Phase et Diffusion Multiple

D. Anache, B. A. van Tiggelen (Grenoble), J. Page (Manitoba)

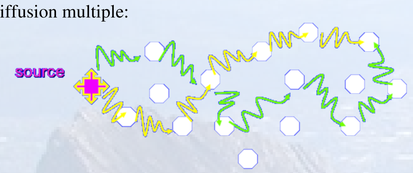
La diffusion multiple concerne de nombreux domaines: optique, imagerie médicale, ondes sismiques, astrophysique, physique des semi-conducteurs. Cependant des théories communes ont pu être développées.

Après avoir traversé un milieu désordonné une onde est déformée (speckle) mais contient de l'information sur le milieu qu'elle a traversé. Un des enjeux est d'extraire l'information de ce speckle. En particulier le degré d'hétérogénéité est une donnée importante, reflétée par le libre parcours moyen. Nous nous intéressons à la phase du champ complexe pour deux raisons: souvent seule l'amplitude est étudiée mais la phase peut constituer un apport d'information supplémentaire, de plus le traitement du signal est aisé car il n'est pas nécessaire de normaliser par rapport à l'intensité d'une source ou la sensibilité d'un capteur.

Etude statistique des dérivées

Hypothèse gaussienne

Diffusion multiple:



Champ complexe: $\Psi = A\exp(i\Phi) = \eta + i\xi$

Somme des ondes partielles: $\Psi = A\exp(i\Phi) = \sum_\alpha A_\alpha \exp(i\Phi_\alpha)$

Après quelques libres parcours moyens, la phase devient aléatoire, les ondes partielles indépendantes et en invoquant le théorème de la limite centrale:

$$P(\Psi_1,\ldots,\Psi_N) = \frac{1}{\pi^N det(C)} \exp\left(-[\Psi_1^*\ldots\Psi_N^*]\, C^{-1} \begin{bmatrix}\Psi_1\\ \vdots \\ \Psi_N\end{bmatrix}\right)$$

Distribution statistique

A partir de l'hypothèse Gaussienne on montre que pour les dérivées de la phase (qu'elles soient spatiales, temporelles ou fréquentielles:

$$P(\phi') = \frac{1}{2}\frac{Q}{[Q+\phi'^2]^{3/2}}$$

$$P(\phi',\phi'') = \frac{Q}{\pi}\frac{[4\phi'+R]^{3/2}}{[\phi''^2+(4\phi'^2+R)(\phi'^2+Q)]^2}$$

$$P(\phi',\phi'',\phi''') = F(Q,R,S)$$

Avec les coefficients qui dépendent de la nature des corrélations:

$$Q = -C''(0)$$

$$R = \frac{C''(0)^2 - C^{iv}(0)}{C''(0)}$$

$$S = \frac{C^{iv} - C''(0)^2}{-C^{vi}(0) + C^{iv}(0)^2/C''(0)}$$

Loi universelle de décroissance:

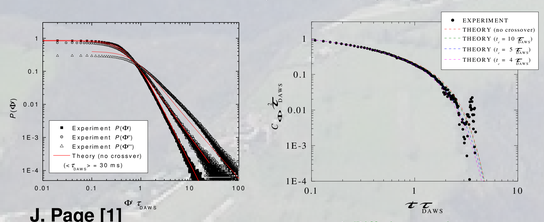
$$\begin{cases} P(\phi') \to \phi'^{-3} \\ P(\phi'') \to \phi^{-2} \\ P(\phi''') \to \phi'''^{-5/3} \end{cases}$$

Application à la DAWS[1]

La confrontation de ces lois de distribution avec les données expérimentales de John Page (Univ. Manitoba) en ultrasons pour des suspensions de bulles est encourageante.

L'ajustement des données et des comportements statistiques devrait permettre d'améliorer les mesures des temps caractéristiques de l'autocorrélation:

$$g(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{6}\frac{\tau^2/t_{DAWS}^2}{1+\tau^2/t_c^2}\right)$$



J. Page [1]

1: Diffusing acoustic wave spectroscopy

Nouvelle mesure du libre parcours moyen

Corrélation spatiale du champ

En présence de diffusion multiple, la fonction de corrélation spatiale est reliée à la fonction de Green entre deux points [2]:

$$C(x'-x'') = \langle \Psi(x',\omega)\Psi(x'',\omega)^*\rangle \sim \Im m G(x',x'',\omega)$$

Comportement:

$$C(x) = C(x'-x'') = \langle\Psi(x')\Psi(x'')^*\rangle = \begin{cases} J_0(kx)\exp(-x/2\ell) & (2D) \\ \mathrm{sinc}(kx)\exp(-x/2\ell) & (3D)\end{cases}$$

- Une décroissance exponentielle due à la diffusion multiple
- Des oscillations à l'échelle de la longueur d'onde sont dues à la superposition d'ondes planes avec des directions d'incidences arbitraires mais d'égale amplitude.

Corrélation spatiale de la phase

Φ la phase modulo 2π, est définie comme la phase complexe de la fonction d'onde.

En utilisant l'hypothèse Gaussienne pour les ondes multiplement diffusées, on montre que la corrélation spatiale de la première dérivée de la phase vérifie [3]:

$$C_{\Phi'} = \frac{1}{2}(logC)''log(1-C^2)$$

En particulier, pour les corrélations spatiales:

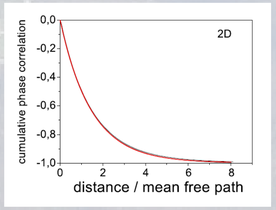
$$C_{\Phi'}(x>\lambda) \equiv \langle\Phi'(x')\Phi'(x'')\rangle \to \begin{cases}(k/\pi x)\exp(-x/\ell) & (2D)\\ (1/2x^2)\exp(-x/\ell) & (3D)\end{cases}$$

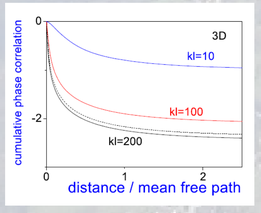
- Plus d'oscillations à l'échelle de la longueur d'onde.
- Possibilité de déterminer le libre parcours moyen du milieu.
- Les corrélations des dérivées de la phase contiennent l'information sur le libre parcours moyen. Des expériences sont en préparation à ce sujet.

Corrélation de la phase déroulée

La phase déroulée Φ_U est définie comme la phase complexe de la fonction d'onde corrigée des discontinuités de 2π :

$$C_{\Phi_U}(x) = \int_0^{-x/2} dx' \int_0^{x/2} dx'' C_{\Phi'}(x',x'')$$



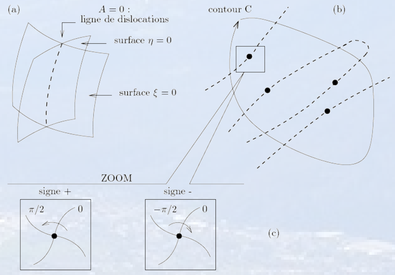


- 2D: décroissance exponentielle vers: $k\ell/\pi$
- 3D: L'asymptote a une variation logarithmique avec $k\ell$ [3]

Etude des dislocations

Charge topologique Q

Lorsque le champ s'annule: $\eta = 0$ et $\xi = 0$. L'amplitude A s'annule mais la phase Phi n'est pas définie. C'est une dislocation topologique. On lui attribue un signe.



Charge topologique d'une surface définie par un contour C:

$$Q = \sum_i q_i$$

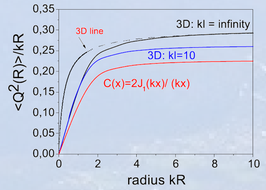
Calculer Q

Théorème de Stokes: $\oint_\Gamma d\mathbf{r}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{r}) = 2\pi Q$

$< Q >= 0$

Pour un disque:

$$\langle Q^2(R)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\theta' C_\Phi(\Delta\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Delta\theta\, C_\Phi(\Delta\theta)$$



3D: Comportement asymptotique de type diffusif

Cylindre infini conducteur

Hypothèses: $\ell = \infty$

Modes propres:

$$\Psi_{mnk}(\rho,\theta,z) \propto J_m\left(\frac{\alpha_{mn}\rho}{R}\right)\cos(m\theta)\exp(ikz) \;\mid\; J'_m(\alpha_{mn}) = 0$$

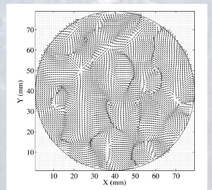
Fonction de Green:

$$G^\pm(\rho,\rho',\theta,\theta',z,z') = \sum_{m,n}\int dk \frac{\Psi_{mnk}(\rho,\theta,z)\Psi^*_{mnk}(\rho',\theta',z')}{\omega^2 - \omega(k)^2 \pm i\epsilon}$$

Fonction de corrélation angulaire:

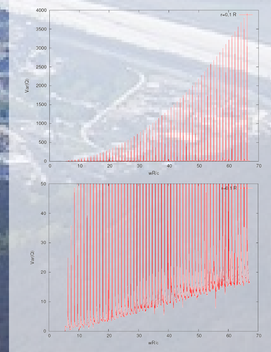
$$C(\theta,\omega) \propto \Im G$$

Image expérimentale micro-ondes:
Patrick Sebbah
Azriel Genack



Résonances de fluctuation de Q

La fonction de corrélation spatiale permet de calculer <Q²>:



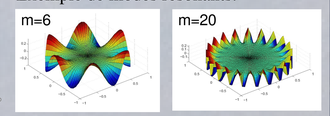
- Comportement globalement linéaire
- Résonnances d'amplitude quadratique

$$\omega_m R/c = \alpha_{m1} \sim m$$

$$C(\theta,\rho) \sim \cos(m\theta)$$

$$< Q^2 >_m = m^2$$

Exemple de modes résonants:



Conclusions et Perspectives

- Les distributions des dérivées de la phase présentent des décroissances en loi de puissance universelles, vraies quelle que soit la fonction de corrélation.
- L'utilisation des propriétés statistiques de la phase semble permettre d'affiner des mesures de temps caractéristiques données par la DAWS.
- Nous proposons une nouvelle technique de mesure du libre parcours moyen à partir de l'étude des corrélations de la phase.
- Des expériences sont en préparation pour mettre à l'épreuve cette technique.
- L'étude de la charge topologique Q révèle qu'elle contient de l'information sur le libre parcours moyen.
- De fortes fluctuations de charge topologique apparaissent et doivent être encore expliquées.

Références

[1] M.L. Cowan, I.P. Jones, J.H. Page, and D.A. Weitz. *Diffusing acoustic wave spectroscopy.* Physical Review E, 65, June 2002.

[2] B. Shapiro. *Large intensity fluctuations for wave propagation in random media.* Phys. Rev. Lett., 1986.

[3] B. A. van Tiggelen, D. Anache et A. Ghysels, *Role of Mean Free Path in Spatial Phase Correlation and Nodal Screening*, Europhys. Lett. **74** 999, 2006 .

[4] P. Sebbah, O.Legrand, B.A van Tiggelen, A.Z. Genack, *Statistics of the cumulative phase of microwaves in random media*, Phys. Rev. Lett. E. **56**, 1996.

mail: Domitille.Anache@grenoble.cnrs.fr

web: http://lpm2c.grenoble.cnrs.fr/People/Anache/