne sont pas négligeables lorsque le nombre de Thouless $\delta = \delta\omega/\Delta\omega$ ou le produit $k\ell$ sont de l'ordre de un. Ici $\delta\omega$ est la largeur typique d'un quasi-mode et $\Delta\omega$ est l'espacement entre les quasi-modes dans le milieu. $\Delta\omega \sim 1/\rho V$ (avec ρ la densité d'états moyenne est V le volume de l'échantillon) est l'inverse du temps t_H , appelé le temps de Heisenberg, qu'il faut pour que l'onde visite tout l'échantillon, et $\delta\omega$ est l'inverse du temps de vie d'un quasi-mode typique. $\delta\omega \neq 0$ pour un milieu désordonné *ouvert* parce que les ondes peuvent s'échapper du milieu. Pour un guide d'ondes désordonné, par exemple, $\delta \simeq g = k^2 A \ell / 3\pi L$, où g est la conductance sans dimension, L est la longueur et A est la section transverse du guide. La condition $\delta < 1$ (le critère de Thouless) peut donc être satisfaite même pour un désordre faible, $k\ell \gg 1$, si L est suffisamment grand. Par contre, dans un milieu tridimensionnel de taille $L \gg \ell$ (une sphère, un cube, ou bien une tranche) δ ne peut être inférieur à 1 que pour $k\ell < 1$ (le critère de Ioffe-Regel). Si $k\ell > 1$, $\delta\omega = 1/t_D \sim D_B/L^2$ et $\delta \gg 1$.

Lorsque $k\ell$ ou δ deviennent inférieurs à 1, on entre dans un nouveau régime de propagation. On l'appelle la « localisation forte » ou la « localisation de Anderson » : les effets d'interférences dus aux paires de chemins dessinés sur la Fig. 3.3(b) deviennent dominants et l'approximation de diffusion cesse d'être valable [13, 39]. En même temps, prendre en compte le diagramme de la Fig. 3.4(a) n'est plus suffisant dans ce régime et il faut aussi

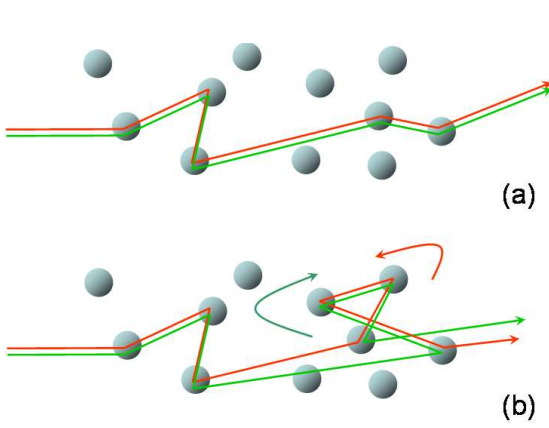


FIG. 3.3 – (a) Paires de chemins que l'on prend en compte dans l'approximation de diffusion (3.2) pour l'intensité moyenne. Les deux chemins doivent être identiques pour contribuer à l'Éq. (3.2). (b) Les chemins qui donnent la première correction à l'approximation de diffusion (la correction dite de « localisation faible »). Les deux chemins sont identiques partout, excepté une « boucle » qu'ils décrivent dans des sens opposés.

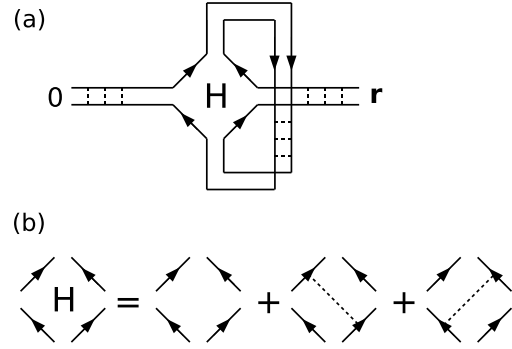


FIG. 3.4 – (a) Le diagramme qui donne la correction de localisation faible à l'intensité moyenne $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$ pour une source d'ondes à l'origine. Les lignes pleines correspondent aux fonctions de Green moyennes G (celles avec les flèches vers $\mathbf{r}$) et les fonctions de Green conjuguées G^* (celles avec les flèches dans le sens opposé). Les lignes pointillées dénotent les fonctions de corrélation de la constante diélectrique. (b) La « boîte de Hikami » [37, 38] utilisée dans la figure (a).

tenir compte des diagrammes contenant plusieurs boîtes de Hikami dont une est détaillée sur la Fig. 3.4(b). La sommation de la série diagrammatique qui en résulte a été effectuée par Vollhardt et Wölfle dans les années 1980 et le résultat est connu sous le nom de « théorie auto-cohérente de la localisation » [40, 41]. Dans sa forme initiale, cette théorie ne tient pas correctement compte de la taille finie du milieu et des conditions aux limites. Van Tiggelen et coll. [42] ont généralisé la théorie de Vollhardt et Wölfle en incluant un traitement auto-cohérent des bords du milieu. Leur résultat final peut être présenté sous forme d'une équation de diffusion,

$$[-i\Omega - \nabla \cdot \mathcal{D}(\mathbf{r}, \Omega) \nabla] C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.6)$$

pour la fonction de Green de l'intensité $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$, complétée par une équation auto-cohérente pour le coefficient de diffusion $\mathcal{D}(\mathbf{r}, \Omega)$:

$$\frac{1}{\mathcal{D}(\mathbf{r}, \Omega)} = \frac{1}{D_B} + \frac{12\pi}{k^2 \ell} C(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega). \quad (3.7)$$

L'intensité moyenne $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$ due à une source d'ondes au point $\mathbf{r}'$ est obtenue par une transformée de Fourier de $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$. Les équations (3.6) et (3.7) doivent être résolues avec la condition $C + z_0[\mathcal{D}(\mathbf{r}, \Omega)/D_B](\mathbf{n} \cdot \nabla C) = 0$ aux bords du milieu désordonné.

Une particularité très importante des Éqs. (3.6) et (3.7) est la variation *spatiale* du coefficient de diffusion $\mathcal{D}(\mathbf{r}, \Omega)$. La nécessité d'introduire $\mathcal{D}$ dépendant de $\mathbf{r}$ apparaît naturellement lorsque l'on dérive ces équations. Nous considérons la dépendance de $\mathcal{D}$ en $\mathbf{r}$ essentielle pour garder le caractère auto-cohérent de la théorie. Une autre version de la théorie auto-cohérente a été présentée par Cheung et coll. [43, 44]. Cette version évite de travailler avec $\mathcal{D}$ dépendant de $\mathbf{r}$ en le remplaçant par sa moyenne spatiale. Bien que cela apporte des simplifications évidentes dans l'analyse mathématique du problème, nous insistons ici sur le fait que la variation spatiale de $\mathcal{D}$ est essentielle pour l'auto-cohérence de la théorie et pour son applicabilité dans le régime de localisation forte.

3.3 Localisation d'ondes dans un guide d'ondes désordonné

Un guide d'ondes désordonné — un tuyau de longueur L et de section transverse $A = W_x W_y$ avec $W_{x,y} < \ell$ — est une géométrie expérimentale importante parce qu'elle correspond à un fil conducteur désordonné. Dans ce système, le régime de localisation forte peut être atteint en augmentant la longueur L du guide jusqu'à ce que $g = k^2 A \ell / 3\pi L$ deviennent inférieur à 1, et cela pour un milieu faiblement désordonné ($k\ell \gg 1$). Les expériences de transmission de courtes impulsions à travers un tel guide d'ondes ont été effectuées par A. Chabanov et coll., qui ont observé des déviations de $T(t)$ de l'Éq. (3.4) pour $g \sim 5-10$ [45]. Pour rendre ces déviations plus évidentes, ils ont choisi de calculer le coefficient de diffusion dépendant du temps,

$$D(t) = -\frac{(L + 2z_0)^2}{\pi^2} \frac{d}{dt} \ln T(t), \quad (3.8)$$

qu'ils ont défini par analogie avec l'Éq. (3.5). Si l'approximation de diffusion s'appliquait dans cette expérience, on aurait trouvé $D(t)$ convergeant vers une valeur constante $D = D_B$ pour $t > t_D$. En fait, l'expérience a donné $D(t)$ décroissant avec t pour $t > t_D$. L'approche auto-cohérente présentée dans la Sect. 3.2 nous permet d'interpréter ce résultat comme une manifestation des effets de localisation. La résolution des Éqs. (3.6) et (3.7) pour les paramètres expérimentaux nous a permis d'obtenir des régressions des données (cf. Fig. 3.5).

Sur la Fig. 3.5, on observe clairement que $D(t)$ décroît au cours du temps et que cette décroissance est bien décrite par la théorie. Pour $g \gg 1$, les Éqs. (3.6) et (3.7) peuvent aussi être traitées analytiquement par la méthode de perturbations. Pour $t > t_D$ on obtient

$$\frac{D(t)}{D_B} = 1 + \frac{3}{2\pi^2 g} - \frac{2}{\pi^2 g} \frac{t}{t_D}. \quad (3.9)$$

La décroissance *linéaire* de $D(t)$ avec t est en accord avec la Fig. 3.5. On voit aussi que l'Éq. (3.9) ne peut s'appliquer que pour $t < gt_D \simeq t_H$ (au-delà de t_H l'équation donne des valeurs négatives pour D). Le temps de Heisenberg $t_H \simeq gt_D$ est égal à l'inverse de l'espacement moyen entre les fréquences propres du milieu désordonné. Au-delà de t_H non seulement l'Éq. (3.9) ne s'applique plus, mais aussi les équations de base de la

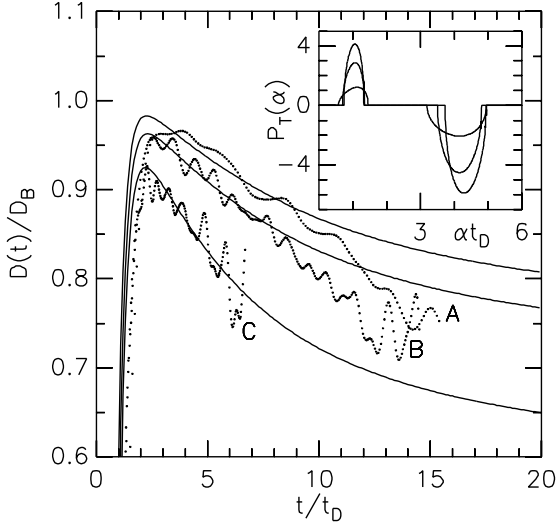


FIG. 3.5 – Données de A. Chabanov et coll. [45] pour le coefficient de diffusion dépendant du temps (points). Les trois courbes correspondent à trois échantillons de longueurs $L = 61$ cm (A), $L = 90$ cm (B) et $L = 183$ cm (C). Les lignes continues sont obtenues en résolvant les Éqs. (3.6) et (3.7) pour $g = 9$ (A), 7.5 (B), et 4 (C). Ces valeurs sont de 14% à 33% plus grandes que les valeurs de g estimées expérimentalement. L'encadré montre la fonction de fuite $P_T(\alpha)$ dont la transformée de Laplace donne $T(t)$.

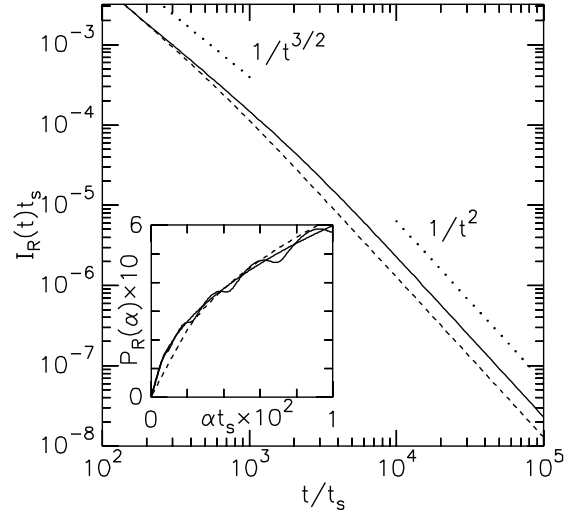


FIG. 3.6 – Coefficient de réflexion d'un guide d'ondes semi-infini. Le nombre de canaux transverses $N = k^2 A / 4\pi = 20$ (trait continu) ou 10 (tirés). Le temps est en unités du temps de libre parcours moyen $t_s = \ell / c$. Pour les temps courts, le coefficient de réflexion suit la loi diffusive $1/t^{3/2}$. Pour les temps longs $t > \xi^2 / D_B$, on trouve la nouvelle loi en $1/t^2$. $\xi = \frac{2}{3} N \ell$ est la longueur de localisation. L'encadré montre la fonction de fuite $P_R(\alpha)$ pour $N = 20$, $L = 100\ell$ (ligne pleine ondulée), $N = 20$, $L \rightarrow \infty$ (ligne pleine), et $N = 10$, $L \rightarrow \infty$ (ligne pointillée).

théorie auto-cohérente [les Éqs. (3.6) et (3.7)] cessent d'être valables. Cette restriction du domaine de validité de la théorie a son origine dans la structure modale du champ ondulatoire dans le milieu. Cette structure n'est pas contenue dans l'équation de diffusion (3.6). Au delà du temps de Heisenberg, le coefficient de transmission $T(t)$ est dominé par un seul quasi-mode — le mode qui a le temps de vie le plus élevé — et il ne peut pas être décrit par la théorie auto-cohérente, qui, elle, ne s'applique que pour $t < t_H$, lorsqu'un nombre important de modes contribuent à $T(t)$.

En analysant les Éqs. (3.6) et (3.7), nous avons trouvé utile d'introduire la notion de « fonction de fuite » $P_T(\alpha)$, dont la transformée de Laplace donne $T(t)$:

$$T(t) = \int_0^\infty d\alpha P_T(\alpha) \exp(-\alpha t). \quad (3.10)$$

Dans l'approximation de diffusion, $P_T(\alpha)$ est une somme de fonctions delta de Dirac $\delta(\alpha - n^2 t / t_D)$, dont les poids relatifs peuvent être déduits de l'Éq. (3.4). Lorsque l'on prend en compte les effets de localisation, ces fonctions delta s'élargissent et se déplacent

(cf. encadré de la Fig. 3.5). Les magnitudes de leurs élargissements et de leurs déplacements sont une mesure de l'importance des effets de localisation.

La restriction de notre approche théorique aux temps inférieurs à t_H ne nous permet pas de traiter le coefficient de transmission d'un guide d'ondes dans le régime de localisation forte $g \simeq t_H/t_D < 1$. Par contre, notre approche théorique doit s'appliquer au problème de réflexion d'une onde par un guide d'ondes semi-infini, car $t_H \rightarrow \infty$ pour ce dernier ($t_H \sim \rho V$ et $V \rightarrow \infty$). Le coefficient de réflexion est présenté sur la Fig. 3.6. Il ne suit la loi diffusive en $1/t^{3/2}$ que pour les temps courts. Une nouvelle loi en $1/t^2$ s'établit pour les temps supérieurs à ξ^2/D_B , où $\xi = \frac{2}{3}N\ell$ est la longueur de localisation. Ce comportement ne sera que faiblement modifié pour un guide d'ondes de taille finie $L \gg \xi$, et on doit pouvoir l'observer dans une expérience. Notons que la même transition $1/t^{3/2} \rightarrow 1/t^2$ en réflexion d'un guide d'ondes désordonné a été obtenue par Titov et Beenakker en utilisant une méthode différente [47]. La loi en $1/t^2$ est aussi connue pour le coefficient de réflexion d'un milieu unidimensionnel [48], où il s'applique tout de suite après le temps de libre parcours moyen ℓ/c (la partie diffusive en $1/t^{3/2}$ n'existe pas en une dimension).

3.4 Corrélations de longue portée dans un guide d'ondes désordonné

Dans la section précédente nous avons étudié l'influence des effets de localisation sur l'intensité *moyenne* $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$ d'une onde dans un guide d'ondes désordonné. Pourtant, les interférences se manifestent aussi dans les fluctuations de l'intensité $\delta I(\mathbf{r}, t) = I(\mathbf{r}, t) - \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$. Pour caractériser ces fluctuations, on considère la fonction de corrélation spatiale de $\delta I(\mathbf{r}, t)$:

$$C(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}, t) = \frac{\langle \delta I(\mathbf{r}, t) \delta I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t) \rangle}{\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle \langle I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t) \rangle}. \quad (3.11)$$

Pour un guide d'ondes désordonné, cette fonction de corrélation a été bien étudiée dans le régime stationnaire, lorsque la source d'ondes ne varie pas en temps et la figure de tavelures $I(\mathbf{r}, t) \equiv I(\mathbf{r})$ est statique [8, 49, 50, 51, 52] (cf. aussi le livre [4] pour un aperçu récent). Comme nous l'avons brièvement discuté dans l'introduction, $C(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}, t)$ est constituée de plusieurs contributions : C_1 est de courte portée, C_2 est de longue portée, et C_3 et C_0 sont de portée infinie. Dans cette section nous allons nous intéresser aux fonctions de corrélation C_1 et C_2 en transmission d'une impulsion courte à travers un guide d'ondes désordonné. Le calcul des fonctions de corrélation peut être effectué en utilisant les méthodes diagrammatiques standards [4, 7] où, alternativement, en employant la méthode de Langevin (cf. Sect. 1.4). Le résultat de calcul est le suivant :

- La fonction de corrélation C_1 reste de courte portée (c'est-à-dire elle tombe rapidement à zéro pour $\Delta r > \lambda$). Cela veut dire que la figure de tavelures dynamiques $I(\mathbf{r}, t)$ est constituée de zones sombres et brillantes de taille $\sim \lambda$, exactement comme la figure de tavelures stationnaires $I(\mathbf{r})$, et que cette structure reste préservée au cours du temps.

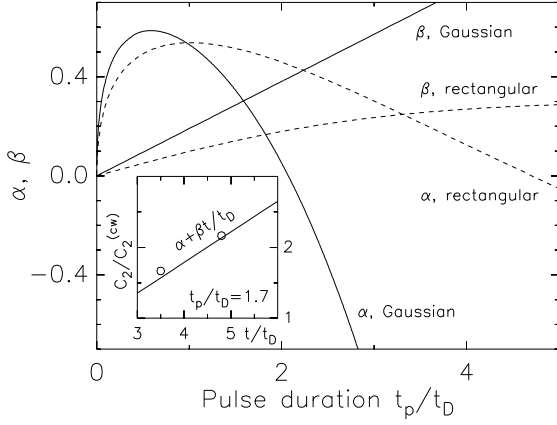


FIG. 3.7 – Paramètres α et β qui donnent la dépendance de la fonction de corrélation $C_2(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}, t)$ en temps [cf. Éq. (3.12)] pour une impulsion courte gaussienne (traits pleins) ou rectangulaire (tirés) transmise à travers un guide d'ondes désordonné de longueur $L \gg \ell$. L'encadré montre la régression des données expérimentales de la Fig. 3.8 (cercles) obtenu en fixant $L = 10\ell$ et la longueur d'absorption $L_a = L/3$ (valeurs expérimentales), et en ajustant la durée de l'impulsion $t_p = 1.7t_D$.

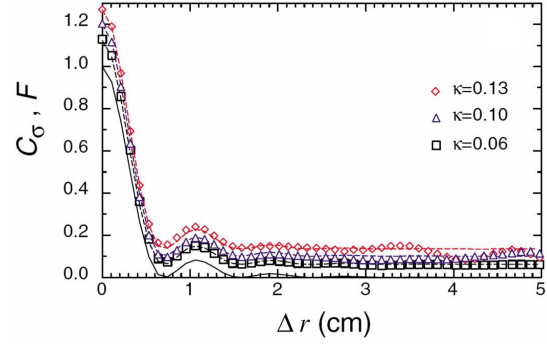


FIG. 3.8 – Données expérimentales de A. Chabanov et coll. [53]. Les fonctions de corrélation spatiales $C_1^{(cw)}(\Delta\mathbf{r})$ (ligne pleine) et $C_2(\Delta\mathbf{r}, t)$ (symboles) sont mesurées pour la figure de tavelures en transmission d'une micro onde (fréquence $\nu \approx 15$ GHz, durée de l'impulsion $t_p \sim t_D$) à travers un guide d'ondes désordonné d'une longueur $L = 100$ cm. Les trois courbes pour différentes valeurs de κ correspondent aux temps t de plus en plus longs. On observe clairement que la corrélation C_2 croît lorsque κ (ou t) augmente.

- La fonction de corrélation C_2 reste de longue portée, mais sa magnitude croît *linéairement* avec le temps t :

$$C_2(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}, t) = C_2^{(cw)}(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}) \left(\alpha + \beta \frac{t}{t_D} \right), \quad (3.12)$$

où $C_2^{(cw)}(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r})$ est la corrélation pour une source monochromatique (« continuous wave » ou « cw » source en anglais), et les paramètres α et β sont fonctions de la forme de l'impulsion incidente, de sa durée et, pour α , de la longueur L du guide d'ondes. L'équation (3.12) ne s'applique que pour $t > t_D$ et, pour les raisons déjà évoquées dans la Sect. 3.3, pour $t < t_H$.

Ces résultats sont illustrés sur la Fig. 3.7, où nous traçons α et β en fonction de la durée de l'impulsion incidente t_p . L'encadré de la Fig. 3.7 montre que notre approche théorique permet de décrire et de comprendre les données expérimentales (cf. Fig. 3.8).

L'étude des corrélations C_1 et C_2 en fonction du temps que nous venons d'effectuer nous permet d'établir une image qualitative de la figure de tavelures dynamiques en transmission d'une impulsion courte à travers un guide d'ondes désordonné. Pour les temps courts ($t \sim t_D$), la figure de tavelures dynamiques ressemble beaucoup à la figure de tavelures stationnaires : elle est constituée de zones sombres et brillantes de taille $\sim \lambda$,

et les zones distantes ne possèdent qu'une faible corrélation $C_2 \sim 1/g \ll 1$. Lorsque le temps passe ($t > t_D$), les zones distantes de la figure de tavelures deviennent de plus en plus corrélées, la corrélation croît linéairement et devient de l'ordre de 1 pour $t \sim t_H$. Pour les temps supérieurs au temps de Heisenberg t_H notre approche perturbative n'est plus valable et nous ne pouvons rien dire de définitif concernant la figure de tavelures dans ce régime, à part, peut-être, qu'elle doit nécessairement être très différente de celle que l'on observe dans le régime stationnaire ou dans le régime dynamique pour $t \sim t_D$.

3.5 Localisation d'ondes dans un milieu désordonné tridimensionnel

Dans les Sects. 3.3 et 3.4 nous avons considéré les effets de localisation dans un guide d'ondes désordonné. Bien que ce soit un sujet très riche et important, nous rappelons que dans un guide d'ondes le régime de localisation forte peut être atteint même pour un désordre faible ($k\ell \gg 1$), simplement en augmentant la longueur L du guide. La situation est très différente dans un milieu « vraiment » tridimensionnel, comme une plaque d'épaisseur L largement supérieure à ℓ et d'extension latérale W infinie ou très grande. Le temps de Heisenberg $t_H \sim \rho V$ diverge pour un tel milieu. Il est donc impossible de satisfaire le critère de Thouless $\delta = t_H/t_D < 1$ pour un désordre faible, et la seule façon d'atteindre le régime de localisation forte est d'utiliser un milieu très fortement diffusant, où le critère de Ioffe-Regel $k\ell < 1$ est vérifié.

Motivés par le succès du modèle auto-cohérent de localisation pour un guide d'ondes désordonné (cf. Sect. 3.3), nous allons maintenant appliquer ce même modèle pour étudier la transmission d'impulsions courtes à travers une plaque désordonnée tridimensionnelle. Comme en pratique la condition $k\ell < 1$ est extrêmement difficile à satisfaire, nous allons d'abord voir si les effets de localisation produisent des changements observables dans la dépendance temporelle du coefficient de transmission $T(t)$ pour $k\ell$ petit, mais toujours supérieur à 1. Cela correspond, par exemple, aux conditions des expériences récentes menées dans l'équipe de Ad Lagendijk [54]. Nos résultats pour le coefficient de diffusion dépendant du temps,

$$D(t) = -\frac{(L + 2z_0)^2}{\pi^2} \frac{d}{dt} \ln T(t), \quad (3.13)$$

sont présentés sur la Fig. 3.9 (traits pleins). Pour $t > t_D$ le problème peut aussi être traité analytiquement par perturbation. Cela donne

$$\frac{D(t)}{D_B} \simeq 1 - \frac{1}{(k\ell)^2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\ell}{L} \left(7.25 - 4 \ln \frac{L}{\ell} \right) \right] - \frac{1}{(k\ell)^2} \frac{3}{2} \frac{\ell}{L} \left[\ln \frac{t}{t_D} - \frac{2.25}{t/t_D} \right]. \quad (3.14)$$

Cette équation est en très bon accord avec la solution numérique (cf. Fig. 3.9).

L'analyse de la Fig. 3.9 et de l'Éq. (3.14) nous conduit à la conclusion suivante. Bien que les effets de localisation diminuent la valeur du coefficient de diffusion D et introduisent une dépendance temporelle de D , cette dernière est extrêmement faible pour $L \gg \ell$ est elle doit être très difficile, voire impossible, à observer. La diminution de la

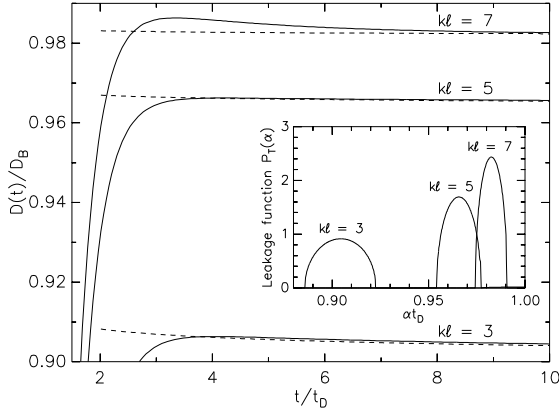


FIG. 3.9 – Coefficient de diffusion en transmission d'une impulsion courte à travers une plaque faiblement désordonnée ($kl > 1$). L'épaisseur de la plaque $L = 100\ell$. Les solutions numériques (traits pleins) sont comparées avec la formule analytique (3.14) (tirés). L'encadré montre les fonctions de fuite $P_T(\alpha)$.

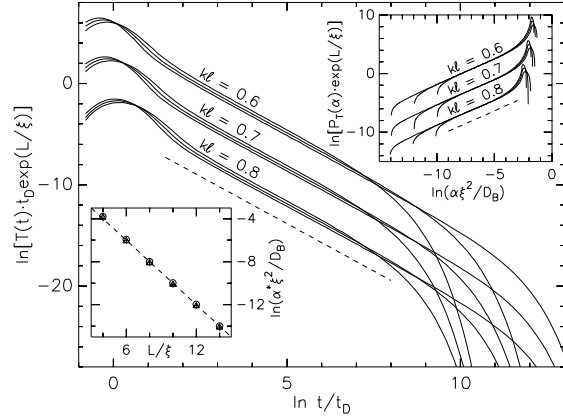


FIG. 3.10 – Coefficient de transmission d'une impulsion courte à travers une plaque fortement désordonnée ($kl < 1$). Pour chacune des trois valeurs de kl , trois courbes correspondant à $L = 10\xi, 12\xi$, et 14ξ sont montrées (avec ξ la longueur de localisation). Les courbes pour $kl = 0,7$ et $0,6$ sont déplacées vers le haut pour clarté. Toutes les courbes suivent l'asymptote $T(t) \sim 1/t^{1+s}$ avec $s \simeq 0,85$ (tirés) pour $t_D < t < 1/\alpha^*$. L'encadré du haut montre les fonctions de fuite $P_T(\alpha)$. L'encadré du bas montre la valeur de $\alpha = \alpha^*$ au-delà de laquelle $P_T(\alpha)$ s'annule.

valeur de D par rapport à D_B ne peut pas non plus être vérifiée facilement car D_B — le coefficient de diffusion avec les effets de localisation « éteints » — n'est pas connu et il n'est pas évident de trouver une façon de le mesurer.²⁰ On en conclut donc que dans des conditions expérimentales réalistes on ne s'attend à *aucune* anomalie importante de $T(t)$ lorsque $kl > 1$, et on doit toujours observer une décroissance exponentielle de $T(t)$ pour $t \gg t_D$. Cette conclusion est en accord avec les expériences de Johnson et coll. [54], qui ont mesuré $T(t)$ pour un échantillon désordonné très fortement diffusant et ont observé une décroissance exponentielle de $T(t)$ avec t , malgré une valeur faible de kl dans leur échantillon ($kl \simeq 4$ selon les estimations des auteurs).

La situation change drastiquement lorsque le seuil de localisation $kl = 1$ est passé. Pour $kl < 1$, un intervalle des temps apparaît où $T(t)$ suit une loi de puissance $T(t) \sim 1/t^{1+s}$ (avec $s \simeq 0,85$) et non pas la loi exponentielle caractéristique du régime diffusif (cf. Fig. 3.10). Lorsque l'on diminue kl , cet intervalle s'étale très rapidement aux temps de plus en plus longs et donne lieu au coefficient de diffusion décroissant selon une loi de puissance

²⁰On peut partiellement supprimer les effets de localisation en brisant la symétrie de renversement du temps par un champ magnétique fort. Toutefois, les efforts de généralisation de la théorie auto-cohérente au cas d'un champ magnétique fort n'ont pas abouti à un résultat satisfaisant [41].

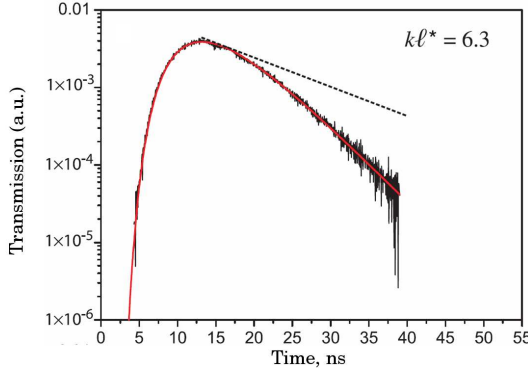


FIG. 3.11 – Coefficient de transmission dépendant du temps $T(t)$ mesuré par M. Störzer et coll. [58] dans le régime diffusif ($kl > 1$). Les données sont parfaitement décrites par l'Éq. (3.4) multipliée par $\exp(-t/\tau_a)$ (ligne continue). La ligne pointillée montre $\exp(-t/\tau_a)$ avec τ_a qui résulte de la régression des données. Pour les temps longs, la décroissance de $T(t)$ est exponentielle.

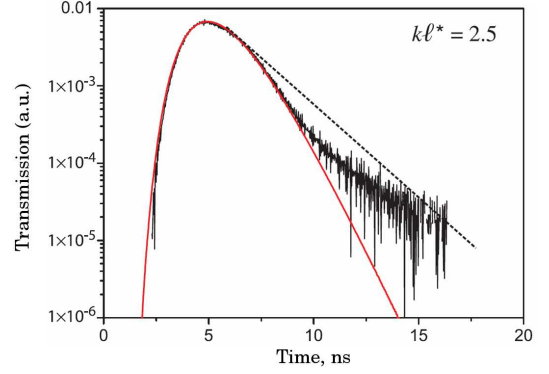


FIG. 3.12 – $T(t)$ pour un désordre plus fort que celui de la Fig. 3.11. La théorie de diffusion (ligne continue) ne suffit plus pour décrire les données. Une décroissance moins rapide de $T(t)$ que celle prévue par l'Éq. (3.4) est observée pour les temps longs. Ce résultat est qualitativement similaire à ce que la théorie auto-cohérente prévoit en régime de localisation forte ($kl < 1$), cf. Fig. 3.10.

en t :

$$\frac{D(t)}{D_B} \simeq \begin{cases} (s+1)\frac{t_D}{t}, & t_D < t < 1/\alpha^*, \\ \alpha^* t_D + (p+1)\frac{t_D}{t}, & t > 1/\alpha^*, \end{cases} \quad (3.15)$$

où $\alpha^* = (D_B/\xi^2) \exp(-L/\xi)$.

Il est important de noter que la décroissance de $D(t)$ en $1/t$ reste valable en présence de l'absorption, sous condition que cette dernière est homogène dans l'échantillon. L'absorption, que nous avons négligée jusqu'ici, peut être facilement introduite dans notre analyse, et elle ne rajoute qu'un facteur $\exp(-t/\tau_a)$ (avec τ_a le temps d'absorption) à nos résultats pour $T(t)$. L'effet d'absorption étant exponentiel, elle ne peut pas induire une dépendance temporelle de D . Cela doit permettre une distinction nette entre les effets de localisation et les effets d'absorption dans les expériences dynamiques — une tâche qui s'est avérée être particulièrement difficile dans les expériences stationnaires [55, 56, 57].

Les déviations de $T(t)$ du comportement diffusif ont été récemment observées par M. Störzer et coll. [58] dans les expériences de transmission d'impulsions optiques à travers les poudres de particules de rutile (TiO_2). L'épaisseur des échantillons L a été de l'ordre de 10^4 – $10^5 \ell$ dans ces expériences. En fonction de la concentration et de la taille de particules, Störzer et coll. observent soit un résultat parfaitement compatible avec l'approximation de diffusion (cf. Fig. 3.11), soit une décroissance moins rapide de $T(t)$ en temps, lorsque le désordre est plus fort (cf. Fig. 3.12). La déviation de $T(t)$ du comportement diffusif observée sur la Fig. 3.12 est très similaire à celle que la théorie auto-cohérente de localisation prédit dans le régime localisé (cf. Fig. 3.10). En même temps, la théorie ne prévoit *aucune* modification importante de la loi exponentielle pour $T(t)$ lorsque $kl > 1$ (régime

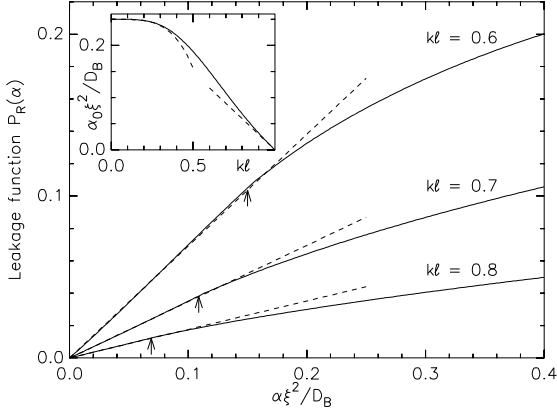


FIG. 3.13 – Fonction de fuite $P_R(\alpha)$ en réflexion d'un milieu désordonné semi-infini dans le régime de localisation forte ($k\ell < 1$). $P_T(\alpha) \sim \alpha$ pour $\alpha < \alpha_0$ (asymptotes pointillées) donne lieu à $R(t) \sim 1/t^2$ pour $t > 1/\alpha_0$. Ce résultat est différent de $R(t) \sim 1/t^{3/2}$ que l'on obtient dans le régime de diffusion ($k\ell > 1$). L'encadré montre la valeur de α_0 en fonction de $k\ell$ (ligne pleine) ainsi que les résultats asymptotiques pour $k\ell \rightarrow 0$ et $k\ell \rightarrow 1$ (lignes pointillées).

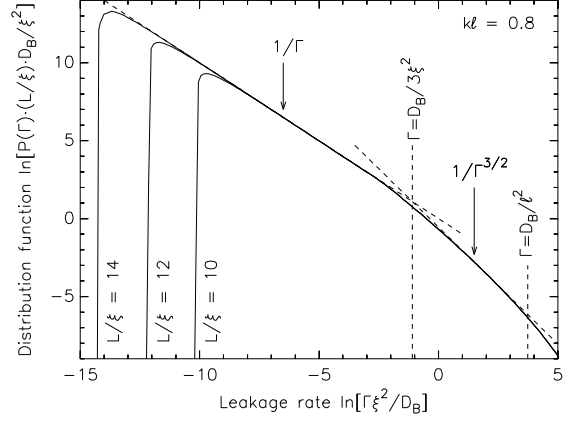


FIG. 3.14 – Distribution statistique des largeurs de résonances Γ ($\Gamma =$ inverse du temps de vie d'un quasi-mode) dans une plaque désordonnée dans le régime localisé (épaisseur de la plaque L , longueur de localisation ξ). La partie $1/\Gamma$ de la distribution correspond aux modes dont les centres de localisation se trouvent plus loin que ξ des bords du milieu. $1/\Gamma^{3/2}$ correspond aux modes centrés à une distance inférieure à ξ des bords. La partie de $P(\Gamma)$ au-delà de $\Gamma \sim D_B/\ell^2$ n'est pas décrite par notre théorie correctement.

de diffusion). On en conclut que dans le cadre de la théorie auto-cohérente de localisation, la seule façon d'interpréter les résultats de la Fig. 3.12 est d'accepter que l'échantillon est dans le régime localisé.

La réflexion d'ondes par une plaque désordonnée peut aussi être traitée dans le cadre de notre approche théorique. Nous présentons la fonction de fuite $P_R(\alpha)$ obtenue pour un milieu semi-infini sur la Fig. 3.13. Le coefficient de réflexion dépendant du temps $R(t)$ est donné par la transformée de Laplace de $P_R(\alpha)$:

$$R(t) = \int_0^\infty d\alpha P_R(\alpha) \exp(-\alpha t). \quad (3.16)$$

Pour $0 < \alpha < \alpha_0$, avec $\alpha_0 \simeq (8D_B/27\xi^2)(1 - k\ell)$ pour $k\ell \rightarrow 1$, le calcul donne $P_R(\alpha) \sim \alpha$ et, après la substitution dans l'Éq. (3.16), $R(t) \sim 1/t^2$. Ce résultat est différent de $R(t) \sim 1/t^{3/2}$ que l'on obtient dans le régime diffusif (cf. Sect. 3.1), et il montre que les effets de localisation ne se limitent pas à la transmission et aux temps extrêmement longs, mais peuvent aussi être observés en réflexion pour les temps de l'ordre de ξ^2/D_B . Cette possibilité peut s'avérer intéressante pour les expériences, car les signaux réfléchis sont plus puissants que les signaux transmis, ces derniers étant exponentiellement faibles dans le régime localisé.

Une autre application intéressante de la théorie auto-cohérente de la localisation est l'étude de la distribution $P(\Gamma)$ des largeurs de résonances Γ dans un milieu désordonné ouvert. Γ est égal à l'inverse du temps de vie d'un quasi-mode et il est différent de zéro à cause du caractère ouvert du milieu. On peut montrer que dans le régime localisé $P(\Gamma) = 2\bar{P}_T(\Gamma)/\Gamma$, où $\bar{P}_T(\alpha)$ est la fonction de fuite moyennée sur la position de la source dans le milieu. Les courbes de $P(\Gamma)$ obtenues à partir de cette formule sont présentées sur la Fig. 3.14. On voit qu'elles ont toutes trois parties essentielles. $P(\Gamma) \sim 1/\Gamma$ pour $\alpha^* < \Gamma < D_B/3\xi^2$ décrit les quasi-modes localisés exponentiellement avec les centres de localisation éloignés de plus que ξ des bords du milieu. La loi en $1/\Gamma$ pour la distribution des largeurs de résonances en régime localisé peut être obtenue en utilisant d'autres méthodes, en particulier, par des simulations numériques directes [59, 60, 61]. Pour les valeurs intermédiaires de Γ , $D_B/3\xi^2 < \Gamma < D_B/\ell^2$, on trouve $P(\Gamma) \sim 1/\Gamma^{3/2}$. Cette loi est caractéristique pour les modes en régime de diffusion [60, 62, 63]. Dans le cas d'un milieu «localisant» ($k\ell < 1$), cette partie de la distribution correspond aux modes centrés à une distance inférieur à ξ des bord du milieu. La proximité des bords détruit le caractère localisé de ces modes et, de fait, ils se comportent comme si l'échantillon était dans le régime diffusif. Finalement, les modes ayant un temps de vie inférieur au temps de libre parcours moyen ($\Gamma > D_B/\ell^2$) ne sont pas correctement décrits par notre théorie.

Il est important de noter que $P(\Gamma)$ de la Fig. 3.14 s'annule pour $\Gamma < \alpha^* = (D_B/\xi^2) \exp(-L/\xi)$. Cela veut dire que le poids statistique des modes ayant un temps de vie supérieur à $1/\alpha^*$ est nul. Toutefois, les calculs dans le cadre de la théorie sigma non linéaire supersymétrique [64, 65, 66], la méthode de la fluctuation optimale [67] et les simulations numériques récentes [60, 68] prédisent $P(\Gamma) \sim \exp(-\ln^d \Gamma t_H)$ (avec $d = 2$ ou 3) pour $\Gamma < 1/t_H$. La comparaison directe de nos résultats avec cette formule est compliquée par le fait que $t_H \rightarrow \infty$ pour la plaque désordonnée que nous considérons. Pourtant, notre compréhension actuelle de ce problème suggère que, très probablement, le comportement de $P(\Gamma)$ dans la limite $\Gamma \rightarrow 0$ est gérée par des phénomènes «non universels», sensibles aux propriétés microscopiques du désordre et non seulement aux libre parcours moyen ℓ [69, 70]. Évidemment, ces phénomènes non universels ne sont pas décrits par les Éqs. (3.6) et (3.7). Par conséquent, il est naturel que l'on trouve $P(\Gamma) = 0$ pour Γ suffisamment petit.

Chapitre 4

Dynamique des figures de tavelures quantiques

Ce chapitre décrit mon projet de recherche dans le domaine de l'optique *quantique* des milieux désordonnés. Malgré le nombre très important de travaux théoriques ainsi qu'expérimentaux portant sur la diffusion multiple de la lumière (cf. Refs. [3, 4, 71] pour les aperçus récents), la plupart de ces travaux traitent la lumière comme une onde classique et négligent sa nature quantique. Quelques travaux théoriques [72, 73, 74, 75, 76, 77] et un travail expérimental [78] sont des exceptions à cette règle, mais ils ne suffisent pas pour avoir une vision complète de l'optique quantique en présence de désordre. De plus, aucun des travaux cités ne traite le problème de la dynamique de la figure de tavelures quantiques. Dans les très belles expériences portant sur la diffusion multiple de la lumière dans des nuages d'atomes froids [79, 80, 81, 82] la nature quantique de diffuseurs (atomes) a été mise en évidence, tandis que la lumière a toujours été considérée comme une onde classique.

4.1 Qu'est-ce que la figure de tavelures quantiques ?

Considérons, pour être concrets, la transmission d'un faisceau lumineux à travers une suspension de petites particules diffusant la lumière. Supposons que la cellule contenant la suspension est suffisamment épaisse et que la suspension est suffisamment dense pour que la condition $L \gg \ell$ soit satisfaite (L est l'épaisseur de la cellule et ℓ est le libre parcours moyen de la lumière). Dans les trois premiers chapitres de ce mémoire nous nous sommes concentrés sur les fluctuations du coefficient de transmission $T(t)$ et de l'intensité $I(\mathbf{r}, t)$ dans un tel milieu. Toutefois, dans une expérience optique on ne mesure pas $T(t)$, ni $I(\mathbf{r}, t)$, mais on compte les photons qui arrivent sur la surface d'un photo-détecteur pendant un certain temps τ . On a donc accès à une série de nombres entiers $n_1, n_2, \dots$ — les nombres de photons comptés dans les intervalles du temps $(t, t + \tau)$, $(t + \tau, t + 2\tau)$, $\dots$. Si on dénote par $n(t, \tau)$ le nombre de photons dans un intervalle $[t, t + \tau]$, on peut s'intéresser à la statistique de $n(t, \tau)$, car c'est un nombre aléatoire. On peut aussi étudier la dépendance spatiale de n en déplaçant le photo-détecteur en espace ou bien en utilisant un réseau de photo-détecteurs. $n(\mathbf{r}, t, \tau)$, que l'on présente sur la Fig. 4.2, est l'analogie quantique de

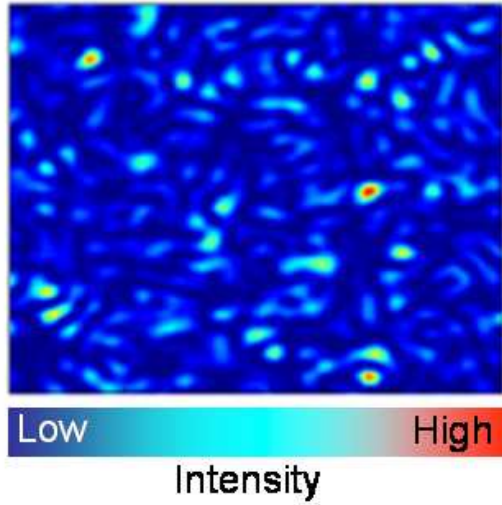


FIG. 4.1 – La figure de tavelures *classiques* est une distribution de l'intensité diffusée $I(\mathbf{r}, t)$. $I(\mathbf{r}, t)$ est aléatoire parce que les positions de diffuseurs dans le milieu désordonné sont aléatoires. La dynamique de $I(\mathbf{r}, t)$ a été étudiée dans les Chaps. 1–3 de ce mémoire.

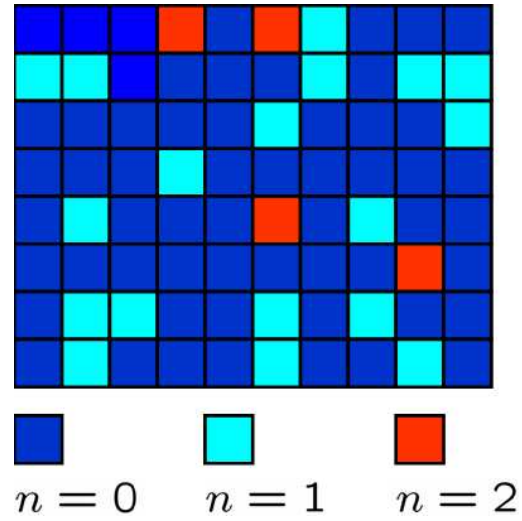


FIG. 4.2 – La figure de tavelures *quantiques* est discrète : un réseau de photo-détecteurs enregistre les nombres de photons n pendant un temps τ donné. $n > 3$ ne se réalise pas sur la figure parce que τ n'est pas suffisamment long. La figure de tavelures quantiques est doublement aléatoire : d'abord, elle est sensible au désordre dans le milieu et, ensuite, elle est soumise à des fluctuations quantiques.

la figure de tavelures classiques $I(\mathbf{r}, t)$ montrée sur la Fig. 4.1 pour comparaison.

Le nombre de photons n est déjà un concept quantique, parce que, classiquement, il n'existe pas. Mais la véritable nature quantique de la lumière se manifeste par les fluctuations quantiques de n autour de sa valeur moyenne $\bar{n}$: contrairement à l'intensité d'une onde classique émise par une source monochromatique dans un milieu linéaire, n n'est pas uniquement défini par la réalisation du désordre, mais il fluctue même lorsque le désordre est figé.

Le but principal de ce projet est d'étudier la dynamique de tavelures quantiques illustrées sur la Fig. 4.2. Comme dans le cas classique, nous allons tout d'abord nous intéresser aux milieux désordonnés fluctuants (des suspension de petites particules, par exemple), où les mesures de la corrélation temporelle de $n(\mathbf{r}, t, \tau)$ pourront permettre de réaliser une spectroscopie *quantique* des ondes diffusées. La possibilité de choisir l'état quantique de la lumière incidente (l'état cohérent, l'état de Fock, l'état comprimé ou même les états intriqués) donnera à cette technique un degré de liberté supplémentaire par rapport au cas classique. Ensuite, on pourra s'intéresser au rôle que les phénomènes non linéaires (l'effet Kerr ou la génération de la deuxième harmonique) et les effets de localisation jouent pour la statistique des figures de tavelures quantiques.

4.2 Statistique de comptage de photons transmis à travers un milieu désordonné

Nous avons déjà fait les premiers pas dans l'étude de la dynamique de tavelures quantiques. En collaboration avec l'équipe de Frank Scheffold à l'Université de Fribourg (Suisse) nous avons étudié la statistique de comptage de photons transmis à travers un milieu désordonné pour le faisceau incident dans l'état *cohérent*. Le schéma de l'expérience et les résultats obtenus pour la fonction de distribution du nombre de photons $P(n, \bar{n})$ sont présentés sur la Fig. 4.3. Dans cette section $\overline{}$ dénote la moyenne temporelle. Du point de vue théorique, l'état cohérent est défini comme l'état propre de l'opérateur d'annihilation de photons $\hat{a}$ [16], et il est connu comme l'état le plus proche de l'état classique [16, 83].²¹ Pour l'état cohérent, la statistique de comptage de photons $P(n, \bar{n})$ peut être décrite par la théorie semi-classique qui ne traite de façon quantique que le processus de détection des photons [16]. Du point de vue pratique, l'état cohérent est beaucoup plus facile à générer que les autres états de la lumière : il peut être généré par un laser conventionnel.

Dans l'expérience, on étudie la distribution $P(n, \bar{n})$ en transmission d'un faisceau laser focalisé à travers une suspension de particules de TiO_2 en fonction du temps de comptage τ et en fonction de la taille w de la tache focale à la surface de la suspension (cf. Fig. 4.3). Grâce à son diamètre très élevé, la fibre optique utilisée pour faire la mesure collecte *toute* la lumière transmise, exactement comme dans l'expérience décrite dans la Sect. 1.4. Le résultat de l'expérience est donc sensible au coefficient de la transmission totale de l'échantillon $T(t)$. Lorsque l'on varie τ , on change l'importance des effets quantiques dans $P(n, \bar{n})$ (la limite classique est atteinte pour $\tau \rightarrow \infty$ parce que $\bar{n} \rightarrow \infty$ dans cette limite). D'autre part, l'importance des fluctuations classiques, dues au désordre dans le milieu, peut être contrôlée en ajustant w , comme nous l'avons expliqué dans la Sect. 1.4. La situation réelle est un peu plus complexe : l'augmentation de τ au-delà du temps caractéristique des fluctuations classiques induit l'effet d'auto-moyennage et, par conséquent, toutes les fluctuations disparaissent pour $\tau \rightarrow \infty$. L'influence des fluctuations classiques du coefficient de transmission totale sur la distribution statistique $P(n, \bar{n})$ est illustrée sur la Fig. 4.3. On voit que la distribution est plus large pour un faisceau focalisé que pour un faisceau collimaté. L'effet de la taille w de la tache focale est encore plus claire sur la Fig. 4.4 où nous montrons les deux premiers moments centraux de $P(n, \bar{n})$ pour différentes valeurs de w . Lorsque w diminue, la distribution devient de plus en plus large (le deuxième moment augmente) et de plus en plus asymétrique (le troisième moment augmente également).

Les lignes continues dans les Figs. 4.3 et 4.4 sont les résultats théoriques obtenus dans le cadre de la théorie semi-classique, en utilisant la formule de Mandel [16]. La théorie est un bon accord avec l'expérience, mais elle ne s'applique que dans le régime diffusif : il faut que les fluctuations classiques du coefficient de la transmission totale $T(t)$ soit bien inférieures à 1. Cela correspond à $g \gg 1$ dans l'Éq. (1.13) pour la fonction de corrélation de $T(t)$. Dans ce régime, la théorie prédit que les fluctuations classiques commencent

²¹L'état classique est un état hypothétique où les fluctuations quantiques (fluctuations du vide) s'annulent. Bien entendu, un tel état n'existe pas dans la réalité, mais c'est bien à lui que l'on fait référence lorsque l'on considère la lumière comme une onde classique.

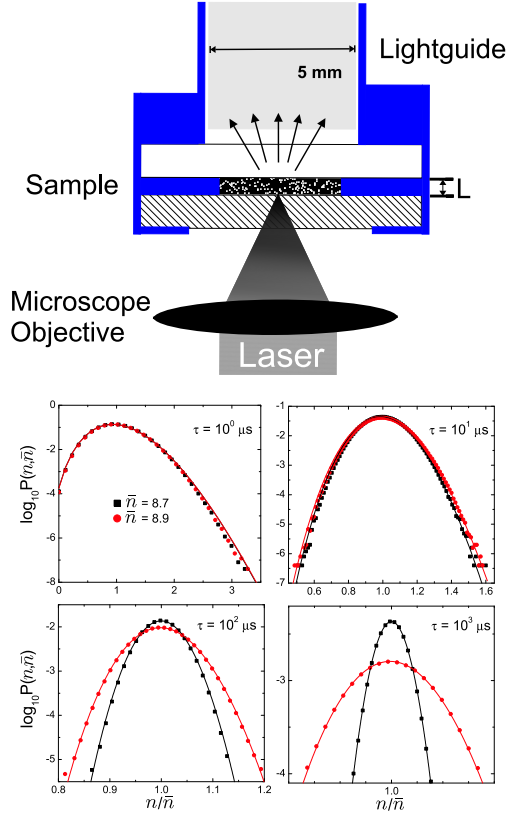


FIG. 4.3 – Haut : Schéma de l'expérience. Un faisceau laser (la longueur d'onde $\lambda = 532$ nm) est focalisé en une tache de quelques microns sur la surface d'une suspension de petites particules de dioxyde de titane (diamètre des particules ~ 200 – 300 nm). La suspension est contenue dans une cellule en verre (épaisseur $L = 0,5$ mm) et elle diffuse la lumière très fortement (le libre parcours moyen de transport est $\ell^* \simeq 0,7$ μm). La lumière transmise est collectée par une fibre optique multi-mode (diamètre 5 mm). Bas : La statistique de comptage de photons $P(n, \bar{n})$ pour 4 intervalles de comptage τ différents et un faisceau incident focalisé (taille de la tache focale $w = 3,4$ μm , cercles) ou collimaté (carrés). Le nombre moyen de photons $\bar{n}$ et τ sont liés par $\bar{n} = f\tau$ avec $f \simeq 9$ MHz le taux de comptage moyen. Les lignes pleines montrent les résultats théoriques.

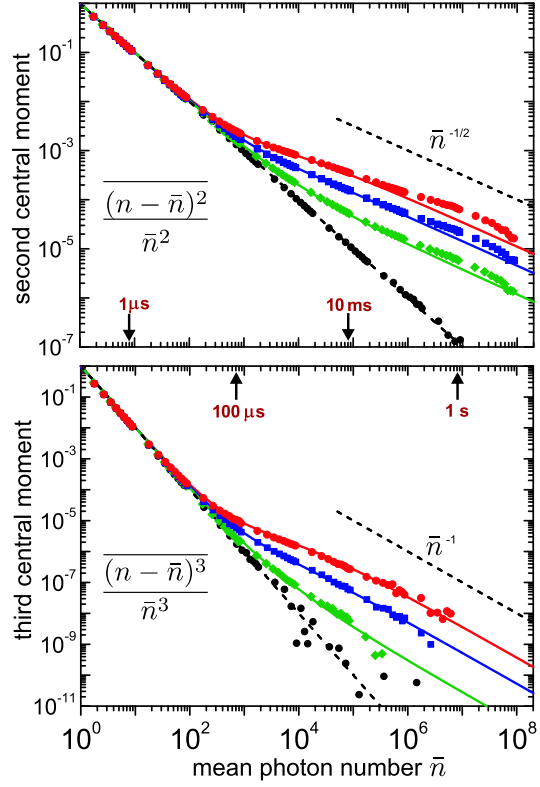


FIG. 4.4 – Deuxième (haut) et troisième (bas) moments centraux de la distribution de comptage de photons $P(n, \bar{n})$. Les lignes correspondent à des tailles w différentes de la tache focale du faisceau laser, du bas vers le haut : faisceau collimaté ($w \rightarrow \infty$), $w = 23,5$ μm , $9,8$ μm , et $3,4$ μm . Les lignes pleines sont les résultats théoriques. Pour le faisceau collimaté, le deuxième et le troisième moments suivent les lois en $1/\bar{n}$ et $1/\bar{n}^2$ (lignes pointillées) respectivement. Pour un faisceau focalisé, ils suivent les asymptotes $1/\bar{n}^{1/2}$ et $1/\bar{n}$ (lignes pointillées) pour $\bar{n} \rightarrow \infty$.

à affecter $P(n, \bar{n})$ lorsque $\bar{n}$ devient supérieur à g . Dans les expériences $g \sim 10^3$, et sur les Figs. 4.3 et 4.4 on voit clairement que toutes les distributions coïncident pour $\bar{n} < g$. Les différences entre les distributions correspondant à différentes valeurs de w n'apparaissent que pour $\bar{n} > g$. Comment est-ce que ces résultats seront modifiés lorsque l'on augmente le désordre, diminue g , et entre dans le régime de localisation forte ? Nos résultats actuels, limités à $g \gg 1$, ne nous permettent pas de répondre à cette question, mais en les extrapolant dans le domaine $g < 1$ on peut s'attendre à une modification très importante de la statistique de comptage de photons $P(n, \bar{n})$ dans le régime localisé. En fait, une telle conclusion est aussi suggérée par les études de la fonction de distribution de l'intensité classique $P(I, \bar{I})$ [3, 84, 85].²² Cela suggère que la statistique de comptage de photons $P(n, \bar{n})$ est une quantité importante dans le contexte des études de la localisation forte de lumière. Les propriétés de $P(n, \bar{n})$ dans le régime localisé restent à étudier.

4.3 Fluctuations du nombre de photons transmis pour la lumière non classique

Une continuation possible de l'étude présentée dans la section précédente est de l'étendre à la lumière dans des états non classiques. Cela peut être la lumière dans un état de Fock (la lumière dans un état propre de l'opérateur $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, c'est-à-dire la lumière avec un nombre de photons fixe et connu) ou la lumière dans un état comprimé (l'état avec les fluctuations du vide supprimées dans une des deux quadratures et amplifiées dans l'autre, de telle façon que la relation d'incertitude est toujours satisfaite), «squeezed light» en anglais. D'ailleurs, la deuxième option nous semble plus réaliste car il existe des méthodes relativement efficace pour générer la lumière comprimée (méthodes basées sur l'optique non linéaire) [86], tandis que les états de Fock sont difficiles à générer.²³

Considérons la lumière dans un état quantique arbitraire, qui illumine une suspension de particules animées par un mouvement brownien. Supposons, pour simplifier l'analyse, que cette lumière correspond à un seul mode (mode a) du champ électromagnétique, comme on le montre sur la Fig. 4.5. La quantité qui nous intéresse est la statistique de comptage de photons dans le mode b en transmission, $P(n_b)$, ou encore la statistique du nombre total de photons transmis $P(n)$ avec $n = \sum_b n_b$, que nous avons étudiée dans la section précédente pour l'état cohérent de la lumière incidente. Le calcul des distributions $P(n_b)$ et $P(n)$ pour un état arbitraire de la lumière incidente fait partie de nos projets pour l'avenir. Ici nous nous limiterons au calcul des fluctuations de n_b et de n . L'opérateur d'annihilation de photons dans le mode b s'écrit :

$$\hat{a}_b(t) = \sum_{a'} \mathcal{T}_{a'b}(t) \hat{a}_{a'}(t) + \sum_{b'} \mathcal{R}_{b'b}(t) \hat{a}_{b'}(t), \quad (4.1)$$

où $\mathcal{T}_{a'b}(t)$ et $\mathcal{R}_{b'b}(t)$ sont les coefficients de transmission et de réflexion dépendant du

²²Dans un milieu désordonné solide, où les diffuseurs sont immobiles, $P(I, \bar{I})$ coïncide avec $P(n, \bar{n})$ pour $\bar{n} \rightarrow \infty$.

²³Les études récentes ont montré qu'il est possible de générer les états de Fock à un ou à deux photons en utilisant des boîtes quantiques. Toutefois, on ne sait toujours pas générer les états de Fock à $n > 2$ photons [87, 88].

temps (cf. Fig. 4.5). La variance du nombre de photons dans le mode b , $\delta_b^2 = \text{Var}[\hat{n}_b]/\langle \hat{n}_b \rangle^2$, peut être calculée en utilisant la définition

$$\hat{n}_b(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} dt' \hat{a}_b^\dagger(t') \hat{a}_b(t'), \quad (4.2)$$

et en évaluant l'espérance quantique (notée par $\langle \dots \rangle$) et puis la moyenne sur le désordre (notée par $\overline{\dots}$) de $\hat{n}_b$ et $\hat{n}_b^2$. Pour la lumière dans l'état cohérent on obtient

$$\delta_b^2 = \frac{1}{\langle \hat{n}_b \rangle} + \delta_{\text{class}}^2, \quad (4.3)$$

où δ_{class}^2 est le résultat que l'on aurait obtenu pour la fluctuation de l'intensité d'une onde classique, intégrée sur le temps :

$$\delta_{\text{class}}^2 = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau dt \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) C_T^{ab}(t), \quad (4.4)$$

avec la fonction de corrélation du coefficient de transmission $C_T^{ab}(t) = \overline{T_{ab}(t_1)T_{ab}(t_1+t)}/\overline{T_{ab}(t)}^2 - 1$ et $T_{ab}(t) = |\mathcal{T}_{ab}(t)|^2$. On voit donc que pour la lumière dans l'état cohérent les fluctuations classiques δ_{class}^2 et les fluctuations quantiques (« shot noise ») $1/\langle \hat{n}_b \rangle$ s'ajoutent.

La situation devient plus complexe et plus intéressante à la fois lorsque la lumière incidente est dans un état non classique. Pour un état de Fock à n_a photons, par exemple, on trouve

$$\delta_b^2 = \frac{1}{\langle \hat{n}_b \rangle} - \frac{1}{n_a} + \delta_{\text{class}}^2 \left(1 - \frac{1}{n_a}\right). \quad (4.5)$$

Contrairement au cas de l'état cohérent, on voit que ce résultat ne se réduit pas à une simple somme de termes classiques et quantiques, mais fait intervenir un terme « croisé » — le dernier terme de l'Éq. (4.5), — qui n'existe que si les fluctuations classiques δ_{class}^2 et les fluctuations quantiques $1/n_a$ sont présentes toutes les deux. Il est curieux que pour l'état de Fock à 1 photon ($n_a = 1$), l'Éq. (4.5) donne $\delta_b^2 = 1/\langle \hat{n}_b \rangle - 1$. Ce résultat est indépendant des fluctuations classiques δ_{class}^2 .

Le calcul de δ_b^2 peut aussi être effectué pour la lumière chaotique ou encore pour la lumière comprimée, mais nous nous contenterons ici de l'état cohérent et de l'état de Fock que nous venons de considérer. Il faut aussi dire que la fluctuation du nombre total de photons transmis $n = \sum_b n_b$ est donnée par les mêmes formules (4.3) et (4.5), sous condition que $T_{ab}(t)$ est remplacé par $T_a(t) = \sum_b T_{ab}(t)$ dans la définition de $C_T^{ab}(t)$. Un de nos projets consiste à aller au-delà du deuxième moment de n_b et d'étudier la distribution complète $P(n_b)$ pour les états non classiques de la lumière, comme nous l'avons fait pour la lumière dans l'état cohérent (cf. Sect. 4.2). Quel est l'effet de la localisation forte sur la statistique de comptage de photons pour la lumière non classique ? Peut-on proposer un test critique pour la localisation forte basé sur $P(n_b)$ ou sur $P(n)$? Les états non classiques de la lumière, ont-ils un avantage pour les études de la localisation forte ? Ce sont des exemples de questions que nous nous posons dans ce contexte.

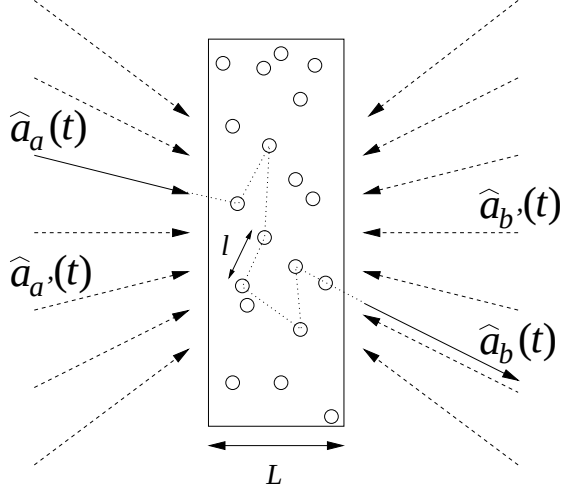


FIG. 4.5 – Représentation schématique de l'expérience proposée. Une suspension de petites particules diélectriques animées par un mouvement brownien est éclairée par la lumière dans un état quantique arbitraire en mode a . On compte les photons diffusés dans le mode b en transmission. L'amplitude du mode incident et celle du mode transmis sont décrites par les opérateurs $\hat{a}_a(t)$ et $\hat{a}_b(t)$ respectivement. Les flèches pointillées correspondent aux modes dans l'état du vide qui ont l'amplitude moyenne égale à zéro : $\langle \hat{a}_a(t) \rangle = \langle \hat{a}_b(t) \rangle = 0$, mais qui sont porteurs des fluctuations du vide.

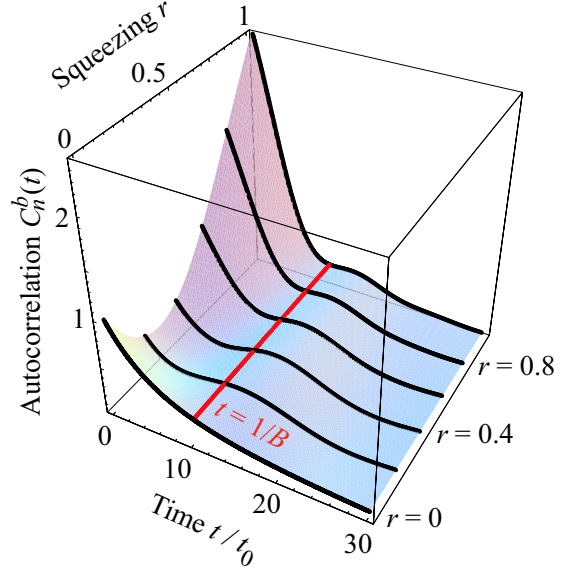


FIG. 4.6 – Fonction de corrélation du nombre de photons dans le mode b (cf. Fig. 4.5) pour deux intervalles de comptage τ séparés par un temps $t > \tau$. La lumière incidente est une lumière comprimée en amplitude avec r le paramètre de compression et $B = 0, 1/t_0$ la bande de compression. Le temps est en unités de $t_0 = \ell^{*2}/6k^2 D_B L^2$ avec ℓ^* le libre parcours moyen de transport, k le nombre d'onde, D_B le coefficient de diffusion de particules dans la suspension, et L l'épaisseur de l'échantillon. L'intensité portée par le champ moyen est $A_0^2 = B$ pour cette figure. La fonction de corrélation ne dépend pas de r pour $t = 1/B$.

4.4 Théorie quantique de la spectroscopie des ondes diffusées

La spectroscopie des ondes diffusées, que nous avons considérée dans le Chap. 1 de ce mémoire, permet de caractériser les milieux désordonnés à partir de mesures de la fonction de corrélation de l'intensité diffusée $I(t)$. Toutefois, ce n'est pas $I(t)$, mais le nombre de photons $n(t, \tau)$ qui est mesuré dans les expériences optiques ! Pour la lumière dans l'état cohérent — comme la lumière émise par un laser et utilisée dans les expériences « habituelles » — on peut contourner cette difficulté par une approche semi-classique, qui s'avère suffisante. On démontre alors que la fonction de corrélation de $I(t)$ et celle de $n(t, \tau)$ coïncident pour τ suffisamment court. Par contre, une théorie quantique complète s'impose pour la lumière non classique.

Considérons la fonction de corrélation du nombre de photons dans un mode donné (mode b sur la Fig. 4.5) en transmission de la lumière dans un état quantique arbitraire (mode a) à travers une suspension de particules diélectriques animées par un mouvement brownien,

$$C_n^b(t) = \frac{\overline{\langle \hat{n}_b(t_1, T) \hat{n}_b(t_1 + t, T) \rangle}}{\overline{\langle \hat{n}_b(t_1, T) \rangle} \overline{\langle \hat{n}_b(t_1 + t, T) \rangle}} - 1. \quad (4.6)$$

Le calcul de $C_n^b(t)$ est similaire à ce de δ_b^2 et il donne

$$C_n^b(t) = [1 + C_n^a(t)] C_T^{ab}(t) + C_n^a(t), \quad (4.7)$$

où $C_n^a(t)$ — la fonction de corrélation du nombre de photons dans le mode a — est définie par la même équation (4.6) que $C_n^b(t)$, mais avec $\hat{n}_b$ remplacé par $\hat{n}_a$. L'équation (4.7) s'applique sous condition que le temps de comptage τ est bien inférieur au temps de décroissance de $C_T^{ab}(t)$. Pour la lumière dans l'état cohérent, $C_n^a(t) = 0$ et on trouve $C_n^b(t) = C_T^{ab}(t)$. Cela est la base de toutes les spectroscopies à corrélation de photons, y compris la spectroscopie des ondes diffusées, qui identifient $C_n^b(t)$, mesurée dans une expérience, avec $C_T^{ab}(t)$, pour laquelle un modèle théorique est développé [89, 90].

L'égalité entre $C_n^b(t)$ et $C_T^{ab}(t)$ ne s'applique plus pour la lumière non classique. Pour la lumière dans un état de Fock à n_a photons, on trouve $C_n^a(t) = -1/n_a$ et

$$C_n^b(t) = \left[1 - \frac{1}{n_a}\right] C_T^{ab}(t) - \frac{1}{n_a}. \quad (4.8)$$

Bien que $C_n^b(t)$ tende vers $C_T^{ab}(t)$ pour $n_a \rightarrow \infty$, les deux fonctions de corrélation sont très différentes pour $n_a \sim 1$. La corrélation $C_n^b(t)$ est indépendante du temps et vaut -1 pour $n_a = 1$. Pour $n_a > 1$ elle devient négative pour les temps t suffisamment longs. Ce phénomène est facile à expliquer par la conservation du nombre total de photons : lorsqu'un photon est détecté à l'instant t , il ne peut plus être détecté plus tard. Cela implique une corrélation négative entre les nombres de photons détectés dans les intervalles de temps distincts.

Pour la lumière comprimée en amplitude²⁴ le résultat pour $C_n^b(t)$ est plus long et nous l'illustrons sur la Fig. 4.6, où $C_n^b(t)$ est présentée pour certaines valeurs de paramètres. Nous observons que $C_n^b(t)$ est sensible au paramètre de compression r . Comme on le voit sur la figure, la fonction de corrélation $C_n^b(t)$ change sensiblement lorsque l'on varie r .

Il serait extrêmement intéressant de généraliser l'étude des corrélations de la lumière non classique dans les milieux désordonnés au cas de photons intriqués. Une telle généralisation fait partie de nos projets. Nous envisageons également d'étudier les applications pratiques de la spectroscopie des ondes diffusées avec la lumière non classique et, en particulier, de comprendre si l'utilisation de la lumière non classique peut améliorer la sensibilité et la résolution spatiale des méthodes de spectroscopie et d'imagerie par corrélation des ondes que nous avons présentées dans le Chap. 1.

²⁴Pour la lumière comprimée en amplitude, les fluctuations de l'amplitude sont supprimées d'un facteur e^{-r} au profit des fluctuations de la phase.

4.5 Diffusion de la lumière dans des nuages d'atomes froids et laser aléatoire

Un problème à la fois très intéressant et très complexe est la diffusion multiple de la lumière dans des nuages d'atomes froids. De telles expériences sont menées, en particulier, à l'Institut Non Linéaire de Nice à Sophia-Antipolis, où plusieurs phénomènes spécifiques à la diffusion multiple de la lumière par les atomes ont déjà été mis en évidence : la suppression du cône de rétrodiffusion due à la structure interne des atomes [79], l'effet de Hanle [80], un ralentissement important de la diffusion [81], l'augmentation de la longueur de cohérence de la lumière sous champ magnétique [82], etc. Il reste certainement encore beaucoup de choses à découvrir dans ce domaine de recherche. En ce qui concerne l'étude des phénomènes quantiques en diffusion multiple, nous sommes particulièrement intéressés par la propagation et par la génération de la lumière non classique en milieu atomique en diffusion multiple, par des phénomènes non linéaires dus à la saturation des transitions atomiques, et par l'effet laser sans miroirs connu sous le nom de l'effet « laser aléatoire ». Ces problématiques font partie de notre projet de recherche sur le long terme et nous ne pouvons pas pour l'instant apporter des réponses aux multiples questions qui se posent dans ce domaine. Nous allons donc nous limiter ici à quelques remarques qui nous semblent intéressantes et qui nous poussent à nous intéresser de plus en plus à ce sujet.

Premièrement, dans le Chap. 2 de ce mémoire nous avons montré que la solution stationnaire d'une équation d'onde désordonnée et non linéaire peut devenir instable si la non-linéarité excède un seuil. Il serait tentant d'étudier cette instabilité dans les nuages d'atomes froids parce que ces nuages peuvent être très non linéaires et désordonnés à la fois. Toutefois, le calcul présenté dans le Chap. 2 ne s'applique pas directement aux milieux atomiques, et cela pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la diffusion de la lumière par les atomes est caractérisée par une inévitable composante inélastique. Plus précisément, lorsqu'une onde monochromatique de fréquence ω_0 est diffusée par un nuage d'atomes, une partie de son énergie est émise par les atomes sous forme d'ondes ayant d'autres fréquences. Cette diffusion inélastique n'a pas lieu dans les milieux diélectriques, et donc elle n'a pas été prise en compte dans notre analyse du Chap. 2. Un autre phénomène important est dû à l'effet mécanique que la lumière produit sur les atomes. Les atomes sont légers (bien plus légers que les particules de taille micrométrique!), et à chaque diffusion elles absorbent une partie du moment mécanique du photon diffusé. Cet effet s'accumule lorsqu'il y a beaucoup de photons (il nous en faut beaucoup pour que les effets non linéaires que l'on cherche à observer soit forts!) et lorsque nous sommes dans le régime de diffusion multiple (et nous y sommes toujours dans le cadre de ce mémoire!). Au bout du compte, on ne peut plus vraiment considérer un nuage d'atomes comme un milieu désordonné avec des centres de diffusion immobiles (à température zéro) ou animés par un mouvement thermique (à température finie), car la dynamique des atomes devient liée à la dynamique de la figure de tavelures et réciproquement. L'existence de l'instabilité de la figure de tavelures dans ce contexte est un problème nouveau qui n'a pas été résolu à ce jour.

Un autre problème intéressant qui se pose dans le contexte de la diffusion multiple de la lumière dans les nuages atomiques est le problème de génération de la lumière non clas-

sique et, en particulier, de la lumière comprimée. L'utilisation des non-linéarités optiques pour obtenir la compression des fluctuations du vide dans une des deux quadratures (par exemple, dans la phase ou dans l'amplitude) d'une onde lumineuse est devenue courante aujourd'hui. Il est facile de démontrer que la lumière de fréquence $\omega_0/2$, générée à partir d'un faisceau cohérent de fréquence ω_0 dans le processus de conversion de fréquence paramétrique dégénérée, peut être comprimée soit en amplitude, soit en phase [16]. Toutefois, on ne sait absolument pas comment ce phénomène est modifié (et s'il l'est) en présence du désordre. Les nuages d'atomes froids où la non-linéarité et la diffusion multiple suffisamment fortes se réalisent en même temps peuvent convenir particulièrement bien à l'étude de cette question.

Finalement, l'effet « laser aléatoire » dans un nuage d'atomes froids mérite aussi d'être étudié. Le laser aléatoire est un laser sans cavité externe, où l'effet de rétroaction, normalement assuré par la cavité, se réalise par intermédiaire de la diffusion multiple [91, 92]. Dans l'analyse théorique, les modes propres de la cavité sont remplacés par les quasi-modes (ou résonances) du milieu *ouvert* formé par le nuage. La plupart de ces quasi-modes sont caractérisés par un temps de vie beaucoup trop court pour donner lieu à l'effet laser. Mais, avec un peu de chance et surtout pour un désordre suffisamment fort, il y a toujours une chance d'avoir un mode très « spécial » et « pas comme les autres », qui aura un temps de vie très long, même, peut-être, plus long que certains modes dans une vraie cavité. C'est ce mode qui est candidat pour produire l'effet laser lorsque du gain est présent dans le milieu. L'effet laser aléatoire dans les nuages d'atomes froids est un problème très intéressant, mais aussi très complexe, qui fait appel à nos connaissances à la fois dans les domaines de la propagation des ondes, de la diffusion multiple, de l'optique quantique et de la physique atomique. Ce domaine de recherche cache, sans doute, beaucoup de surprises que nous sommes impatients de découvrir.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons résumé nos travaux récents portant sur la dynamique des figures de tavelures en milieux désordonnés. Nous avons identifié les quatre raisons à l'origine de cette dynamique et nous avons consacré un chapitre à chacune.

Premièrement, la figure de tavelures fluctue au cours du temps si le milieu désordonné évolue (par exemple, les centres de diffusion dans le milieu se déplacent). Dans ce cas, on peut lier la dynamique du milieu à la dynamique de la figure de tavelures et utiliser cette dernière pour sonder et imager le milieu. Cette approche est à la base de la spectroscopie des ondes diffusées et nous avons montré dans le premier chapitre qu'elle a des applications très intéressantes dans la caractérisation des milieux désordonnés complexes et dans l'imagerie médicale. De plus, les travaux théoriques récents suggèrent que cette même approche peut permettre le développement d'une microscopie des milieux désordonnés, car la figure de tavelures est très sensible à la densité d'état locale au point de localisation de la source d'ondes.

La figure de tavelures peut fluctuer au cours du temps même si les centres de diffusion dans le milieu sont immobiles et la source d'ondes est monochromatique. Ces fluctuations spontanées sont dues à l'instabilité de la figure de tavelures par rapport à de faibles perturbations en présence d'une non-linéarité dans la réponse optique du milieu. Cette instabilité, encore jamais observée à ce jour, a été étudiée dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré aux impulsions courtes dans les milieux désordonnés. Naturellement, si la source d'ondes émet une impulsion au lieu d'une onde continue, la figure de tavelures n'est pas stationnaire, même lorsque les diffuseurs sont immobiles et lorsque le milieu est linéaire. La propagation d'impulsions dans un milieu désordonné est un bon exemple de situation où les effets de localisation forte se manifestent lorsque l'on augmente le désordre, et cela aussi bien au niveau de l'intensité moyenne qu'au niveau des fluctuations de l'intensité.

Finalement, lorsque le désordre est statique, la source d'ondes est monochromatique, et le milieu est linéaire, la figure de tavelures peut toujours être dynamique, si on s'intéresse à la figure de tavelures quantiques, obtenue en comptant les photons détectés par un réseau de photo-détecteurs pendant un intervalle de temps fixe. Le nombre de photons compté est soumis aux fluctuations quantiques que l'on ne peut pas éliminer. Toutefois, ces fluctuations quantiques peuvent être modifiées en changeant l'état quantique de la lumière incidente. L'utilisation possible des fluctuations quantiques pour étudier le phénomène de la localisation forte ou pour sonder et imager les milieux désordonnés reste à explorer. Cela fait partie de nos projets de recherche, décrits dans le dernier chapitre de ce mémoire.

Les travaux présentés dans ce mémoire montrent que la dynamique des figures de tave-

lures en milieux désordonnés est un sujet riche en problèmes fondamentaux et important pour les applications, où il reste encore des problèmes ouverts à étudier et (pourquoi pas ?) des découvertes importantes à faire.

Bibliographie

- [1] A. Ishimaru, « Wave propagation and scattering in random media » (Academic Press, New York, 1978).
- [2] Ping Sheng, « Introduction to wave scattering, localization, and mesoscopic phenomena » (Academic Press, New York, 1995).
- [3] M.C.W. van Rossum et Th.M. Nieuwenhuizen, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 313 (1999).
- [4] É. Akkermans et G. Montambaux, « Physique mésoscopique des électrons et des photons » (EDP Sciences/CNRS Éditions, Paris, 2004).
- [5] S. Feng, C. Kane, P.A. Lee et A.D. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 834 (1991).
- [6] S. Feng et P.A. Lee, *Science* **251**, 633 (1991).
- [7] R. Berkovits et S. Feng, *Phys. Rep.* **238**, 135 (1994).
- [8] B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2168 (1986).
- [9] M.J. Stephen et G. Cwilich, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 285 (1987).
- [10] P. A. Lee, A.D. Stone et H. Fukuyama, *Phys. Rev. B* **35**, 1039 (1987).
- [11] F. Scheffold et G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5800 (1998).
- [12] B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4733 (1999).
- [13] P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [14] R.W. Boyd, « Nonlinear optics », (Academic Press, New York, 1992).
- [15] K. Ikeda, H. Daido et O. Akimoto, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 709 (1980).
- [16] L. Mandel et E. Wolf, « Optical coherence and quantum optics » (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1995).
- [17] G. Maret et P.E. Wolf, *Z. Phys. B* **65**, 409 (1987).
- [18] D.J. Pine, D.A. Weitz, P.M. Chaikin et E. Herbolzheimer, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1134 (1988).
- [19] A.H. Krall et D.A. Weitz, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 778 (1998).
- [20] V. Viasnoff, F. Lequeux et D.J. Pine, *Rev. Sci. Instrum.* **73**, 2336 (2002).
- [21] T.A. Waigh, *Rep. Prog. Phys.* **68**, 685 (2005).
- [22] D.A. Boas, L.E. Campbell, et A.G. Yodh, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1855 (1995).
- [23] A. Yodh et B. Chance, *Phys. Today* **48**(3), 34 (1995).
- [24] D.A. Boas et A.G. Yodh, *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 192 (1997).

- [25] F. Scheffold, W. Härtl, G. Maret et E. Matijevic, *Phys. Rev. B* **56**, 10942 (1997).
- [26] A.Z. Genack, N. Garcia et W. Polkosnik, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2129 (1990).
- [27] M.P. van Albada, J.F. de Boer et A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2787 (1990).
- [28] J.F. de Boer, M.P. van Albada et A. Lagendijk, *Phys. Rev. B* **45**, 658 (1992).
- [29] A.Yu. Zyuzin et B.Z. Spivak, *Sov. Phys. JETP* **66**, 560 (1987).
- [30] R. Pnini et B. Shapiro, *Phys. Rev. B* **39**, 6986 (1989).
- [31] M.P. van Albada, B.A. van Tiggelen, A. Lagendijk et A. Tip, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3132 (1991).
- [32] R. Muenster, M. Jarasch, X. Zhuang et Y.R. Shen, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 42 (1997).
- [33] V.M. Agranovich et V.E. Ktavtsov, *Phys. Rev. B* **43**, 13691 (1991).
- [34] J.F. de Boer, A. Lagendijk, R. Sprik et S. Feng, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3947 (1993).
- [35] A. Heidereich, R. Maynard et B.A. van Tiggelen, *Opt. Commun.* **115**, 392 (1995).
- [36] I.I. Smolyaninov, A. Gungor, C.C. Davis, cond-mat/0510110.
- [37] L.P. Gorkov, A. Larkin et D.E. Khmel'nitskii, *JETP Lett.* **30**, 228 (1979).
- [38] S. Hikami, *Phys. Rev. B* **24**, 2671 (1981).
- [39] B.A. van Tiggelen, dans « Diffuse waves in complex media », sous direction de J.P. Fouque (Kluwer, Dordrecht, 1999), p. 1.
- [40] D. Vollhardt et P. Wölfle, *Phys. Rev. B* **22**, 4666 (1980).
- [41] D. Vollhardt et P. Wölfle, dans « Electronic phase transitions », sous direction de W. Hanke et Yu.V. KopaeV (Elsevier Science, Amsterdam, 1992), p. 1.
- [42] B.A. van Tiggelen, A. Lagendijk et D.S. Wiersma, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4333 (2000).
- [43] S.K. Cheung, X. Zhang, Z.Q. Zhang, A.A. Chabanov et A.Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 173902 (2004).
- [44] S.K. Cheung et Z.Q. Zhang, *Phys. Rev. B* **72**, 235102 (2005).
- [45] A.A. Chabanov, Z.Q. Zhang et A.Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 203903 (2003).
- [46] A.D. Mirlin, *Phys. Rep.* **326**, 259 (2000).
- [47] M. Titov and C.W.J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3388 (2000).
- [48] B. White, P. Sheng, Z.Q. Zhang et G. Papanicolaou, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1918 (1987).
- [49] A.Z. Genack, N. Garcia et W. Polkosnik, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2129 (1990).
- [50] N. Garcia, A.Z. Genack, R. Pnini, et B. Shapiro, *Phys. Lett. A* **176**, 458 (1993).
- [51] P. Sebbah, R. Pnini, A.Z. Genack, *Phys. Rev. E* **62**, 7348 (2000).
- [52] P. Sebbah, B. Hu, A.Z. Genack, R. Pnini et B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 123901 (2002).
- [53] A.A. Chabanov, B. Hu et A.Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 123901 (2004).
- [54] P.M. Johnson, A. Imhof, B.P.J. Bret, J. Gómez Rivas et A. Lagendijk, *Phys. Rev. E* **68**, 016604 (2003).
- [55] D.S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk et R. Righini, *Nature* **390**, 671 (1997).

-
- [56] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweert et G. Maret, *Nature* **398**, 206 (1999).
 - [57] D.S. Wiersma, J. Gómez Rivas, P. Bartolini, A. Lagendijk et R. Righini, *Nature* **398**, 207 (1999).
 - [58] M. Störzer, P. Gross, C.M. Aegerter et G. Maret, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 063904 (2006).
 - [59] F.A. Pinheiro, M. Rusek, A. Orłowski et B.A. van Tiggelen, *Phys. Rev. E* **69**, 026605 (2004).
 - [60] T. Kottos, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38**, 10761 (2005).
 - [61] M. Weiss, J.A. Méndez-Bermúdez et T. Kottos, *Phys. Rev. B* **73**, 045103 (2006).
 - [62] F. Borgonovi, I. Guarneri et D.L. Shepelyansky, *Phys. Rev. A* **43**, 4517 (1991).
 - [63] A. Ossipov, T. Kottos et T. Geisel, *Europhys. Lett.* **62**, 719 (2003).
 - [64] B.A. Muzykantskii et D.E. Khmelnitskii, *Phys. Rev. B* **51**, 5480 (1995).
 - [65] B.A. Muzykantskii et D.E. Khmelnitskii, cond-mat/9601045.
 - [66] V.I. Falko et K.B. Efetov, *Phys. Rev. B* **52**, 17413 (1995).
 - [67] I.E. Smolyarenko et B.L. Altshuler, *Phys. Rev. B* **55**, 10451 (1997).
 - [68] M. Patra, *Phys. Rev. E* **67**, 016603 (2003).
 - [69] V.M. Apalkov, M.E. Raikh et B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 016802 (2002).
 - [70] V.M. Apalkov, M.E. Raikh et B. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 066601 (2004).
 - [71] « Wave scattering in complex media : from theory to applications », sous direction de B.A. van Tiggelen et S.E. Skipetrov (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003).
 - [72] M. Patra et C.W.J. Beenakker, *Phys. Rev. A* **60**, 4059 (1999).
 - [73] M. Patra et C.W.J. Beenakker, *Phys. Rev. A* **61**, 063805 (2000).
 - [74] C.W.J. Beenakker, M. Patra et P. W. Brouwer, *Phys. Rev. A* **61**, 051801 (2000).
 - [75] P. Lodahl, A.P. Mosk et A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 173901 (2005).
 - [76] P. Lodahl, *Opt. Lett.* **31**, 110 (2006).
 - [77] P. Lodahl, *Optics Express* **14**, 6919 (2006).
 - [78] P. Lodahl et A. Lagendijk, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 153905 (2005).
 - [79] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.C. Bernard, C.A. Muller, C. Miniatura et R. Kaiser, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5266 (1999).
 - [80] G. Labeyrie, C. Miniatura, C.A. Muller, O. Sigwarth, D. Delande et R. Kaiser, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 163901 (2002).
 - [81] G. Labeyrie, E. Vaujour, C.A. Muller, D. Delande, C. Miniatura, D. Wilkowski et R. Kaiser, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 223904 (2003).
 - [82] O. Sigwarth, G. Labeyrie, T. Jonckheere, D. Delande, R. Kaiser et C. Miniatura, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 143906 (2004).
 - [83] H.-A. Bachor et T.C. Ralph, « A guide to experiments in quantum optics » (Wiley, Weinheim, 2004).
 - [84] M. Stoytchev et A.Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 309 (1997).

- [85] A.A. Chabanov, M. Stoytchev et A.Z. Genack, *Nature* **404**, 850 (2000).
- [86] G. Breitenbach, S. Schiller et J. Mlynek, *Nature*, **387**, 471 (1997).
- [87] O. Benson, C. Santori, M. Pelton et Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2513 (2000).
- [88] R.M. Stevenson, R.J. Young, P. Atkinson, K. Cooper, D.A. Ritchie et A.J. Shields *Nature* **439**, 179 (2006).
- [89] «Dynamic light scattering : applications of photon correlation spectroscopy », sous direction de R. Pecora (Springer, Berlin, 2003).
- [90] K. Schätzel, *Appl. Phys. B* **42**, 193 (1987).
- [91] D.S. Wiersma, M.P. van Albada et A. Lagendijk, *Nature* **373**, 203 (1995).
- [92] D.S. Wiersma et A. Lagendijk, *Phys. Rev. E* **54**, 4256 (1996).