

STAGE MASTER 2
réalisé au
LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MODÉLISATION DES MILIEUX CONDENSÉS

mars – juin 2005

PROPAGATION DES ONDES SISMIQUES :
ANALYSE DE LA PHASE ALÉATOIRE

An GHYSELS

Sous la direction de

Bart van Tiggelen
CNRS/Université Joseph Fourier
Grenoble, France

Frank Verheest
Universiteit Gent
Gand, Belgique

Table des matières

Introduction	1
1 Le formalisme	3
1.1 Les équations	3
1.2 Solution de l'équation scalaire	4
1.2.1 Equation homogène	4
1.2.2 La fonction de Green	4
1.2.3 Source arbitraire	5
1.3 Champ diffus	5
1.4 Relation Fonction de Green et Corrélations	6
2 Champ scalaire aléatoire dans un milieu infini	8
2.1 Variables gaussiennes	8
2.2 Principe	9
2.3 Dérivées en un point	11
2.3.1 Distribution $P(A, \phi, \partial_x A, \partial_x \phi)$	11
2.3.2 Distribution $P(A, \phi, \partial_x A, \partial_x \phi, \partial_\alpha A, \partial_\alpha \phi)$	12
2.3.3 Distribution $P(\nabla \phi)$	13
2.4 Dérivées en deux points différents	14
2.4.1 Motivation	14
2.4.2 Résultat et discussion : $F(\mathbf{r})$	15
2.5 Application à la topologie	17
3 Champ élastique aléatoire dans un milieu infini	22
3.1 Polarisation élastique	22
3.2 Variables gaussiennes	23
3.3 Relation Fonction de Green et Corrélations	23
3.4 Distributions de base	25
3.5 Distributions de densités d'énergie	26
3.5.1 Energie cinétique E_c	26
3.5.2 Energie potentielle de compression E_p	27
3.5.3 Energie potentielle de cisaillement E_s	28
3.5.4 Remarques	29

Conclusion	31
Remerciements	32
A Calcul de $F(x, 0, 0)$	33

Introduction

La propagation d'une onde à travers un milieu désordonné est un phénomène bien connu [1] que l'on retrouve dans de nombreux domaines. En astrophysique, par exemple, dans le cadre de la propagation d'ondes électromagnétiques à travers des gaz interstellaires ou les atmosphères solaires et planétaires ; en sismologie avec la propagation d'ondes sismiques dans la Terre [2] ; lors de la conduction des électrons dans les métaux ; en imagerie médicale lors de la propagation d'ondes acoustiques ou électromagnétiques à travers les tissus humains [3] ; ou bien plus simplement, en regardant le soleil par un jour nuageux. Toutes ces disciplines semblent très éloignées les unes des autres par leurs problématiques et par leurs échelles respectives différentes (du nanomètre pour l'optique aux kilomètres pour la sismologie). Mais en réalité elles sont confrontées au même problème : à savoir comprendre comment se propage une onde à travers un nombre plus ou moins grand d'obstacles répartis de façon aléatoire.

Le degré d'hétérogénéité du milieu est une donnée fondamentale car il détermine la nature des phénomènes physiques observés. Par exemple, dans un bar très enfumé, la lumière des spots lumineux n'est pas multiples fois diffusée. En effet, il est toujours possible de suivre la direction de la lumière qui trace des chemins rectilignes. On dit que l'on est dans un régime de diffusion simple. Par contre, par un jour de très fort brouillard, le ciel apparaît uniformément lumineux, même en regardant dans la direction du soleil. La lumière a été diffusée de nombreuses fois et a complètement perdu la mémoire de sa direction initiale avant de nous parvenir. On est en présence de diffusion multiple.

Quatre longueurs caractéristiques sont introduites pour décrire la propagation d'une onde dans un milieu désordonné [4] : la longueur d'onde λ , le libre parcours moyen l , la longueur d'absorption L_a et la taille du système L .

Le libre parcours moyen l correspond à la distance moyenne entre deux diffusions de l'onde. Si les hétérogénéités dans le milieu diffusent d'une façon isotrope, cette distance est égale à la distance moyenne nécessaire pour qu'une onde perde la mémoire de sa direction initiale et de sa phase initiale. Elle est donnée par la relation $l = 1/n\Sigma$, où n est la densité de diffuseurs (m^{-3}) et Σ la section efficace totale des diffuseurs (m^2). Ainsi, le libre parcours moyen caractérise le degré de désordre du milieu. La propagation d'ondes classiques se fait généralement de façon cohérente : l'onde garde sa phase, mais elle est limitée par l'absorption. Si la taille du système L est suffisamment inférieure à la longueur de d'absorption L_a , l'atténuation des ondes par absorption peut être négligée.

Les phénomènes physiques sont totalement différents suivant les inégalités entre les quatre

longueurs λ , l , L_a et L . Au cours de ce stage, je me suis particulièrement intéressée au régime dit *mésoscopique de faible désordre* : $\lambda \ll l \ll L \ll L_a$. La première inégalité $\lambda \ll l$ signifie que deux diffusions consécutives de l'onde sont indépendantes. La deuxième inégalité $l \ll L$ est la condition pour être dans le régime de diffusion multiple. La troisième inégalité $L \ll L_a$ permet de négliger l'absorption.

Imaginons une onde incidente sur un milieu désordonné. Statistiquement, au bout d'un libre parcours moyen, l'onde rencontre une hétérogénéité et change de direction par diffusion. L'onde résultante va de nouveau se propager dans le milieu avant de rencontrer un nouveau diffuseur. Dans le régime mésoscopique de faible désordre, les multiples diffusions redistribuent aléatoirement la phase de l'onde, mais ne la détruisent pas. Voici l'argument principal pour considérer la *phase* de l'onde comme une *variable aléatoire*.

Théoriquement, la propagation d'une onde dans le régime particulier dit mésoscopique de faible désordre s'applique à tous les domaines de longueurs d'onde. Toutefois, en optique par exemple, la mesure de la phase, étant basée sur l'interférence de 2 faisceaux d'un laser de grande cohérence, est très difficile (et coûte cher) pour une longueur d'onde petite. Par contre, dans le cadre de la sismologie, la mesure de la phase n'est pas problématique. Ainsi au long de ce rapport, les liens entre théorie et pratique seront faits dans le cadre de la sismologie : la détermination du libre parcours moyen l est source d'informations pour les géophysiciens qui s'intéressent à la structure de la Terre.

Plan du rapport

Nous supposons que le champ ondulatoire complexe a une statistique gaussienne à cause de la présence du désordre, pour la raison physique que le champ est la superposition d'une infinité de chemins possibles dans le milieu. Il en suit une distribution uniforme entre 0 et 2π pour la phase ϕ du champ. Le sujet du stage est d'étudier les conséquences d'une telle supposition.

Au chapitre 1, le formalisme et les notations employés pour décrire les ondes sismiques seront présentés. En particulier l'équation d'onde, la décomposition en modes propres de la solution et la fonction de Green sont introduites. Les termes *champ diffus*, moyenne sur les sources et moyenne sur le désordre seront définis.

Au chapitre 2, le champ scalaire de distribution gaussienne est considéré. Les distributions conjointes du champ et ses dérivées, et en particulier les dérivées de la phase sont étudiées. Nous démontrerons que les dérivées de la phase ϕ dans deux certaines directions privilégiées ne sont pas des variables indépendantes : leur probabilité est liée par la distribution de l'amplitude. Le calcul du tenseur $F = \langle \nabla\phi(0)\nabla\phi(\mathbf{r}) \rangle$ a été réalisé. Nous verrons que la mesure de $F_{xx}(x, 0, 0)$ permet de faire une estimation du libre parcours moyen l . Puis un lien intéressant est établi avec la topologie. Lorsque l'amplitude du champ est nulle, sa phase est indéterminée, on parle alors d'une dislocation topologique. Le nombre de lignes de dislocations pénétrant une certaine surface dépend du libre parcours moyen l .

Au chapitre 3, le champ élastique avec son aspect vectoriel est considéré. Nous déterminerons la distribution de l'énergie cinétique, l'énergie de l'onde P et l'énergie de l'onde S. Leurs distributions complètes – et non seulement les moyennes – seront calculées.

A la fin du rapport, les conclusions les plus marquantes sont résumées.

Chapitre 1

Le formalisme

Ce chapitre introduit les équations étudiées et le vocabulaire employé dans le domaine de la diffusion multiple. Un vecteur sera noté par une lettre en gras. Une matrice ou un tenseur est noté par une majuscule non italique.

1.1 Les équations

L'équation de base en sismologie est l'équation d'onde dans un milieu élastique [5]. C'est une équation vectorielle : il y a une équation scalaire pour chaque composante du vecteur \mathbf{u} de déplacement. Les paramètres de Lamé λ et μ (N/m²) et la densité de masse ρ (kg/m³) caractérisent le milieu.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \mu \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.1)$$

Cette équation est trop compliquée pour être résolue analytiquement dans le cas général. Il faut utiliser une approche simplificatrice. Ainsi l'équation (1.1) se simplifie beaucoup si on néglige les gradients des paramètres de Lamé.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.2)$$

L'étude de l'équation (1.2), en tenant compte de l'aspect vectoriel, est reportée au troisième chapitre. Au premier et deuxième chapitre l'aspect vectoriel de cette équation est négligé : on se contente de l'étude de l'équation d'onde scalaire pour un champ scalaire $\Psi(\mathbf{r}, t)$. La double dérivée par rapport au temps et la double dérivée par rapport aux coordonnées de l'espace forment l'essentiel de l'équation (1.2). L'équation d'onde scalaire étudiée sera alors :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2(\mathbf{r}) \nabla^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (1.3)$$

supplémentée par des conditions de bord et des conditions initiales. La variable $v(\mathbf{r})$ est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu. On suppose que la vitesse ne dépend pas du temps t : le milieu est donc stationnaire.

Le paragraphe suivant discute la solution de l'équation d'onde scalaire (1.3). Trois cas particuliers sont envisagés : la source $S(\mathbf{r}, t)$ est premièrement nulle (§1.2.1), deuxièmement une fonction Dirac (§1.2.2), et troisièmement une source arbitraire (§1.2.3).

1.2 Solution de l'équation scalaire

1.2.1 Equation homogène

La solution de l'équation homogène (1.3) est une superposition de modes propres. Supposons que la séparation des variables \mathbf{r} et t soit possible. L'équation se décompose en deux équations :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r})T(t) \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} v^2(\mathbf{r})\nabla^2 R(\mathbf{r}) & = \alpha R(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} & = \alpha T(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

L'opérateur L est défini comme l'opérateur $v^2(\mathbf{r})\nabla^2$. Un nouvel opérateur hermitique symétrisé $\tilde{L} = \tilde{L}^*$ est introduit pour résoudre la première équation de (1.5). Soit $\tilde{\lambda}_n$ ses valeurs propres réelles (< 0) et $\tilde{u}_n(\mathbf{r})$ ses fonctions propres réelles, on a alors :

$$\tilde{L} = v(\mathbf{r})\nabla^2 v(\mathbf{r}) \quad \tilde{L} \tilde{u}_n(\mathbf{r}) = \tilde{\lambda}_n \tilde{u}_n(\mathbf{r}) \quad (1.6)$$

Les fonctions $\tilde{u}_n(\mathbf{r})$ forment une base complète pour l'espace. En comparant la définition de \tilde{L} (1.6) avec l'opérateur de départ $L = v^2(\mathbf{r})\nabla^2$, on constate que les valeurs propres λ_n et les fonctions propres $u_n(\mathbf{r})$ de L sont égales à $\tilde{\lambda}_n$ et à $v(\mathbf{r})\tilde{u}_n(\mathbf{r})$ respectivement.

$$L = v^2(\mathbf{r})\nabla^2 \quad L u_n(\mathbf{r}) = \lambda_n u_n(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

Puis on résout la deuxième équation de (1.5) pour $\alpha = \lambda_n$. On obtient

$$R_n(\mathbf{r}) = u_n(\mathbf{r}) \quad \text{associé à } \lambda_n \quad (1.8)$$

$$T_n(t) = A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t} \quad \text{associé à } \omega_n = \sqrt{-\lambda_n} \quad (1.9)$$

où A_n et B_n sont des constantes d'intégration arbitraires. Le champ étant réel, $A_n = B_n^*$, ce qui permet d'introduire de nouvelles constantes $a_n = 2A_n = 2B_n^*$, et on obtient alors finalement

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\sum_n a_n u_n(\mathbf{r}) e^{i\omega_n t} \right] \quad (1.10)$$

L'amplitude complexe a_n exprime l'excitation du mode n . Les a_n sont déterminés par les conditions initiales, alors par toutes les sources agissant antérieurement.

1.2.2 La fonction de Green

Le membre de droite de l'équation homogène (1.3) est remplacé par une source delta et les conditions limites sont choisies en respectant la causalité. La fonction de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ est le champ à l'endroit \mathbf{r} au moment t , si une source ponctuelle delta agit à l'endroit \mathbf{r}' au moment t' . Seul le milieu stationnaire est envisagé : G ne dépend donc que de la différence $t - t'$. Il existe plusieurs définitions pour G : signe \pm , facteur 4π ou non, ... Dans ce document elle est définie comme la solution de

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2(\mathbf{r})\nabla^2 \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') & = \delta(t - t')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ & + \text{ cond.init.} \end{cases} \quad (1.11)$$

La théorie [13] nous fournit la décomposition de G en fonctions propres. Deux des solutions possibles sont importants en physique : la solution causale (nulle pour $t < t'$) et la solution anticausale (nulle pour $t > t'$). Expérimentalement on aperçoit la solution causale, aussi appelée la fonction de Green retardée : la fonction échelon $\theta(t - t')$, qui est nulle pour $t < t'$, apparaît.

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t') = \sum_n u_n(\mathbf{r}_1) u_n(\mathbf{r}_2) \frac{\sin \omega_n(t - t')}{\omega_n} \theta(t - t') \quad (1.12)$$

1.2.3 Source arbitraire

Maintenant on introduit une source $S(\mathbf{r}, t)$.

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2(\mathbf{r}) \nabla^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \\ + \text{cond.init.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Se basant sur le principe de la superposition on écrit

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t) + \iint d\mathbf{r}' dt' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') S(\mathbf{r}', t') \quad (1.14)$$

avec $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ une solution de l'équation homogène. Les fonctions propres $u_n(\mathbf{r})$ de l'opérateur L forment une base complète, la solution peut alors être écrite avec des coefficients $a_n(t)$ qui dépendent du temps.

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\sum_n \alpha_n(t) u_n(\mathbf{r}) \right] = \Re \left[\sum_n a_n(t) e^{i\omega_n t} u_n(\mathbf{r}) \right] \quad (1.15)$$

1.3 Champ diffus

Un milieu désordonné contient des hétérogénéités qui diffusent les ondes incidentes. Le degré de désordre du milieu est caractérisé par le libre parcours moyen l , qui est la distance moyenne entre 2 diffusions de l'onde. Le terme *champ diffus* est interprété de différentes façons.

1. On pourrait penser que les hétérogénéités tendent à moyenniser les interférences. En réalité il n'en est rien et la figure d'interférence est tavelée (Figure 1.1a). Le champ en transmission est un 'speckle pattern' qui semble plus ne plus contenir d'information. Pourtant ces irrégularités de l'intensité n'ont rien de fortuit. Le champ diffus est le résultat de la superposition d'une infinité de chemins possibles qui contribuent tous, constructivement ou destructivement. Il s'agit bien d'un processus déterministe sans aucun aspect aléatoire. De fait, la figure d'interférences est très sensible au moindre déplacement d'un diffuseur, elle est l'empreinte digitale du désordre.
2. Les sources $S(\mathbf{r}, t)$ sont des variables aléatoires. Cela revient à supposer une statistique pour les coefficients a_n ou $a_n(t)$. Le bruit sismique par exemple est constitué de sources aléatoires avec une certaine statistique. La moyenne du champ sur l'ensemble des réalisations des sources, appelée la *moyenne sur les sources*, est

$$\langle \Psi \rangle = \iint d\mathbf{r}' dt' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \langle S(\mathbf{r}', t') \rangle \quad (1.16)$$

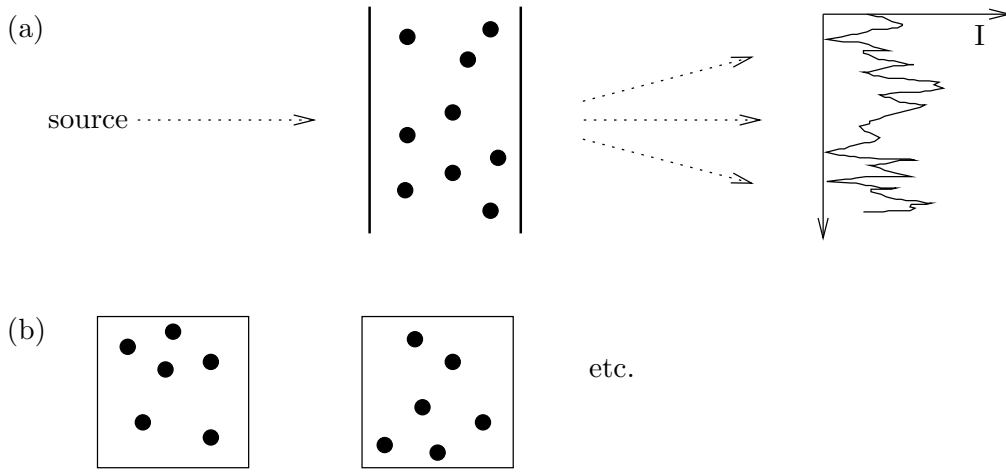


Fig. 1.1: (a) La propagation d'une onde à travers un milieu multiplesment diffusant génère une figure d'intensité I très complexe : speckle pattern. Les différents chemins de propagation interfèrent les uns avec les autres pour former une image tavelée. (b) Plusieurs réalisations du désordre sont possibles.

3. Le placement des hétérogénéités dans le milieu est une variable aléatoire [6]. On peut s'imaginer beaucoup de réalisations d'un même degré de désordre l (Figure 1.1b). De suite la fonction de Green est elle aussi une quantité aléatoire. La moyenne du champ sur l'ensemble des réalisations du désordre, appelée la *moyenne sur le désordre*, est

$$\langle \Psi \rangle = \iint d\mathbf{r}' dt' \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \rangle S(\mathbf{r}', t') \quad (1.17)$$

1.4 Relation Fonction de Green et Corrélations

Sources aléatoires

Admettons une statistique pour les coefficients a_n avec $\langle a_n a_m^* \rangle = \delta_{nm} F(\omega_n)$ et $\langle a_n a_m \rangle = 0$, où la moyenne est prise sur les sources. En comparant la corrélation entre deux champs $\Psi(\mathbf{r}_1, t)$ et $\Psi(\mathbf{r}_2, t + \tau)$, et la fonction de Green causale,

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\mathbf{r}_1, t) \Psi^*(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle &= \sum_n u_n(\mathbf{r}_1) u_n(\mathbf{r}_2) \cos \omega_n \tau \frac{F(\omega_n)}{2} \\ G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \sum_n u_n(\mathbf{r}_1) u_n(\mathbf{r}_2) \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n} \theta(\tau) \end{aligned} \quad (1.18)$$

on peut conclure que, pour $\tau > 0$, la corrélation est la dérivée de la fonction de Green à un facteur de déformation $F(\omega)/2$ près. Soit dans l'espace fréquentiel la corrélation du champ est proportionnelle à la partie imaginaire de la fonction de Green.

$$\boxed{\langle \Psi(\mathbf{r}_1, \omega) \Psi(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \sim \text{Im } G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)} \quad (1.19)$$

Souvent les modes propres ne sont pas discrets, ou pire, il y a un couplage entre le système et l'environnement de sorte que l'état du système ne peut plus être décrit par des modes propres (système ouvert). Weaver a établi [16] la même relation entre la fonction de Green et la corrélation sans faire appel aux modes propres.

Désordre aléatoire

Maintenant il s'agit de moyennes sur le désordre. Si G_0 est la fonction de Green du milieu effectif, c'est à dire d'un milieu homogène isotrope, on peut démontrer [6] que

$$\boxed{\begin{aligned} \langle G \rangle &= G_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2l}} \\ \langle \Psi(\mathbf{r}_1, \omega) \Psi(\mathbf{r}_2, \omega)^* \rangle &\sim \text{Im} \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \rangle \end{aligned}} \quad (1.20)$$

Discussion

L'identité (1.19) est très intéressante car elle permet de retrouver la fonction de Green exacte du milieu, sans source active en mesurant des corrélations. On parle de 'Passive Imaging', un domaine largement étudié [2], [7], [8]. Toutefois, de nombreuses questions sont soulevées, à savoir :

- Quelle configuration des sources est permise? Partout, sur une sphère, ponctuelle, ... [16]
- Quelle est la statistique des sources? Delta-corrélées ou non dans l'espace ou dans le temps. . .
- Comment estimer la moyenne sur les sources? Combien de mesures sont nécessaires pour avoir une variance acceptable?

L'identité (1.20) est également intéressante car elle lie les corrélations avec le libre parcours moyen l qui caractérise le degré de désordre. Il y a ainsi des applications directes : la sismologie en particulier s'intéresse à la structure de la Terre et son degré de désordre. Quelques questions restent à résoudre, comme par exemple :

- Comment déterminer l ?
- La statistique gaussienne pour le champ est-elle une bonne approximation? Discussion par Trégourès en [4], par Genack *et al* en [11].
- Comment estimer et interpréter la moyenne sur le désordre? Après tout, la Terre ne représente qu'une seule réalisation de l'ensemble.

Dans la suite du rapport, je vais particulièrement m'intéresser à la détermination de l . Entre les nombreuses probabilités conjointes basées sur la statistique gaussienne, il sera possible d'en choisir une qui convient à retrouver l .

Chapitre 2

Champ scalaire aléatoire dans un milieu infini

Ce chapitre étudie le champ scalaire dans un milieu infini et isotrope. On suppose que le désordre du milieu est aléatoire : il s'agit donc toujours de *moyennes sur le désordre*. Nous nous intéressons particulièrement à la statistique de la phase et de ses dérivées. Le rapport avec le libre parcours moyen l et le lien avec la topologie seront établis.

2.1 Variables gaussiennes

La transformée de Fourier du champ scalaire $\Psi(\mathbf{r}, t)$ sera notée $E(\mathbf{r}, \omega)$ ou simplement E . Ce nombre complexe a une partie réelle ξ et imaginaire η , une amplitude A et une phase ϕ . Soit :

$$u(\mathbf{r}, t) \rightarrow u(\mathbf{r}, \omega) = E = \xi + i\eta = Ae^{i\phi} \quad (2.1)$$

La dérivée par rapport à la coordonnée x sera notée ∂_x . La dérivée dans une certaine direction dans le plan (x, y) donnée par l'angle α par rapport à l'axe x est notée $\partial_\alpha = \cos \alpha \partial_x + \sin \alpha \partial_y$. L'hypothèse de distribution gaussienne [4] est basée sur le fait que le champ dans un milieu diffus est le résultat de la superposition d'une infinité de chemins : $\xi = \sum \xi_i$ et $\eta = \sum \eta_i$. Le Théorème de la Limite Centrale énonce que la distribution d'une somme de variables indépendantes avec distribution identique, tend vers une distribution gaussienne lorsque le nombre de termes dans la somme tend vers l'infini. On suppose alors que les variables complexes E_k suivent la *statistique gaussienne conjointe*. Une variable E_k est le champ au même point ou en 2 points différents, à la même fréquence ω ou à des fréquences différentes. D'après la théorie de la statistique gaussienne [10] la distribution s'écrit :

$$P(E_1, \dots, E_N) = \frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{C})} \exp \left(- \begin{bmatrix} E_1^* & \dots & E_N^* \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix} \right) \quad (2.2)$$

avec $C_{ij} = \langle E_i E_j^* \rangle$. La matrice de corrélation \mathbf{C} est hermitique.

On fait quand même la remarque que, en réalité, les chemins ne sont pas totalement indépendants, mais les effets sont en bonne approximation négligeables [4], lorsque le libre parcours moyen est beaucoup plus grand que la longueur d'onde ($l \gg \lambda$).

Une autre description consiste à dire que l'ensemble des parties réelles ξ_k et des parties imaginaires η_l sont des variables gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de même variance.

$$P(\xi_k, \eta_l) = P(\xi_k)P(\eta_l), \quad \langle \xi_k \rangle = \langle \eta_l \rangle = 0, \quad \langle \xi_k^2 \rangle = \langle \eta_l^2 \rangle \quad \forall k, l \quad (2.3)$$

La distribution gaussienne de $\xi(\mathbf{r})$ et de $\eta(\mathbf{r})$, $\forall \mathbf{r}$, implique que les dérivées spatiales de ξ et η sont aussi des variables gaussiennes, par exemple $\partial_x \xi$. Les dérivées de E sont donc également des variables gaussiennes complexes, et on peut remplacer les E_i de l'expression (2.2) par les dérivées du champ, par exemple $\partial_x E$.

2.2 Principe

Dans la suite de ce chapitre nous nous concentrons sur la statistique des dérivées, en particulier les dérivées de la phase. Ce concept est assez nouveau pour une raison pratique. Pour les ondes optiques (petite longueur d'onde $\lambda \sim \text{nm}$) il est très difficile pas possible de mesurer la phase. Jusqu'à maintenant la mesure de l'intensité était la seule source d'information. Par contre en sismologie (grande longueur d'onde $\lambda \sim \text{km}$) la mesure de la phase et de ses dérivées pourrait être effectuée sans problème : la phase peut facilement être obtenue à partir de la mesure du champ avec un traitement de signal. Bien que la mesure du champ fasse partie des expériences standards, on ne se sert pas de la phase au présent pour en déduire de l'information. Il est donc important de vérifier quelle information est contenue dans les corrélations de la phase et de ses dérivées.

Dans un milieu infini isotrope, la corrélation du champ $C(r) = \langle E(0)E(\mathbf{r})^* \rangle$ ne dépend que de la distance r . On suppose que l'intensité moyenne $\langle |E(\mathbf{r})|^2 \rangle$ ne dépend pas de l'endroit \mathbf{r} , alors on normalise la fonction de corrélation du champ tel que $C(0) = \langle |E(\mathbf{r})|^2 \rangle = 1$. L'expression (1.20) lie la corrélation $C(r)$ du champ à la partie imaginaire de la fonction de Green. Nous exprimons x, y, z et r en unité de k ($= 2\pi/\lambda =$ le nombre de l'onde) et employons le paramètre sans dimension $a = 2kl$. Avec $C'(r) = \partial_r C(r)$, $C''(r) = \partial_r C'(r)$:

$$\begin{aligned} \langle E(0)E(\mathbf{r})^* \rangle &= C(\mathbf{r}) = C(r) \\ &= \frac{\sin kr}{kr} e^{-r/2l} \longrightarrow \boxed{\frac{\sin r}{r} e^{-r/a}} \\ \langle E(0) \partial_x E(\mathbf{r})^* \rangle &= -\langle \partial_x E(0) E(\mathbf{r})^* \rangle = -\frac{\partial C}{\partial x}(\mathbf{r}) = -\frac{x}{r} C'(r) \\ \langle \partial_x E(0) \partial_x E(\mathbf{r})^* \rangle &= -\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(\mathbf{r}) = -\frac{x^2}{r^2} C''(r) - \frac{y^2 + z^2}{r^3} C'(r) \\ \langle \partial_x E(0) \partial_y E(\mathbf{r})^* \rangle &= -\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}) = -\frac{xy}{r^2} \left(C''(r) - \frac{C'(r)}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour obtenir les distributions de dérivées de la phase ou de l'amplitude, 2 méthodes peuvent être employées. La différence entre les deux est visualisée en Figure 2.1a-b. La deuxième méthode est souvent la plus simple.

Methode 1 : champ - champ

On construit d'abord la distribution conjointe $P(E_1, E_2)$ du champ en 2 points proches E_1 et E_2 à une distance u . Seules les quantités $\langle E_i E_j^* \rangle$ sont nécessaires pour construire la matrice de corrélation C . On fait tendre u vers zéro, en employant des développements limités en u (Figure 2.1a).

Finalement on effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} E_1 &= A e^{i\phi} \\ E_2 &= E_1 + u \partial_x E_1 \\ &= (A + u \partial_x A) e^{i(\phi + u \partial_x \phi)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$d\Re E_1 d\Im E_1 d\Re E_2 d\Im E_2 = |\det(\text{jacobien})| dA d\phi d\partial_x A d\partial_x \phi \quad (2.6)$$

ce qui donne la distribution $P(A, \phi, \partial_x A, \partial_x \phi)$.

Méthode 2 : champ - dérivée champ

On construit d'abord la distribution conjointe $P(E, \partial_x E)$ du champ E et de la dérivée du champ $\partial_x E$ au même point, qui est aussi une variable gaussienne (Figure 2.1b). Cette deuxième méthode est parfois plus élégante parce qu'elle évite les développements limités en u . Par contre la matrice de corrélation C peut apparaître plus difficile car elle contient des éléments $\langle E E^* \rangle$, $\langle E \partial_x E^* \rangle$ et $\langle \partial_x E \partial_x E^* \rangle$.

Finalement on effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} E &= A e^{i\phi} \\ \partial_x E &= (\partial_x A + iA \partial_x \phi) e^{i\phi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$d\Re E d\Im E d\Re(\partial_x E) d\Im(\partial_x E) = |\det(\text{jacobien})| dA d\phi d\partial_x A d\partial_x \phi \quad (2.8)$$

ce qui donne également la distribution $P(A, \phi, \partial_x A, \partial_x \phi)$.

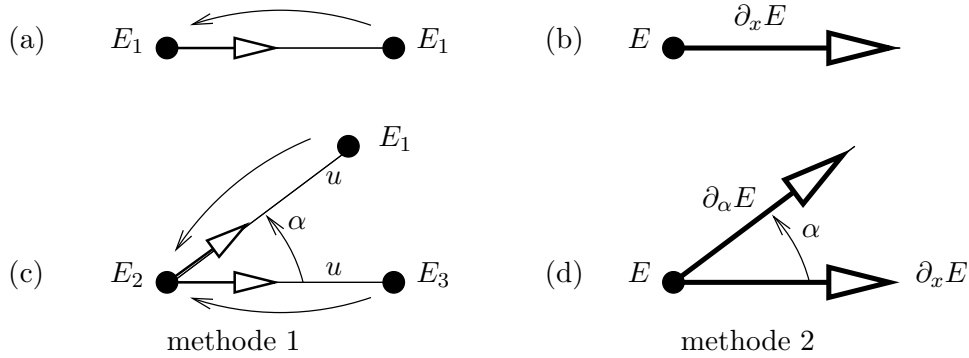


Fig. 2.1: (a) Configuration pour la construction de la probabilité des dérivées $\partial_x A$ et $\partial_x \phi$, selon méthode 1 : champ – champ. La distance u tend vers zéro. (b) Idem, selon méthode 2 : champ – dérivée de champ. (c) Configuration pour la construction de la probabilité des dérivées dans la direction x et la direction α , selon méthode 1. (d) Idem, selon méthode 2

2.3 Dérivées en un point

2.3.1 Distribution $P(A, \phi, \partial_x A, \partial_x \phi)$

Ce paragraphe montrera la démarche des deux méthodes en détail, pour bien comprendre leur principe. Appliquons la méthode 2 (champ - dérivée champ). La configuration est donnée par la Figure 2.1b. La distribution conjointe des 2 variables gaussiennes complexes s'écrit selon la formule (2.2) avec $N = 2$:

$$P(E, \partial_x E) = \frac{1}{\pi^2 \det(\mathbf{C})} \exp \left(- \begin{bmatrix} E^* & \partial_x E^* \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ \partial_x E \end{bmatrix} \right) \quad (2.9)$$

Les éléments de la matrice de corrélation \mathbf{C} étant :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \langle |E|^2 \rangle = \langle A^2 \rangle = C(0) = S \\ C_{12} &= \langle E \partial_x E^* \rangle = -\frac{\partial C}{\partial x}(0) = C_{21} = \langle \partial_x E E^* \rangle = \frac{\partial C}{\partial x}(0) = 0 \\ C_{22} &= \langle |\partial_x E|^2 \rangle = \langle \partial_x A^2 + A^2 \partial_x \phi^2 \rangle = -\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(0) = T \end{aligned} \quad (2.10)$$

La matrice de corrélation \mathbf{C} devient

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

d'où la distribution

$$P(E, \partial_x E) = \frac{1}{\pi^2 S T} \exp \left(-\frac{|E|^2}{S} - \frac{|\partial_x E|^2}{T} \right) \quad (2.12)$$

Le changement de variables fait intervenir le déterminant du Jacobien qui vaut A^2 .

$$\boxed{P(A, \phi, \partial_x A, \partial_x \phi) = \frac{A^2}{\pi^2 S T} \exp \left(-\frac{A^2}{S} - \frac{\partial_x A^2 + A^2 \partial_x \phi^2}{T} \right)} \quad (2.13)$$

La méthode 1 (champ - champ, Figure 2.1a) donne le même résultat. Les intégrations sur une ou plusieurs variables permettent de trouver les distributions suivantes :

$$P(A) = \frac{2A}{S} \exp \left(-\frac{A^2}{S} \right) \quad \text{avec } S = \langle A^2 \rangle = \langle I \rangle \quad (2.14)$$

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 < \phi < 2\pi \quad (2.15)$$

$$P(I = A^2) = \frac{\exp \left(-\frac{I}{S} \right)}{S} \quad (2.16)$$

$$P(A, \partial_x \phi) = \frac{2A^2}{S\sqrt{\pi T}} \exp \left(-\frac{A^2}{S} - \frac{A^2 \partial_x \phi^2}{T} \right) \quad (2.17)$$

$$P(\partial_x \phi | A) = \frac{A}{\sqrt{\pi T}} \exp \left(-\frac{A^2 \partial_x \phi^2}{T} \right) \quad (2.18)$$

$$P(\partial_x \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{T}} \frac{1}{\left[1 + \frac{S}{T} \partial_x \phi^2 \right]^{3/2}} \quad (2.19)$$

Conclusion :

Selon la statistique d'un champ diffus, les variables E et $\partial_x E$ sont indépendantes. Par contre les

variables A et $\partial_x \phi$ ne sont pas indépendantes. La variable $I = A^2$ a une distribution de Poisson. La variable ϕ a, comme prévu, une distribution uniforme. La valeur moyenne $\langle \partial_x \phi \rangle$ est nulle puisque la distribution $P(\partial_x \phi)$ est paire en $\partial_x \phi$. La moyenne $\langle |\partial_x \phi| \rangle$ existe et vaut $\sqrt{T/S} = 1/\sqrt{5}$ en unité de $2\pi/\lambda$. L'intégrale pour calculer la variance $\langle (\partial_x \phi)^2 \rangle$ diverge logarithmiquement et est alors égale à infini.

Les distributions ont été vérifiées expérimentalement pour les micro-ondes [11]. La théorie est tout à fait similaire pour la dérivée par rapport à la fréquence ω de $\phi(\mathbf{r}, \omega)$ au lieu de la dérivée par rapport à x . Les résultats sont excellents : les distributions de ϕ (2.15) et de $\partial_\omega \phi$ (2.18) sont respectées le long de 7 décades de fréquence ! Aussi a-t-on constaté une distribution gaussienne de $\partial_\omega \phi$ pour A fixe : la distribution conditionnelle $P(\partial_\omega \phi | A)$ est gaussienne en $\partial_\omega \phi$.

2.3.2 Distribution $P(A, \phi, \partial_x A, \partial_x \phi, \partial_\alpha A, \partial_\alpha \phi)$

L'étape suivante est l'étude de la distribution conjointe $P(\partial_x \phi, \partial_\alpha \phi)$ de la dérivée de la phase selon la direction x et de la dérivée de la phase selon la direction donnée par l'angle α par rapport à x ($\alpha \neq k\pi$), en un même point. La méthode 1 (champ - champ) part de la distribution conjointe $P(E_1, E_2, E_3)$ du champ en trois points différents (Figure 2.1c). La matrice correspondante est

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C(0) & C(u) & C(2u|\sin \frac{\alpha}{2}|) \\ C(u) & C(0) & C(u) \\ C(2u|\sin \frac{\alpha}{2}|) & C(u) & C(0) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

La méthode 2 (champ - dérivée champ) est ici néanmoins plus facile. Elle part de la distribution conjointe $P(E, \partial_x E, \partial_\alpha E)$ (Figure 2.1d). Les éléments de la matrice correspondante sont

$$\begin{aligned} C_{11} &= \langle |E|^2 \rangle &&= \langle A^2 \rangle = C(0) = S \\ C_{12} &= \langle E \partial_x E^* \rangle &&= -\frac{\partial C}{\partial x}(0) = 0 \\ C_{13} &= \langle E \partial_\alpha E^* \rangle &&= \langle E \partial_x E^* \rangle \cos \alpha + \langle E \partial_y E^* \rangle \sin \alpha \\ &&&= -\frac{\partial C}{\partial x}(0) \cos \alpha - \frac{\partial C}{\partial y}(0) \sin \alpha = 0 \\ C_{22} &= \langle |\partial_x E|^2 \rangle &&= \langle \partial_x A^2 + A^2 \partial_x \phi^2 \rangle = -\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(0) = T \\ C_{23} &= \langle \partial_x E \partial_\alpha E^* \rangle &&= \langle \partial_x E \partial_x E^* \rangle \cos \alpha + \langle \partial_x E \partial_y E^* \rangle \sin \alpha \\ &&&= -\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(0) \cos \alpha - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(0) \sin \alpha = T \cos \alpha \\ C_{33} &= \langle \partial_\alpha E \partial_\alpha E^* \rangle &&= \langle \partial_x E \partial_x E^* \rangle \cos^2 \alpha + \langle \partial_y E \partial_y E^* \rangle \sin^2 \alpha + \Re [\langle \partial_x E \partial_y E^* \rangle] \sin 2\alpha \\ &&&= -\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(0) \cos^2 \alpha - \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}(0) \sin^2 \alpha - \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(0) \sin 2\alpha = T \end{aligned}$$

d'où la matrice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & T & T \cos \alpha \\ 0 & T \cos \alpha & T \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

et la distribution

$$P(A, \phi, \partial_x A, \partial_x \phi, \partial_\alpha A, \partial_\alpha \phi) = \frac{A^3}{\pi^3 S T^2 (1 - \cos^2 \alpha)} \exp\left(-\frac{\partial_x A + \partial_\alpha A}{2T(1 + \cos \alpha)} - \frac{\partial_x A - \partial_\alpha A}{2T(1 - \cos \alpha)}\right) \exp\left(-\frac{A^2}{S}\right) \exp\left(-\frac{A^2(\partial_x \phi + \partial_\alpha \phi)^2}{2T(1 + \cos \alpha)} - \frac{A^2(\partial_x \phi - \partial_\alpha \phi)^2}{2T(1 - \cos \alpha)}\right) \quad (2.22)$$

et après intégration sur $A, \phi, \partial_x A$ et $\partial_\alpha A$:

$$P(\partial_x \phi, \partial_\alpha \phi) = \frac{S}{\pi T \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \left[1 + \frac{S}{T(1 - \cos^2 \alpha)} (\partial_x \phi^2 + \partial_\alpha \phi^2 - 2\partial_x \phi \partial_\alpha \phi \cos \alpha) \right]^{-2} \quad (2.23)$$

Conclusion :

Les variables $E, \partial_x E$ et $\partial_y E$ sont indépendantes. Les variables $A, \partial_x \phi$ et $\partial_y \phi$ ne sont pas indépendantes. Pourtant $P(\partial_x \phi, \partial_y \phi | A) = P(\partial_x \phi | A)P(\partial_y \phi | A)$, les variables sont donc couplées 'via l'amplitude A '. La corrélation $\langle \partial_x \phi \partial_y \phi \rangle$ est nulle à cause de la symétrie paire de $P(\partial_x \phi, \partial_y \phi)$ en $\partial_x \phi$ et $\partial_y \phi$. La corrélation $\langle |\partial_x \phi \partial_y \phi| \rangle$ est infinie. Enfin,

$$\langle \partial_x \phi \partial_\alpha \phi \rangle = \langle \partial_x \phi^2 \rangle \cos \alpha + \langle \partial_x \phi \partial_y \phi \rangle \sin \alpha = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \neq \pm\pi/2 \\ 0 & \text{si } \alpha = \pm\pi/2 \end{cases} \quad (2.24)$$

2.3.3 Distribution $P(|\nabla \phi|)$

Dans un premier temps nous regardons la projection du gradient de la phase $\nabla \phi$ sur un plan. Soit le vecteur $\nabla_{xy} \phi = [\partial_x \phi, \partial_y \phi, 0]$ représentant la projection du gradient de la phase sur le plan (x, y) . La norme du vecteur $\nabla_{xy} \phi$ est $|\nabla_{xy} \phi| = \sqrt{\partial_x \phi^2 + \partial_y \phi^2}$. La distribution $P(\partial_x \phi, \partial_y \phi)$ des composantes de $\nabla_{xy} \phi$ ne dépend que de la norme $|\nabla_{xy} \phi|$. On a donc :

$$P(|\nabla_{xy} \phi|) = 2\pi |\nabla_{xy} \phi| P(\partial_x \phi, \partial_y \phi) = 2 \frac{S |\nabla_{xy} \phi|}{T [1 + \frac{S}{T} |\nabla_{xy} \phi|^2]^2} \quad (2.25)$$

$$P(|\nabla_{xy} \phi|^2) = \frac{P(|\nabla_{xy} \phi|)}{2|\nabla_{xy} \phi|} = \frac{S}{T [1 + \frac{S}{T} |\nabla_{xy} \phi|^2]^2} \quad (2.26)$$

Dans un deuxième temps nous regardons le gradient $\nabla \phi$ complet (3D). Nous construisons la distribution conjointe pour les trois composantes de $\nabla \phi$:

$$P(E, \partial_x E, \partial_y E, \partial_z E) = \frac{1}{\pi^4 S T^3} \exp\left(-\frac{|E|^2}{S} - \frac{|\partial_x E|^2 + |\partial_y E|^2 + |\partial_z E|^2}{T}\right) \quad (2.27)$$

et après changement de variables et intégration sur $A, \phi, \partial_x A$ et $\partial_y A$ et $\partial_z A$:

$$P(\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi) = \frac{3}{4\pi} \sqrt{S/T}^3 \frac{1}{[1 + \frac{S}{T} |\nabla \phi|^2]^{5/2}} \quad (2.28)$$

d'où la distribution pour $|\nabla \phi| = \sqrt{\partial_x \phi^2 + \partial_y \phi^2 + \partial_z \phi^2}$

$$P(|\nabla \phi|) = 4\pi |\nabla \phi|^2 P(\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi) = 3\sqrt{S/T}^3 \frac{|\nabla \phi|^2}{[1 + \frac{S}{T} |\nabla \phi|^2]^{5/2}} \quad (2.29)$$

$$P(|\nabla \phi|^2) = \frac{P(|\nabla \phi|)}{2|\nabla \phi|} = 3/2 \sqrt{S/T}^3 \frac{|\nabla \phi|}{[1 + \frac{S}{T} |\nabla \phi|^2]^{5/2}} \quad (2.30)$$

Conclusion :

Les composantes de $\nabla\phi$ ne sont pas des variables indépendantes, contrairement à l'intuition. Ni $|\nabla_{xy}\phi|$ ni $|\nabla\phi|$ ne suivent une loi gaussienne mais une loi de puissance. La valeur moyenne $\langle|\nabla_{xy}\phi|\rangle$ est égale à $\pi/2\sqrt{T/S} = \pi/(2\sqrt{5})$, $\langle|\nabla\phi|\rangle$ est égale à $2\sqrt{T/S} = 2/\sqrt{5}$. Les moyennes $\langle|\nabla_{xy}\phi|^2\rangle$ et $\langle|\nabla\phi|^2\rangle$ sont bien sûr égales à l'infini.

2.4 Dérivées en deux points différents

2.4.1 Motivation

On a vu que la partie imaginaire de la fonction de Green $\langle G \rangle$ moyennée sur le désordre, qui dépend du libre parcours moyen l , est reliée à la corrélation du champ (2.4). Une première démarche serait de mesurer cette corrélation $C(r) = \frac{\sin r}{r} e^{-r/a}$ pour déterminer a ($= 2kl$). Malheureusement la dépendance de $\text{Im}\langle G \rangle$ de a est invisible à cause de l'amortissement du sinus cardinal, appelé déphasage directionnel. Le paramètre a est beaucoup plus grand que 1 (Figure 2.2). Il faut donc considérer une autre quantité. On propose la quantité $\langle\partial_x\phi(0)\partial_x\phi(x,0,0)\rangle$, représentant la corrélation entre les dérivées de la phase du champ, au lieu du champ même. L'expression exacte [12] peut être approximée lorsque la fonction de corrélation $C(r)$, sa dérivée $C'(r)$ et sa dérivée seconde $C''(r)$ sont petites pour $x \gg 1$. La quantité vaut alors

$$\langle\partial_x\phi(0)\partial_x\phi(x,0,0)\rangle \approx \frac{1}{2}[C'(x)^2 - C(x)C''(x)] \approx \frac{e^{-2x/a}}{2x^2} \quad (2.31)$$

Ce résultat permet effectivement de déterminer a !

Après avoir vérifié ce premier résultat, j'ai recherché d'autres corrélations pouvant s'avérer utiles, mon but final étant de pouvoir écrire le tenseur $F(\mathbf{r}) = \langle\nabla\phi(0)\nabla\phi(\mathbf{r})\rangle$, avec $F_{ij}(\mathbf{r}) = \langle\partial_i\phi(0)\partial_j\phi(\mathbf{r})\rangle$ comme éléments. Non seulement je me demande si ces corrélations contiennent de l'information (§ 2.4.2), mais je recherche également leurs liens avec la topologie (§ 2.5).

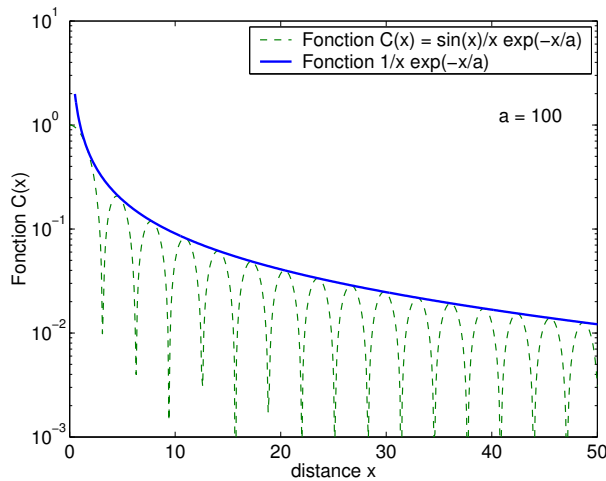


Fig. 2.2: Plot semilogarithmique, pour paramètre $a = 100$. Les oscillations de la fonction de corrélation du champ $C(x)$ rendent la dépendance $1/x \exp(-x/a)$ invisible.

2.4.2 Résultat et discussion : $F(\mathbf{r})$

Le calcul de $F(\mathbf{r})$ pour $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ a été une épreuve compliquée mais intéressante. Les détails se trouvent dans l'Annexe A. Le tenseur $F(x, 0, 0) = \langle \nabla\phi(0) \nabla\phi(x, 0, 0) \rangle$ est égal à :

$$F(x, 0, 0) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad \text{pour tout } x \quad (2.32)$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_1 = C_1(x) = \langle \partial_x \phi(0) \partial_x \phi(x, 0, 0) \rangle \\ C_2 = C_2(x) = \langle \partial_y \phi(0) \partial_y \phi(x, 0, 0) \rangle \end{cases} \quad (2.33)$$

et pour x grand

$$\begin{cases} C_1(x) \approx \frac{1}{2} [C'^2(x) - C(x)C''(x)] \\ C_2(x) \approx -\frac{C(x)C'(x)}{2x} \end{cases} \quad x \gg 1 \quad (2.34)$$

Interprétation

Interprétons le résultat (2.32). Si \mathbf{r} est le vecteur entre deux points 1 et 2, on peut définir trois directions perpendiculaires entre elles : une direction parallèle à \mathbf{r} (\parallel) et deux directions perpendiculaires à \mathbf{r} (\perp_1, \perp_2). Nous formulons 4 règles :

- La dérivée de la phase en 1 dans la direction parallèle à \mathbf{r} (notée $\partial_{\parallel}\phi_1$) est non corrélée avec la dérivée de la phase en 2 dans une direction perpendiculaire à \mathbf{r} (notée $\partial_{\perp_1}\phi_2, \partial_{\perp_2}\phi_2$) : $\langle \partial_{\parallel}\phi_1 \partial_{\perp_1}\phi_2 \rangle = \langle \partial_{\parallel}\phi_1 \partial_{\perp_2}\phi_2 \rangle = 0$.
- La dérivée de la phase en 1 dans une direction perpendiculaire à \mathbf{r} (notée $\partial_{\perp_1}\phi_1$) est non corrélée avec la dérivée de la phase en 2 dans l'autre direction perpendiculaire à \mathbf{r} (notée $\partial_{\perp_2}\phi_2$) : $\langle \partial_{\perp_1}\phi_1 \partial_{\perp_2}\phi_2 \rangle = 0$.
- La corrélation entre la dérivée de la phase en 1 dans la direction parallèle à \mathbf{r} (notée $\partial_{\parallel}\phi_1$) et la dérivée de la phase en 2 également dans la direction parallèle à \mathbf{r} (notée $\partial_{\parallel}\phi_2$) est égale à $\langle \partial_{\parallel}\phi_1 \partial_{\parallel}\phi_2 \rangle = C_1(|\mathbf{r}|)$.
- La corrélation entre la dérivée de la phase en 1 dans une direction perpendiculaire à \mathbf{r} (notée $\partial_{\perp_k}\phi_1$) et la dérivée de la phase en 2 dans la même direction perpendiculaire à \mathbf{r} (notée $\partial_{\perp_k}\phi_2$) est égale à $\langle \partial_{\perp_1}\phi_1 \partial_{\perp_1}\phi_2 \rangle = \langle \partial_{\perp_2}\phi_1 \partial_{\perp_2}\phi_2 \rangle = C_2(|\mathbf{r}|)$.

Attention, même si certaines corrélations entre les dérivées de la phase sont égales à nulles, aucune des variables n'est indépendante l'une de l'autre !

Généralisation

Maintenant reprenons le cas général $\mathbf{r} = (x, y, z)$ avec $r = |\mathbf{r}|$. Les dérivées par rapport aux coordonnées dans les directions x, y, z ($\partial_x, \partial_y, \partial_z$) peuvent toujours être exprimées en fonction des dérivées dans la direction parallèle à \mathbf{r} (∂_{\parallel}) et dans 2 directions perpendiculaires à \mathbf{r} ($\partial_{\perp_1}, \partial_{\perp_2}$). En fait, on projette les vecteurs unitaires selon les coordonnées cartésiennes $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ sur les vecteurs unitaires selon les coordonnées sphériques $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta\}$. Par exemple :

$$\partial_x = \cos\phi \sin\theta \partial_{\mathbf{e}_r} + \sin\phi \sin\theta \partial_{\mathbf{e}_\phi} + \cos\theta \partial_{\mathbf{e}_\theta} \quad (2.35)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \langle \partial_x \partial_x \rangle &= \cos^2 \phi \sin^2 \theta \langle \partial_{e_r} \partial_{e_r} \rangle + \sin^2 \phi \sin^2 \theta \langle \partial_{e_\phi} \partial_{e_\phi} \rangle + \cos^2 \theta \langle \partial_{e_\theta} \partial_{e_\theta} \rangle \\ &+ \dots \langle \partial_{e_r} \partial_{e_\phi} \rangle + \dots \langle \partial_{e_r} \partial_{e_\theta} \rangle + \dots \langle \partial_{e_\phi} \partial_{e_\theta} \rangle \end{aligned} \quad (2.36)$$

Les trois derniers termes de cette somme sont nuls, ce qui est facile à voir si on applique les 4 règles mentionnées ci-dessus. Les moyennes présentes dans les trois premiers termes sont égales à C_1 , C_2 et C_2 respectivement. On peut ensuite exprimer les cosinus et les sinus en fonction de x, y, z , de façon à trouver $F_{xx}(\mathbf{r})$. Suivant une même démarche pour tous les éléments de $F(\mathbf{r})$, on obtient le résultat général suivant :

$$F(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{r^2} C_1 + \frac{y^2+z^2}{r^2} C_2 & \frac{xy}{r^2} (C_1 - C_2) & \frac{xz}{r^2} (C_1 - C_2) \\ \frac{xy}{r^2} (C_1 - C_2) & \frac{y^2}{r^2} C_1 + \frac{x^2+z^2}{r^2} C_2 & \frac{yz}{r^2} (C_1 - C_2) \\ \frac{xz}{r^2} (C_1 - C_2) & \frac{yz}{r^2} (C_1 - C_2) & \frac{z^2}{r^2} C_1 + \frac{x^2+y^2}{r^2} C_2 \end{bmatrix} \quad \text{pour tout } r \quad (2.37)$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_1 = C_1(r) = \langle \partial_x \phi(0) \partial_x \phi(r, 0, 0) \rangle \\ C_2 = C_2(r) = \langle \partial_y \phi(0) \partial_y \phi(r, 0, 0) \rangle \end{cases} \quad (2.38)$$

et pour r grand

$$\begin{cases} C_1(r) \approx \frac{1}{2} [C'^2(r) - C(r)C''(r)] \\ C_2(r) \approx -\frac{C(r)C'(r)}{2r} \end{cases} \quad r \gg 1 \quad (2.39)$$

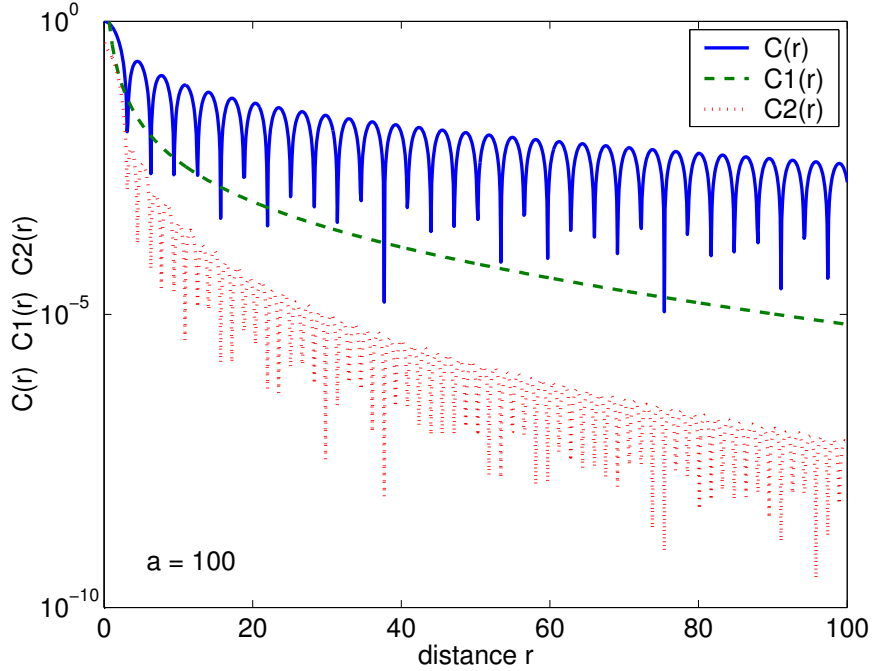


Fig. 2.3: Plot semilogarithmique, pour paramètre $a = 100$. $C(r)$ et $C_2(r)$ sont des fonctions oscillantes. La fonction $C_1(r)$ n'oscille pas.

Information dans $F(\mathbf{r})$

La Figure 2.3 compare la fonction de corrélation du champ $C(r)$ avec les fonctions $C_1(r)$ et $C_2(r)$, pour r grand. On constate immédiatement que la fonction $C_1(r) = \langle \partial_x \phi(0) \partial_x \phi(r, 0, 0) \rangle$ convient mieux à déterminer a ($a = 2kl$), puisqu'elle n'oscille pas. La fonction $C_2(r)$ oscille à cause du facteur $\sin 2r$, ce qui rend la dépendance $\exp(-2r/a)$ beaucoup moins visible. Pendant des mesures expérimentales il faut bien prendre garde à aligner les récepteurs sur une droite, sinon on mesure un mélange de $C_1(r)$ et $C_2(r)$.

La Figure 2.4 montre la dépendance de la fonction $C_1(r)$ avec le paramètre a . La pente de la courbe, à des distances $R > a$, est proportionnelle à a . Une représentation semilogarithmique de la fonction $C_1(r)$ multipliée par r^2 serait une droite de pente $-2/a$.

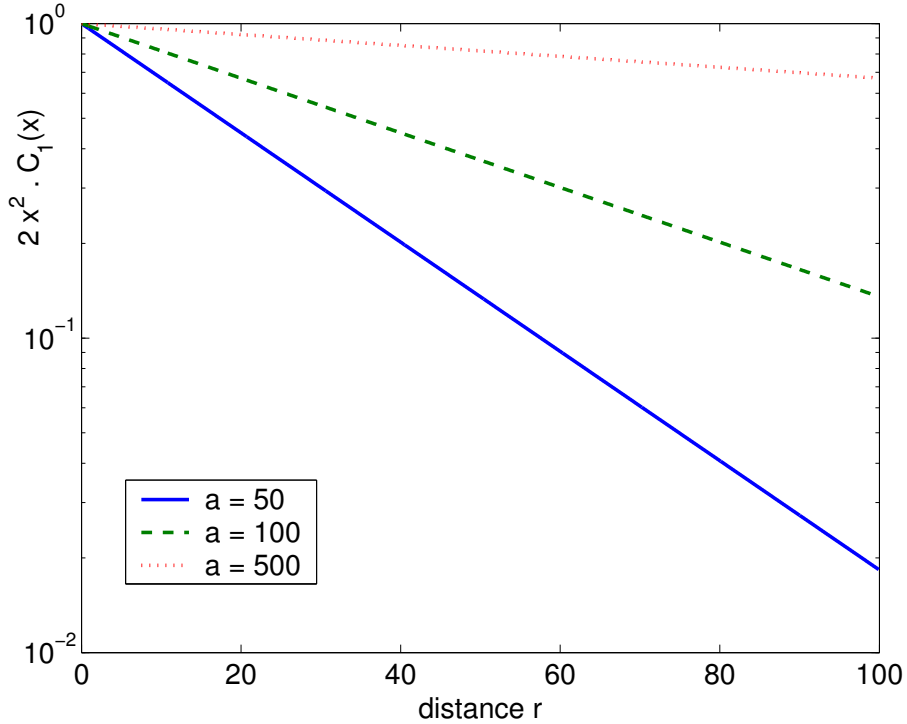


Fig. 2.4: Plot semilogarithmique de $2r^2 C_1(r)$ pour $a = 100$ et $a = 500$. La pente dépend de a .

2.5 Application à la topologie

Quand à la fois $\xi = 0$ et $\eta = 0$, le champ $\Psi = \xi + i\eta$ est nul. L'amplitude A est nulle mais la phase ϕ est indéterminée : il s'agit d'une dislocation topologique [22]. Les équations $\xi(\mathbf{r}) = 0$ et $\eta(\mathbf{r}) = 0$ représentent deux surfaces en 3D, dont l'intersection est une ligne de dislocations (Figure 2.5a). Les dislocations se trouvent sur le croisement de lignes de phase constante, appelées équiphases. En se promenant autour d'une ligne de dislocations on voit changer la phase par $m2\pi$, avec $m \in \mathbf{Z}$. On peut attribuer un signe à la ligne de dislocations (Figure 2.5c) selon le signe de la multiplicité m .

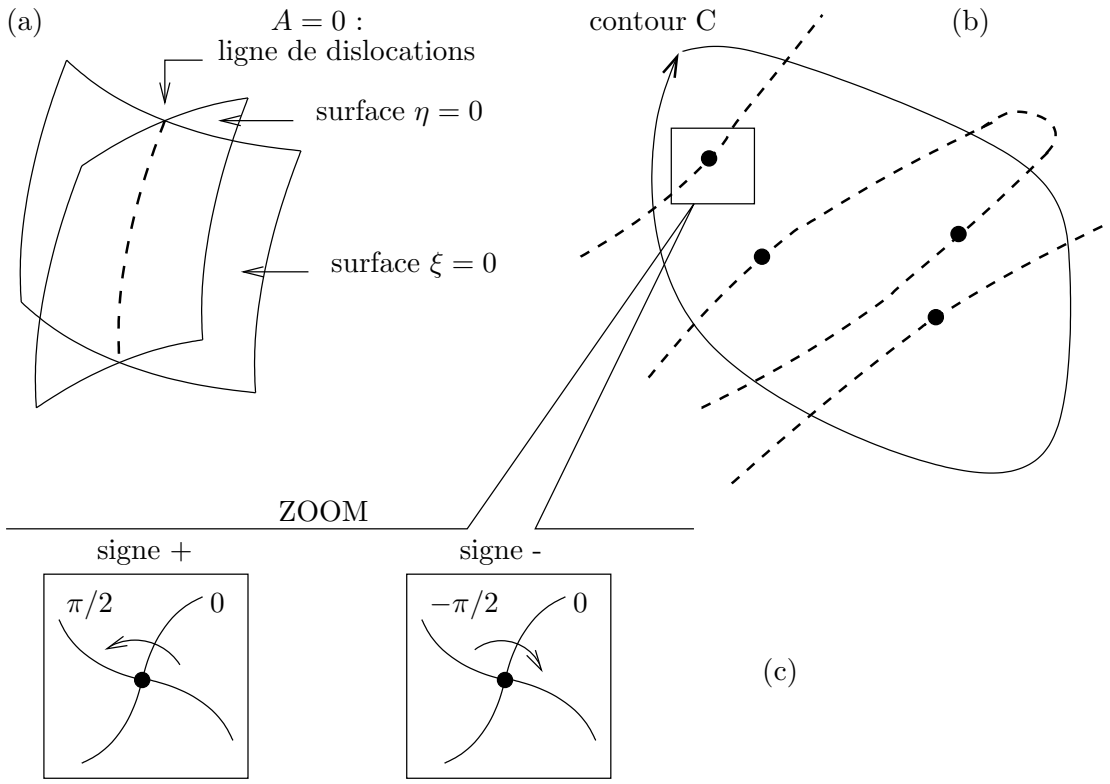


Fig. 2.5: Topologie. (a) Les dislocations se trouvent sur une ligne. (b) Définissons un contour C dans l'espace qui entoure plusieurs lignes de dislocations. (c) Les dislocations se trouvent sur l'intersection d'équiphases. On peut leur attribuer un signe.

Il est clair que le gradient $\nabla\phi$ atteint de très grandes valeurs autour de la ligne de dislocations. Ceci pourrait expliquer la loi de puissance (2.19), et non exponentielle, pour $P(\partial_x\phi)$. Les grandes valeurs de $\nabla\phi$ se manifestent dans la variance $\langle\langle\partial_x\phi\rangle\rangle^2$, qui diverge.

Soit une certaine surface A dans l'espace entourée par un contour C (Figure 2.5b). Les lignes de dislocations croisent la surface à des endroits discrets. La charge topologique Q de la surface A est le nombre de lignes de dislocations qui pénètrent la surface A , en tenant compte de la multiplicité m de chaque ligne. L'application du Théorème de Stokes donne [21] :

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_C \mathbf{ds} \cdot \nabla\phi \quad (2.40)$$

La valeur moyenne $\langle Q \rangle$ est nulle à cause de la symétrie paire de la distribution $P(\nabla\phi)$ en $\partial_x\phi$, $\partial_x\phi$ et $\partial_z\phi$. La variance $\langle Q^2 \rangle$ peut être exprimée en fonction du tenseur $F(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_C \oint_{C'} \mathbf{ds} \cdot \langle \nabla\phi(\mathbf{s}) \nabla\phi(\mathbf{s}') \rangle \cdot \mathbf{ds}' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_C \oint_{C'} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \cdot \mathbf{ds}' \end{aligned} \quad (2.41)$$

Calcul pour un cercle

Choisissons un cercle de rayon R comme contour. L'intégrand se réduit à une forme sans tenseur :

- $d\mathbf{s} \rightarrow R d\theta$
- $\nabla\phi \rightarrow \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}$ composante selon la tangente au cercle

On a donc

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_C \oint_{C'} R^2 d\theta d\theta' \left\langle \frac{1}{R^2} \frac{\partial\phi(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\phi(\theta')}{\partial\theta'} \right\rangle \quad (2.42)$$

$$= \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left\langle \frac{1}{R^2} \frac{\partial\phi(0)}{\partial\theta} \frac{\partial\phi(\theta)}{\partial\theta} \right\rangle \quad (2.43)$$

Maintenant on fait une remarque intéressante : les dérivées selon les tangentes à un même cercle, en deux points séparés par l'angle θ (Figure A.2a), sont équivalentes à des dérivées en deux points séparés par la distance $x = 2R |\sin\theta/2|$, où les dérivées forment un angle $\pm\theta/2$ avec l'axe x . Cette équivalence est illustrée par la Figure A.2 de l'Annexe A. Selon la formule (A.9) calculée dans l'Annexe A, on peut remplacer la moyenne dans l'intégrale (2.43) par $C_1(x) \cos^2\theta/2 - C_2(x) \sin^2\theta/2$, avec $x = 2R |\sin\theta/2|$. La variance de la charge topologique devient :

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{R^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta [C_1(x) \cos^2\theta/2 - C_2(x) \sin^2\theta/2] \quad (2.44)$$

et en changeant de variables ($u = \sin\theta/2$)

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{2R^2}{\pi} \int_0^1 du C_1(2Ru) \sqrt{1-u^2} - \frac{2R^2}{\pi} \int_0^1 du C_2(2Ru) \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} \quad (2.45)$$

On connaît le comportement asymptotique des fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ pour $x \gg 1$. Alors on divise l'intervalle d'intégration $[0, 2R]$ en deux parties : $[0, 1/2R]$ et $[1/2R, 1]$. Nous nous intéressons au cas où R tend vers l'infini. Dans le premier intervalle d'intégration, $u \in [0, 1/2R]$, on a donc le droit de négliger $1/2R$ devant 1. Ainsi la variance de Q compte 4 termes.

$$\langle Q^2 \rangle \stackrel{R \rightarrow \infty}{=} \frac{R^2}{2\pi} \left[\int_0^{1/2R} du C_1(2Ru) + \int_{1/2R}^1 du C_1(2Ru) \sqrt{1-u^2} \right. \\ \left. - \int_0^{1/2R} du C_2(2Ru) u^2 - \int_{1/2R}^1 du C_2(2Ru) \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} \right] \quad (2.46)$$

Discussion des 4 termes

- Le premier terme est l'intégrale de la fonction $C_1(x)$ qui diverge logarithmiquement [20] en $x = 0$. Supposons que cette intégrale existe : elle est égale à une constante k_1 qui peut dépendre de a . Le premier terme est donc linéaire en R .

$$\frac{R^2}{2\pi} \int_0^{1/2R} du C_1(2Ru) = \frac{R}{\pi} \int_0^1 dy C_1(y) = k_1(a) R \quad (2.47)$$

- Dans le deuxième terme, on remplace $C_1(x)$ par sa forme asymptotique $\frac{e^{-2x/a}}{2x^2}$. L'intégration a été faite numériquement avec Matlab (Figure 2.6). Dans la figure, cette partie de la variance divisée par R est tracée pour deux différentes valeurs de a en fonction de R/a . Apparemment

la courbe converge vers un plateau après une distance caractéristique $R = a$. Le deuxième terme est donc linéaire en R , et la constante de proportionnalité k_2 dépend de a .

$$\frac{R^2}{2\pi} \int_{1/2R}^1 du C_1(2Ru) \sqrt{1-u^2} \approx \frac{1}{4\pi} \int_{1/2R}^1 du e^{-4Ru/a} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2} \approx k_2(a) R \quad (2.48)$$

- Le troisième terme est l'intégrale de $C_2(x)$ qui diverge pour $x = 0$. L'intégrabilité de cette fonction n'a pas encore été étudiée! Si l'intégrale de $C_2(x)$ existe, le troisième terme est linéaire en R^{-1} .

$$\frac{-R^2}{2\pi} \int_0^{1/2R} du C_2(2Ru) u^2 = \frac{-1}{4\pi R} \int_0^1 dy C_2(y) y^2 \stackrel{?}{=} k_3(a) R^{-1} \quad (2.49)$$

- Dans le quatrième terme, on remplace $C_2(x)$ par sa forme asymptotique $\frac{e^{-2x/a}}{2x^3} \sin x (\cos x - \sin x/x - \sin x/a) \approx \frac{e^{-2x/a}}{4x^3} \sin 2x$. L'intégration a été faite numériquement avec Matlab, mais sans résultat clair. L'intégrand diverge pour le bord $x = 1$, ce qui pose des problèmes pendant l'intégration numérique. La Figure 2.6 trace le quatrième terme de la variance multiplié par R . A part des instabilités numériques, on voit que cette quantité est plus ou moins égale à une constante k_4 qui dépend de a . Toutefois, il faudra étudier l'intégrale plus précisément, et essayer d'autres algorithmes pour l'intégration numérique.

$$\frac{-R^2}{2\pi} \int_{1/2R}^1 du C_2(2Ru) \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} \approx \frac{-1}{16\pi R} \int_{1/2R}^1 du e^{-4Ru/a} \frac{\sin 4Ru}{u\sqrt{1-u^2}} \stackrel{??}{\approx} k_4(a) R^{-1} \quad (2.50)$$

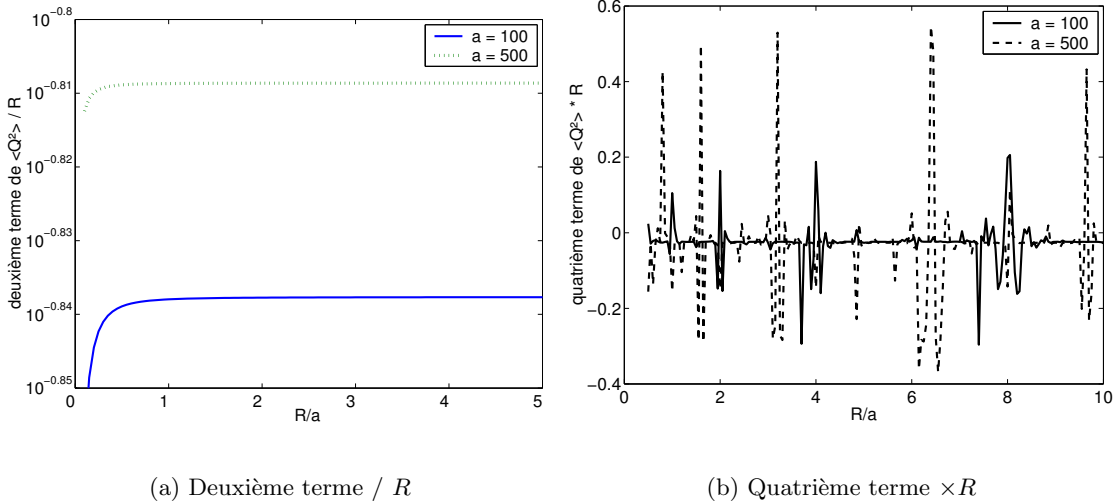


Fig. 2.6: (a) Plot semilogarithmique du deuxième terme divisé par R en fonction de R/a . Le plateau dépend de a . (b) Plot du quatrième terme multiplié par R en fonction de R/a . Les instabilités numériques masquent la tendance générale de la fonction.

Conclusion

Le comportement asymptotique ($R > a$) de la variance $\langle Q^2 \rangle$ a une partie proportionnelle à R , et une partie qui *semble* proportionnelle à R^{-1} .

$$\begin{aligned}\langle Q^2 \rangle &= k_1(a) R + k_2(a) R + k_3(a) R^{-1} + k_4(a) R^{-1} & R > a \\ &= f(a) R + g(a) R^{-1}\end{aligned}\tag{2.51}$$

Berry [21] a calculé $\langle Q^2 \rangle$ d'une autre façon, en employant une fonction de corrélation paire et une intégration où les bornes sont Gauss moyennées. Il conclut que $\langle Q^2 \rangle$ tend vers une constante plus un terme proportionnel à R^{-1} . Nous n'avons pas réussi à expliquer la raison pour laquelle les conclusions sont différentes, ni de savoir laquelle des deux est juste.

Les constantes k_i dépendent du libre parcours moyen ($a = 4kl$). Une prochaine chose à faire, est d'étudier cette dépendance. Pourra-t-on déterminer a en comptant le nombre lignes de dislocations pénétrant une surface A? Le degré de désordre du milieu est-il directement lié avec ce nombre de lignes? Aussi serait-il intéressant de tracer $\langle Q^2 \rangle$ dans le cas 2D. La fonction de corrélation du champ $C(r)$ est alors une fonction de Bessel.

Ce qui concerne les applications expérimentales de cette théorie prometteuse en sismologie, il faut quand même faire une remarque. Même si on réussit à établir la dépendance des constantes k_i de a , en pratique il ne sera pas toujours possible d'en déduire une méthode pour la détermination de a . Compter le nombre de lignes de dislocations nécessite la mesure du champ partout sur la surface A de rayon $R > a$. Pour les longueurs d'onde de l'ordre 1 km, le libre parcours moyen est de l'ordre 200 km, et il faudrait alors mesurer le champ dans un cercle de rayon de 200 km... La vérification de la théorie devra être effectuée avec de petites longueurs d'onde, pour lesquelles le libre parcours moyen est considérablement plus petit. Par exemple avec les micro-ondes, ou avec les 'hautes fréquences' en sismologie où le libre parcours moyen est de l'ordre 10 m.

Chapitre 3

Champ élastique aléatoire dans un milieu infini

Dans ce chapitre l'aspect vectoriel du champ élastique dans un milieu infini et isotrope, est pris en compte. On suppose que le désordre est aléatoire, il s'agit donc toujours de *moyennes sur le désordre*. Nous déterminerons la distribution de l'énergie cinétique, de l'énergie de l'onde P et de l'énergie de l'onde S.

3.1 Polarisation élastique

Après avoir travaillé avec l'équation scalaire dans les chapitres précédents, on peut revenir à l'équation d'onde de départ (1.1). Cette équation est trop difficile pour être résolue analytiquement. On simplifie l'équation en négligeant les gradients des paramètres de Lamé : $\nabla\mu \approx \nabla\lambda \approx 0$. Dans cette approche, l'équation (1.1) se réécrit :

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3.1)$$

Toutefois, dans ce chapitre, on ne négligera pas l'aspect vectoriel de l'équation : les forces volumiques \mathbf{f} (N/m³) et le vecteur de déplacement \mathbf{u} (m) comptent trois composantes $[f_x, f_y, f_z]$ et $[u_x, u_y, u_z]$ respectivement. Le théorème de Lamé [5] écrit la solution de (3.1) avec l'aide d'un potentiel scalaire ϕ et un potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$.

Théorème de Lamé Si les forces volumiques peuvent être exprimées comme $\mathbf{f} = \nabla A + \nabla \times \mathbf{B}$ avec $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, il existe un potentiel scalaire ϕ et un potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$, tel que

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} - \alpha^2 \nabla^2 \phi &= A/\rho & \text{avec} & \quad \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ \ddot{\boldsymbol{\psi}} - \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} &= \mathbf{B}/\rho & \text{avec} & \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (3.3)$$

ϕ et $\boldsymbol{\psi}$ sont appelés des potentiels de Helmholtz.

$\nabla\phi$ est la partie *longitudinale* (onde P : première) de \mathbf{u} . Sa vitesse de propagation α étant la plus grande, cette partie se propage le plus rapidement. Il s'agit de l'onde de compression : le déplacement est parallèle à la direction de propagation.

$\nabla \times \boldsymbol{\psi}$ est la partie *transverse* (onde S : secondaire) de \mathbf{u} . Elle a une vitesse de propagation β qui est inférieure à celle de l'onde P. Le déplacement est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. On parle de l'onde de cisaillement. On peut choisir $\boldsymbol{\psi}$ tel que $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$.

Fonction de Green dans un milieu infini, homogène, isotrope

La fonction de Green élastique est un tenseur de rang 2. On note $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ pour un milieu stationnaire, dont les propriétés ne dépendent pas du temps. L'élément $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)_{ki}$ est la composante $u_k(\mathbf{r}, t)$ du déplacement à l'endroit \mathbf{r} au moment t , étant donnée une force $\delta(t)$ à l'endroit \mathbf{r}' dans la direction i .

D'après le Théorème de Lamé, la fonction de Green peut être écrite comme la somme de l'onde P et de l'onde S. Pourtant il est commode de faire une décomposition en trois termes : l'onde P champ lointain, l'onde S champ lointain et le champ proche [5].

$$\mathbf{G}_{ki} = \mathbf{G}_{ki}^{Pfar} + \mathbf{G}_{ki}^{Sfar} + \mathbf{G}_{ki}^{near} \quad (3.4)$$

Le champ proche a une dépendance r^{-3} tandis que le champ S lointain et P lointain ont une dépendance r^{-1} . Le champ lointain est un mélange de déplacement longitudinal (P) et transversal (S) par rapport à la direction de propagation.

3.2 Variables gaussiennes

Les notations sont identiques à celles du deuxième chapitre.

La transformée de Fourier du vecteur $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ est le vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, aussi noté \mathbf{E} . Un indice fait toujours référence à une composante. Par exemple E_k est la composante k du vecteur \mathbf{E} ($k=x, y, z$). Chaque composante a une partie réelle ξ_k et imaginaire η_k , une amplitude A_k et une phase ϕ_k .

$$u_k(\mathbf{r}, t) \rightarrow u_k(\mathbf{r}, \omega) = E_k = \xi_k + i\eta_k = A_k e^{i\phi_k} \quad (3.5)$$

La dérivée par rapport à la coordonnée m ($m=x, y, z$) sera notée ∂_m . Attention, la convention de Einstein concernant la sommation sur les indices répétés n'est *pas* appliquée. Pour les mêmes raisons que celles du deuxième chapitre, on propose une distribution gaussienne pour chaque ξ_k, η_k et toutes ses dérivées spatiales.

3.3 Relation Fonction de Green et Corrélations

Le même raisonnement que pour l'équation scalaire est valable (cfr. équation 1.20). La corrélation entre deux composantes E_k et E_l est proportionnelle à la partie imaginaire de la moyenne de l'élément \mathbf{G}_{kl} . La moyenne est prise sur l'ensemble des réalisations du désordre, et peut être

exprimée en fonction du libre parcours moyen l . Si G_0 est la fonction de Green d'un milieu homogène et isotrope, on peut démontrer que

$$\langle E_k(\mathbf{r}, \omega) E_l^*(\mathbf{r}', \omega) \rangle \sim \text{Im} \langle G_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \rangle \quad (3.6)$$

$$\sim \text{Im} G^0_{kl}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2l}} \quad (3.7)$$

La partie imaginaire de G_0 est composée de deux parties. Avec $r = |\mathbf{r}|$ et \mathbf{l} le tenseur d'unité :

$$\text{Im} G^0 = \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} P(r) + \mathbf{l} Q(r) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } P(r) &= \frac{\omega}{4\pi\rho\alpha^3} \left[\frac{\sin(\omega r/\alpha)}{\omega r/\alpha} + 3 \frac{\cos(\omega r/\alpha)}{(\omega r/\alpha)^2} - 3 \frac{\sin(\omega r/\alpha)}{(\omega r/\alpha)^3} \right] \\ &\quad - \frac{\omega}{4\pi\rho\beta^3} \left[\frac{\sin(\omega r/\beta)}{\omega r/\beta} + 3 \frac{\cos(\omega r/\beta)}{(\omega r/\beta)^2} - 3 \frac{\sin(\omega r/\beta)}{(\omega r/\beta)^3} \right] \\ Q(r) &= \frac{\omega}{4\pi\rho\alpha^3} \left[\frac{\cos(\omega r/\alpha)}{(\omega r/\alpha)^2} - \frac{\sin(\omega r/\alpha)}{(\omega r/\alpha)^3} \right] \\ &\quad - \frac{\omega}{4\pi\rho\beta^3} \left[\frac{\sin(\omega r/\beta)}{\omega r/\beta} + \frac{\cos(\omega r/\beta)}{(\omega r/\beta)^2} - \frac{\sin(\omega r/\beta)}{(\omega r/\beta)^3} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour les matrices de corrélation C , nécessaires pour la construction de différentes distributions conjointes (formule 2.2), on aura besoin des limites en r tendant vers zéro. Pour r petit, la description (3.7) avec l'exponentiel $\exp(-r/2l)$ n'est plus valable, donc on a le droit de prendre les limites de $\text{Im}G^0$ au lieu de $\text{Im}\langle G \rangle$. Le développement en r pour r petit est de la forme suivante (avec c_1, c_2, c_3 des constantes) :

$$P(r) = c_1 r^2 + \dots \quad (3.10)$$

$$Q(r) = c_2 + c_3 r^2 + \dots \quad (3.11)$$

$$\text{Im} G^0 = \mathbf{r}\mathbf{r} c_1 + \mathbf{l} c_2 + \mathbf{l} c_3 r^2 + \dots \quad (3.12)$$

Les limites $r \rightarrow 0$ deviennent (notation : S, U, V, W pour les limites non nulles)

$$\langle |E_k|^2 \rangle = \text{Im} G^0_{kk}(0) = S = \langle A_k^2 \rangle = \omega/(4\pi\rho) 1/3 (1/\alpha^3 + 2/\beta^3) \quad (3.13)$$

$$\langle E_k E_l^* \rangle = \text{Im} G^0_{kl}(0) = 0 \quad (k \neq l) \quad (3.14)$$

$$\langle E_k \partial_n E_l^* \rangle = -\frac{\partial \text{Im} G^0_{kl}}{\partial n}(0) = 0 \quad (\forall k, l, n) \quad (3.15)$$

On distingue différents cas pour la corrélation entre deux dérivées du champ :

$$\langle \partial_m E_k \partial_n E_l^* \rangle = -\frac{\partial^2 \text{Im} G^0_{kl}}{\partial m \partial n}(0) \quad : \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \partial_k E_k \partial_k E_k^* \rangle = U = \langle (\partial_k A_k)^2 \rangle = \omega^3/(4\pi\rho) 1/15 (3/\alpha^5 + 2/\beta^5) \\ \langle \partial_m E_k \partial_m E_k^* \rangle = V = \langle (\partial_m A_k)^2 \rangle = \omega^3/(4\pi\rho) 1/15 (1/\alpha^5 + 4/\beta^5) \\ \langle \partial_m E_k \partial_k E_m^* \rangle = W = \langle \partial_k E_k \partial_m E_m^* \rangle = \omega^3/(4\pi\rho) 1/15 (1/\alpha^5 - 1/\beta^5) \\ \text{les autres : } = 0 \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Remarquez que $W < 0$ et que $V > U > |W|$.

3.4 Distributions de base

Le but est de construire la distribution des densités d'énergie élastique. Le mot 'densité' doit être interprété comme l'énergie par unité de volume et par intervalle de fréquence ω : il s'agit de la densité spectrale. Dans la littérature les moyennes des densités d'énergie élastique sont bien connues [4]. Nous envisageons de calculer la distribution *complète* des densités d'énergie, à partir de la statistique gaussienne.

De façon générale, pour un déplacement $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, les densités d'énergie cinétique E_c , potentielle de compression E_p et potentielle de cisaillement E_s sont définies [5] par les relations :

$$E_c \equiv \frac{1}{2}\rho\omega^2|\mathbf{E}|^2 \quad (3.18)$$

$$E_p \equiv \frac{1}{2}\rho\alpha^2|\nabla \cdot \mathbf{E}|^2 \quad (3.19)$$

$$E_s \equiv \frac{1}{2}\rho\beta^2|\nabla \times \mathbf{E}|^2 \quad (3.20)$$

Il faudra donc chercher les distributions de $|\mathbf{E}|^2$, de $|\nabla \cdot \mathbf{E}|^2$ et de $|\nabla \times \mathbf{E}|^2$. Avant de considérer ces distributions, on regarde de plus proche la distribution du champ même et les distributions des dérivées du champ.

Le champ même

Les composantes E_x , E_y et E_z sont trois variables gaussiennes indépendantes.

$$P(E_x, E_y, E_z) = P(E_x)P(E_y)P(E_z) \quad (3.21)$$

$$\text{avec } P(E_k) = \frac{1}{\pi S} \exp\left(-\frac{|E|^2}{S}\right) \quad (3.22)$$

avec S défini par (3.13) : $S = \langle |E_k|^2 \rangle$. Le changement de variables vers A_k et ϕ_k montre que les amplitudes A_x , A_y et A_z et les phases ϕ_x , ϕ_y et ϕ_z aussi sont toutes des variables indépendantes.

$$P(A_x, A_y, A_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z) = P(A_x)P(A_y)P(A_z)P(\phi_x)P(\phi_y)P(\phi_z) \quad (3.23)$$

$$\text{avec } P(A_k) = \frac{2A_k}{S} \exp\left(-\frac{A_k^2}{S}\right) \quad (3.24)$$

$$P(\phi_k) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 < \phi < 2\pi$$

L'amplitude moyenne $\langle A_k \rangle$ est égale à $\sqrt{\pi S}/2$ et la moyenne $\langle A_k^2 \rangle$ est égale à S .

Les dérivées du champ

On peut toujours factoriser la distribution conjointe $P(E_l, \partial_m E_k)$ en $P(E_l)P(\partial_m E_k)$, ainsi une composante du champ E_l et une dérivée de la même ou d'une autre composante du champ $\partial_m E_k$ sont toujours indépendantes. Pour $k = m$ la variable $\partial_k E_k$ a une distribution gaussienne de moyenne $\langle |\partial_k E_k|^2 \rangle$ égale à U , avec U donné par (3.17). Quand $m \neq k$ la variable $\partial_m E_k$ a

aussi une distribution gaussienne mais de moyenne $\langle |\partial_m E_k|^2 \rangle$ égale à $V (> U)$, avec V défini par (3.17).

$$P(E_l, \partial_m E_k) = P(E_l)P(\partial_m E_k) \quad (3.25)$$

$$P(\partial_m E_k) = \begin{cases} k = m : & \frac{1}{\pi U} \exp\left(-\frac{|\partial_k E_k|^2}{U}\right) \\ k \neq m : & \frac{1}{\pi V} \exp\left(-\frac{|\partial_m E_k|^2}{V}\right) \end{cases} \quad (3.26)$$

Les trois composantes de ∇E_k ($\partial_x E_k, \partial_y E_k, \partial_z E_k$) sont toutes indépendantes. Aussi les trois composantes de $\partial_m \mathbf{E}$ ($\partial_m E_x, \partial_m E_y, \partial_m E_z$) sont indépendantes.

$$P(\nabla E_k) = P(\partial_x E_k, \partial_y E_k, \partial_z E_k) = P(\partial_x E_k)P(\partial_y E_k)P(\partial_z E_k) \quad (3.27)$$

$$P(\partial_m \mathbf{E}) = P(\partial_m E_x, \partial_m E_y, \partial_m E_z) = P(\partial_k E_x)P(\partial_k E_y)P(\partial_k E_z) \quad (3.28)$$

Attention, les éléments du tenseur $\partial_i \mathbf{E}_j$ ne sont pas tous indépendants. Par exemple, la distribution conjointe $P(\partial_k E_k, \partial_l E_l)$ n'est pas égale à $P(\partial_k E_k)P(\partial_l E_l)$, et la distribution conjointe $P(\partial_m E_k, \partial_k E_m)$ n'est pas factorisable en $P(\partial_m E_k)P(\partial_k E_m)$ non plus.

La matrice de corrélation \mathbf{C} , qui contient les corrélations entre les 9 éléments du tenseur $\nabla \mathbf{E}$, est de dimension 9×9 . La diagonalisation de cette matrice montre que la distribution conjointe correspondante est factorisable en quatre parties P_1, P_2, P_3 et P_4 .

$$P(\nabla \mathbf{E}) = P(\partial_x E_x, \partial_x E_y, \dots) = P_1 P_2 P_3 P_4 \quad (3.29)$$

avec

$$P_1 = P(\partial_x E_y, \partial_y E_x) = \frac{1}{\pi^2(V^2 - W^2)} \exp\left(-\frac{|\partial_x E_y - \partial_y E_x|^2}{2(V - W)}\right) \exp\left(-\frac{|\partial_x E_y + \partial_y E_x|^2}{2(V + W)}\right) \quad (3.30)$$

$$P_2 = P(\partial_x E_z, \partial_z E_x) = \dots \text{idem} \dots \quad (3.31)$$

$$P_3 = P(\partial_y E_z, \partial_z E_y) = \dots \text{idem} \dots \quad (3.32)$$

$$P_4 = P(\partial_x E_x, \partial_y E_y, \partial_z E_z) = \frac{1}{\pi^3(U + 2V)(U - W)^2} \exp\left(-\frac{|\partial_x E_x - \partial_y E_y|^2}{2(U - W)}\right) \dots \quad (3.33)$$

$$\dots \exp\left(-\frac{|\partial_x E_x + \partial_y E_y - 2\partial_z E_z|^2}{6(U - W)}\right) \exp\left(-\frac{|\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z|^2}{3(U + 2W)}\right)$$

Maintenant tous les éléments nécessaires au calcul de la distribution des densités d'énergie sont connus.

3.5 Distributions de densités d'énergie

3.5.1 Energie cinétique E_c

La distribution des amplitudes des trois composantes du champ \mathbf{E} $P(A_x, A_y, A_z)$ permet de calculer la distribution de $|\mathbf{E}|$ et de $|\mathbf{E}|^2$, car $|\mathbf{E}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$. En fait, la démarche ressemble

à un changement de coordonnées cartésiennes (x,y,z) vers des coordonnées sphériques (r,ϕ,θ) avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, suivi d'une intégration sur ϕ et θ :

$$\begin{aligned} dx dy dz &= r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ P(r) &= r^2 \iint P(x,y,z) \sin \theta d\phi d\theta \end{aligned} \quad (3.34)$$

Si $x,y,z > 0$, on intègre sur un huitième de l'espace, alors $\phi, \theta : 0 \rightarrow \pi/2$. Si en plus $P(x,y,z)$ est de la forme $P(x,y,z) = a(xyz) e^{-br^2}$, la distribution $P(r)$ devient

$$\begin{aligned} P(r) &= r^2 \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta a(r \cos \phi \sin \theta)(r \sin \phi \sin \theta)(r \cos \theta) e^{-br^2} \\ &= a r^5 e^{-br^2} \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} a r^5 e^{-br^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les variables (A_x, A_y, A_z) prennent le rôle de (x,y,z) et $|\mathbf{E}|$ prend le rôle de r .

$$P(A_x, A_y, A_z) = \frac{2^3 A_x A_y A_z}{S^3} \exp\left(-\frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{S}\right) \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow P(|\mathbf{E}|) = \frac{|\mathbf{E}|^5}{S^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{E}|^2}{S}\right) \quad (3.37)$$

On rappelle la définition de la densité d'énergie cinétique $E_c \equiv \frac{1}{2} \rho \omega^2 |\mathbf{E}|^2$ et finalement on écrit la distribution de E_c :

$$\boxed{P(E_c) = \frac{27 E_c^2}{2 \langle E_c \rangle^3} \exp\left(-\frac{3E_c}{\langle E_c \rangle}\right) \quad \text{avec} \quad \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} \rho \omega^2 S = \frac{\omega^3}{8\pi} \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{2}{\beta^3}\right)} \quad (3.38)$$

Conclusion :

La statistique de l'énergie cinétique E_c a une distribution Gamma d'ordre 3. La probabilité de trouver $E_c = 0$ tend vers zéro. Logique, car $E_c = 0$ implique que les trois composantes de \mathbf{E} sont simultanément nulles, ce qui est peu probable.

La valeur moyenne $\langle E_c \rangle$ est égale à $\frac{1}{2} \rho \omega^2 S = \omega^3 / (8\pi) (1/\alpha^3 + 2/\beta^3)$. La moyenne $\langle E_c^2 \rangle$ existe et vaut $4/3 \langle E_c \rangle^2$, la variance de E_c est donc égale à $1/3 \langle E_c \rangle^2$.

3.5.2 Energie potentielle de compression E_p

La distribution de $\partial_x E_x$, $\partial_y E_y$ et $\partial_z E_z$ est donnée par l'expression P_4 (3.33). Le changement de variables suivant facilite considérablement le calcul de la distribution $P(\nabla \cdot \mathbf{E})$.

$$\begin{aligned} K &= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \cdot \mathbf{E} \\ L &= \partial_x E_x + \partial_y E_y - 2\partial_z E_z \\ M &= \partial_x E_x - \partial_y E_y \end{aligned} \quad (3.39)$$

L'intégration sur les parties réelles et imaginaires de L et de M résulte en la distribution $P(K) = P(\nabla \cdot \mathbf{E})$.

$$P(K) = P(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{3\pi(U + 2W)} \exp\left(-\frac{|\nabla \cdot \mathbf{E}|^2}{3(U + 2W)}\right) \quad (3.40)$$

On rappelle la définition de la densité d'énergie potentielle de compression $E_p \equiv \frac{1}{2}\rho\alpha^2|\nabla \cdot \mathbf{E}|^2$ et finalement on écrit la distribution de E_p :

$$P(E_p) = \frac{1}{\langle E_p \rangle} \exp\left(-\frac{E_p}{\langle E_p \rangle}\right) \quad \text{avec} \quad \langle E_p \rangle = \frac{3}{2}\rho\alpha^2(U + 2W) = \frac{\omega^3}{8\pi\alpha^3} \quad (3.41)$$

Conclusion :

La statistique de l'énergie potentielle de compression E_p suit une distribution exponentielle. La probabilité de trouver $E_p = 0$ est non nulle.

La valeur moyenne $\langle E_p \rangle$ est égale à $\frac{3}{2}\rho\alpha^2(U + 2W) = \omega^3/(8\pi\alpha^3)$, ce qui ne dépend que de la vitesse de propagation α de l'onde P. La moyenne $\langle E_p^2 \rangle$ existe et vaut $2\langle E_p \rangle^2$, la variance de E_p^2 est donc égale à $\langle E_p \rangle^2$. L'écart-type de E_p^2 est aussi grand que la moyenne. C'est une propriété connue de la distribution exponentielle.

3.5.3 Energie potentielle de cisaillement E_s

Les composantes du rotationnel du champ $\nabla \times \mathbf{E}$ sont égales à

$$\begin{aligned} R_x &\equiv [\nabla \times \mathbf{E}]_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ R_y &\equiv [\nabla \times \mathbf{E}]_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ R_z &\equiv [\nabla \times \mathbf{E}]_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{aligned}$$

Selon l'équation (3.29) les trois composantes R_x , R_y et R_z sont des variables indépendantes. Alors la distribution conjointe $P(R_x, R_y, R_z)$ est simplement le produit des trois distributions individuelles $P(R_x)P(R_y)P(R_z)$. De même la distribution $P(|R_x|, |R_y|, |R_z|)$ est égale au produit $P(|R_x|)P(|R_y|)P(|R_z|)$. Il suffit donc d'étudier la distribution d'une seule composante, par exemple R_z . Elle est obtenue en effectuant le changement de variables suivant dans l'expression de la distribution P_1 (3.30) :

$$\begin{aligned} K &= \partial_x E_y - \partial_y E_x = [\nabla \times \mathbf{E}]_z = R_z \\ L &= \partial_x E_y + \partial_y E_x \end{aligned} \quad (3.42)$$

L'intégration sur la partie réelle et imaginaire de L résulte en la distribution $P(K) = P(R_z)$.

$$P(K) = P(R_z) = \frac{1}{\pi 2(V - W)} \exp\left(-\frac{|R_z|^2}{2(V - W)}\right) \quad (3.43)$$

avec V et W défini par (3.17). La distribution $P(|R_x|, |R_y|, |R_z|)$ est alors donnée par

$$P(|R_x|, |R_y|, |R_z|) = \frac{R_x R_y R_z}{(V - W)^3} \exp\left(-\frac{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}{2(V - W)}\right) \quad (3.44)$$

Le même raisonnement est ensuite suivi que dans le calcul de l'énergie cinétique E_c . Les variables $|R_x|$, $|R_y|$ et $|R_z|$ prennent le rôle de (x, y, z) et $|\nabla \times \mathbf{E}|^2 = |R_x|^2 + |R_y|^2 + |R_z|^2$ prend le rôle de r^2 .

$$P(|\nabla \times \mathbf{E}|) = \frac{|\nabla \times \mathbf{E}|^5}{2^3(V - W)^3} \exp\left(-\frac{|\nabla \times \mathbf{E}|^2}{2(V - W)}\right) \quad (3.45)$$

On rappelle la définition de la densité d'énergie potentielle de cisaillement $E_s \equiv \frac{1}{2}\rho\beta^2|\nabla \times \mathbf{E}|^2$ et finalement on écrit la distribution de E_s :

$$P(E_s) = \frac{27 E_s^2}{2 \langle E_s \rangle^3} \exp\left(-\frac{3E_s}{\langle E_s \rangle}\right) \quad \text{avec} \quad \langle E_s \rangle = 3\rho\beta^2(V - W) = \frac{2\omega^3}{8\pi\beta^3} \quad (3.46)$$

Conclusion :

La statistique de l'énergie potentielle de cisaillement E_s suit une distribution Gamma d'ordre 3, comme la statistique de E_c . La probabilité de trouver $E_s = 0$ tend vers zéro. Logique, car $E_s = 0$ implique que les trois composantes de $\nabla \times \mathbf{E}$ sont simultanément nulles, ce qui est peu probable.

La valeur moyenne $\langle E_s \rangle$ est égale à $3\rho\beta^2(V - W) = 2\omega^3/(8\pi\beta^3)$, ce qui ne dépend que de la vitesse de propagation β de l'onde S. La moyenne $\langle E_s^2 \rangle$ existe et vaut $4/3\langle E_s \rangle^2$, la variance de E_s est donc égale à $1/3\langle E_s \rangle^2$.

3.5.4 Remarques

D'après les expressions (3.25) et (3.29), les trois densités d'énergie sont indépendantes. Leur distribution conjointe $P(E_c, E_p, E_s)$ est simplement le produit $P(E_c)P(E_p)P(E_s)$. La distribution conjointe $P(E_c, E_p, E_s)$ permettra de calculer d'autres distributions intéressantes et de les comparer avec les résultats expérimentaux. Ainsi on aura une nouvelle méthode pour évaluer la validité de l'hypothèse des variables gaussiennes. Par exemple, la distribution $P(E_s/E_p)$ est donnée par :

$$P\left(\frac{E_p}{E_s}\right) = P(x) = 3 \left(\frac{3\langle E_p \rangle}{\langle E_s \rangle}\right)^3 \frac{x^2}{\left[x\frac{3\langle E_p \rangle}{\langle E_s \rangle} + 1\right]^4} \quad (3.47)$$

On constate que – comme prévu par la théorie [4] – les moyennes $\langle E_c \rangle$, $\langle E_p \rangle$ et $\langle E_s \rangle$ obéissent aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\langle E_c \rangle}{\langle E_p \rangle + \langle E_s \rangle} &= 1 \\ \frac{\langle E_s \rangle}{\langle E_p \rangle} &= \frac{2\alpha^3}{\beta^3} \end{aligned} \quad (3.48)$$

La Figure 3.1 montre les trois distributions $P(E_c)$, $P(E_p)$ et $P(E_s)$. Les moyennes ont été choisies telles que les égalités (3.48) soient respectées. Les énergies sont exprimées en unités de $\langle E_{totale} \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle + \langle E_s \rangle$.

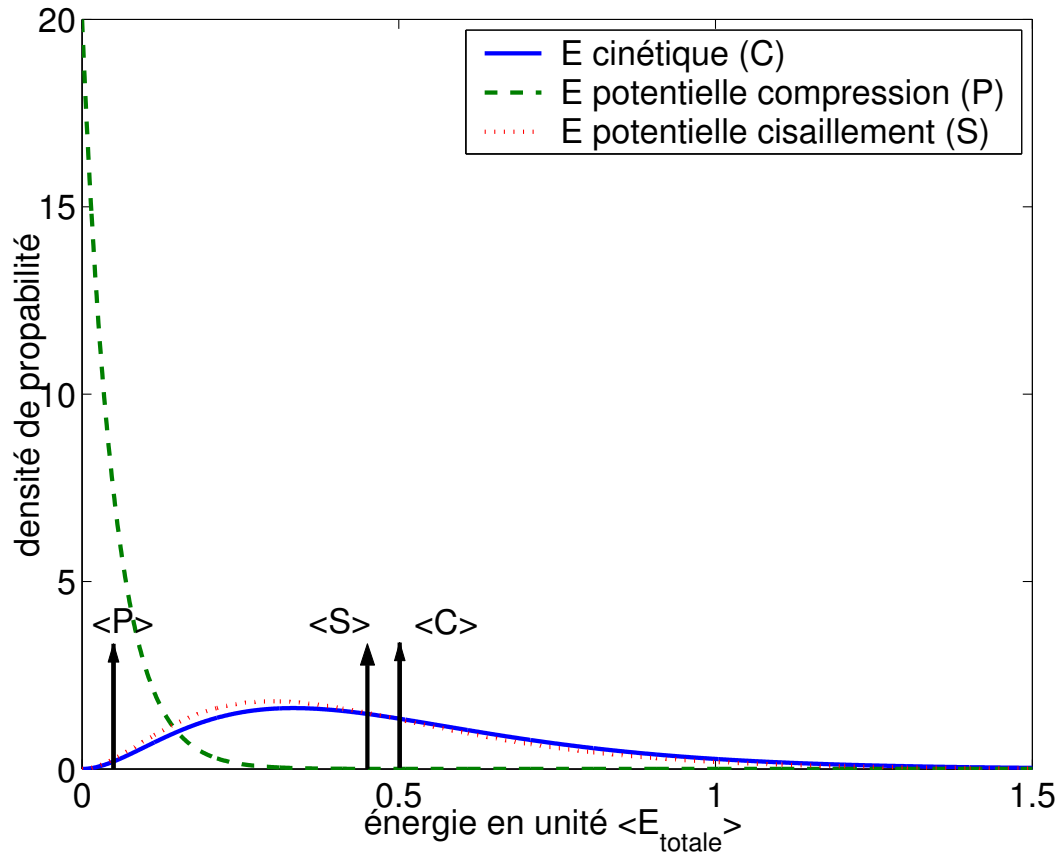


Fig. 3.1: Distribution des densités d'énergies élastique : densité d'énergie cinétique (C), d'énergie potentielle de compression (P) et d'énergie potentielle de cisaillement (S), de moyenne $\langle E_c \rangle$, $\langle E_p \rangle$ et $\langle E_s \rangle$ respectivement (notées $\langle C \rangle$, $\langle P \rangle$ et $\langle S \rangle$).

Conclusion

Dans ce rapport on a considéré le champ diffus dans un milieu désordonné, dont le désordre est aléatoire. On a admis l'hypothèse d'une statistique gaussienne pour le champ diffus, se basant sur l'argument que le champ est la superposition d'une infinité de chemins. On a étudié les conséquences de cette hypothèse, en particulier pour la phase et pour ses dérivées.

Dans un premier temps on s'est concentré sur l'équation scalaire. En un point les dérivées de la phase selon de différentes directions ne sont jamais indépendantes. Elles suivent une loi de puissance, ainsi que la norme du gradient de la phase. Quant aux dérivées de la phase en deux points différents, le tenseur F contenant toute l'information a été construit. On a constaté que l'élément $F_{xx}(x, 0, 0)$, soit la fonction $C_1(x)$, convient à déterminer le libre parcours moyen l , car cette fonction n'a pas d'oscillations. Quatre récepteurs alignés suffisent donc à mesurer l : une expérience assez simple en sismologie.

Ensuite le lien avec la topologie a été établi. On a suggéré que la variance de la charge topologique d'un cercle ne dépend que du rayon du cercle et du libre parcours moyen. Une idée surprenante : le degré du désordre est directement lié au nombre de lignes de dislocations qui pénètrent la surface. Idée intéressante, oui, mais en réalité sans applications directes en sismologie. En ce qui concerne la théorie, il reste plusieurs questions à résoudre. Premièrement il faudra étudier plus précisément la façon dont dépende la variance de la charge topologique du libre parcours moyen. Deuxièmement il faudra expliquer le désaccord avec la conclusion de Berry.

Dans un deuxième temps, l'équation avec son aspect vectoriel a été étudiée. La construction des distributions du champ, de son rotationnel et de son gradient a permis de calculer la distribution conjointe complète des densités d'énergie cinétique, d'énergie potentielle de compression et d'énergie potentielle de cisaillement. La comparaison de cette distribution conjointe avec les expériences, permettra à évaluer la validité de l'hypothèse de la statistique gaussienne.

Il serait intéressant de refaire les mêmes raisonnements en employant la fonction de Green à deux dimensions, ou la fonction de Green des ondes de surface (ondes Rayleigh/ondes Love). La fonction de corrélation, liée à la partie imaginaire de la fonction de Green, aura une autre forme : il faudra alors étudier quelles sont les influences sur les corrélations des dérivées de la phase.

Remerciements

Je tiens à remercier Bart van Tiggelen d'avoir accepté de me diriger au cours de ce stage de Master 2, et de m'avoir fait partager son enthousiasme pour la physique mésoscopique au travers de nos discussions. Je le remercie pour sa disponibilité et sa patience face à mes nombreuses questions!

Je remercie également Richard Weaver pour les discussions intéressantes que nous avons eues, Michel Campillo et Eric Larose pour m'avoir donné l'occasion d'assister à une expérience sismologique de terrain, Ludovic Margerin pour son aide sur la théorie.

Je remercie aussi toutes les personnes travaillant au LPMMC pour leur accueil sympathique, notamment les autres stagiaires Domitille Anache et Abelin Kameni et les thésards dont j'ai partagé le bureau.

Annexe A

Calcul de $F(x, 0, 0)$

Pour calculer un élément du tenseur $F(x, 0, 0) = \langle \nabla \phi(0) \nabla \phi(x, 0, 0) \rangle$ il faut construire la densité de probabilité $P(E_1, E_2, E_3, E_4)$ ou $P(E_1, \partial_\alpha E_1, E_2, \partial_\beta E_2)$, ce qui nécessite une nouvelle matrice C avec en général 5 variables. Les intégrations sont très compliquées. Il est alors préférable de se servir du résultat (2.31) : nous étudierons les cas qui correspondent à la même matrice C (A.1). On sera ensuite capable d'écrire F dans le cas général.

Résultat de base Soit $P(E_1, E_2, E_3, E_4)$ la distribution conjointe du champ en quatre points. Les points 1 et 3 se trouve à une distance x . Les points 1 et 3 se trouve à une petite distance u des points 2 et 4 respectivement. La matrice de corrélation C correspondante est alors de cette forme :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & z & C & C^+ \\ z & 1 & C^- & C \\ C & C^- & 1 & z \\ C^+ & C & z & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 1 & = C(0) \\ z & = C(u) \\ C & = C(x) \\ C^\pm & = C(x) \pm uK(x) + \frac{1}{2}u^2L(x) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Si $K(x)$ et $L(x)$ sont déterminés par les développements limités en u des éléments C^+ et C^- de la matrice de corrélation, et si $C(x)$, $K(x)$ et $L(x)$ sont assez petits devant 1 pour x grand, il est à démontrer que la corrélation entre la dérivée de la phase au point 1 dans la direction 1-2 et la dérivée de la phase au point 3 dans la direction 3-4 peut être approximée par

$$\langle \partial_{12}\phi(\mathbf{r}_1) \partial_{34}\phi(\mathbf{r}_3) \rangle \approx \frac{1}{2} [K^2(x) - C(x)L(x)] \quad \text{pour } x \text{ grand} \quad (\text{A.2})$$

Supposons tout d'abord que $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ et calculons $F(x, 0, 0)$, avec éléments

$$F_{xx}(x, 0, 0) = \langle \partial_x \phi(0) \partial_x \phi(x, 0, 0) \rangle \quad (\text{A.3})$$

$$F_{xy}(x, 0, 0) = \langle \partial_x \phi(0) \partial_y \phi(x, 0, 0) \rangle \quad (\text{A.4})$$

F_{yx} , F_{yz} , etc. sont pareils. On introduit aussi la corrélation $\langle \partial_\alpha \phi(0) \partial_\beta \phi(x, 0, 0) \rangle$ qui s'exprime en fonction de F_{xx} , F_{xy} , F_{yx} et F_{yy} .

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \phi &= \cos \alpha \partial_x \phi + \sin \alpha \partial_y \phi \\ \partial_\beta \phi &= \cos \beta \partial_x \phi + \sin \beta \partial_y \phi \\ \langle \partial_\alpha \phi(0) \partial_\beta \phi(x, 0, 0) \rangle &= \cos \alpha \cos \beta F_{xx}(x, 0, 0) + \cos \alpha \sin \beta F_{xy}(x, 0, 0) \\ &\quad + \sin \alpha \cos \beta F_{yx}(x, 0, 0) + \sin \alpha \sin \beta F_{yy}(x, 0, 0) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Nous calculons $\langle \partial_\alpha \phi(0) \partial_\beta \phi(x, 0, 0) \rangle$ dans quatre cas différents, toujours pour $x \gg 1$. Les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ seront définies.

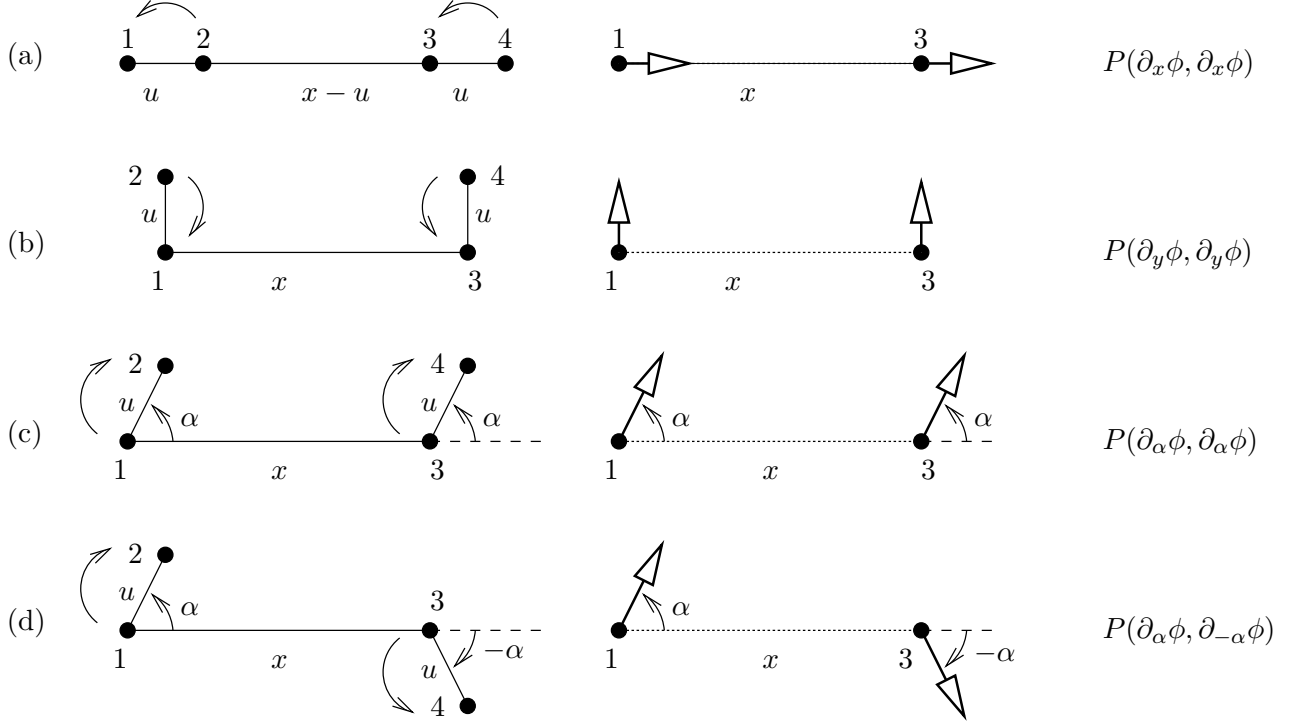


Fig. A.1: Configuration pour les 4 cas particuliers. (a) Configuration pour $\langle \partial_x \phi(0) \partial_x \phi(x, 0, 0) \rangle$. (b) Configuration pour $\langle \partial_y \phi(0) \partial_y \phi(x, 0, 0) \rangle$. (c) Configuration pour $\langle \partial_\alpha \phi(0) \partial_\alpha \phi(x, 0, 0) \rangle$. (d) Configuration pour $\langle \partial_\alpha \phi(0) \partial_{-\alpha} \phi(x, 0, 0) \rangle$.

Cas 1 : $\alpha = \beta = 0$

Configuration de la Figure A.1a. Les quatre points sont alignés.

$$\begin{aligned} C^\pm &= C(x \pm u) = C(x) \pm u \underbrace{C'(x)}_{K(x)} + \frac{1}{2} u^2 \underbrace{C''(x)}_{L(x)} \\ \Rightarrow F_{xx} &= \langle \partial_x \phi(0) \partial_x \phi(x, 0, 0) \rangle = C_1(x) \approx \frac{1}{2} [C'^2(x) - C(x)C''(x)] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Cas 2 : $\alpha = \beta = \pi/2$

Configuration de la Figure A.1b. Les quatres points forment un rectangle.

$$C^\pm = C(\sqrt{x^2 + u^2}) = C(x) + \frac{1}{2}u^2 \underbrace{\frac{C'(x)}{x}}_{L(x)}$$

$$\Rightarrow F_{yy} = \langle \partial_y \phi(0) \partial_y \phi(x, 0, 0) \rangle = C_2(x) \approx -\frac{C(x)C'(x)}{2x} \quad (\text{A.7})$$

Cas 3 : $\alpha = \beta$

Configuration de la Figure A.1c. Les quatres points forment un parallélogramme.

$$C^\pm = C(\sqrt{x^2 + u^2 \pm xu \cos \alpha}) = C(x) \pm u \underbrace{C'(x) \cos \alpha}_{K(x)} + \frac{1}{2}u^2 \underbrace{\left[C''(x) \cos^2 \alpha + \frac{C'(x)}{x} \sin^2 \alpha \right]}_{L(x)}$$

$$\Rightarrow \langle \partial_\alpha \phi(0) \partial_\alpha \phi(x, 0, 0) \rangle = C_1 \cos^2 \alpha + C_2 \sin^2 \alpha \quad (\text{A.8})$$

Cas 4 : $\alpha = -\beta$

Configuration de la Figure A.1d. En fait, il s'agit des dérivées selon les tangentes à un même cercle de rayon R , en deux points séparés par un angle 2α (Figure A.2). Autrement dit,

$$\langle \partial_\alpha \phi(0) \partial_{-\alpha} \phi(x, 0, 0) \rangle = \frac{1}{R^2} \left\langle \frac{\partial \phi(0)}{\partial \theta} \frac{\partial \phi(2\alpha)}{\partial \theta} \right\rangle$$

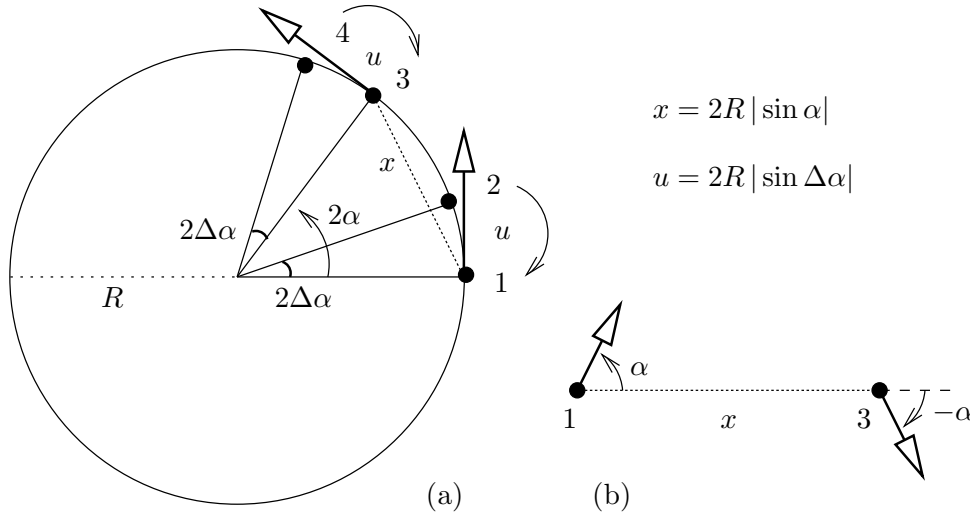


Fig. A.2: Equivalence entre les dérivées en (a) et les dérivées en (b), avec $x = 2R |\sin \alpha|$.

Le développement limité en u de C^\pm mène au résultat suivant :

$$C^\pm = C(2R \sin(\alpha \pm \Delta\alpha)) = C(x) \pm u \underbrace{C'(x) \cos \alpha}_{K(x)} + \frac{1}{2}u^2 \underbrace{\left[C''(x) \cos^2 \alpha - \frac{C'(x)}{x} \sin^2 \alpha \right]}_{L(x)}$$

$$\Rightarrow \langle \partial_\alpha \phi(0) \partial_{-\alpha} \phi(x, 0, 0) \rangle = C_1 \cos^2 \alpha - C_2 \sin^2 \alpha \quad (\text{A.9})$$

En remplaçant les résultats des quatre cas dans l'équation (A.5) nous obtenons (pour x grand) :

$$\begin{aligned}
F_{xx}(x, 0, 0) &= \langle \partial_x \phi(0) \partial_x \phi(x, 0, 0) \rangle = C_1(x) \approx \frac{1}{2} [C'^2(x) - C(x)C''(x)] \\
F_{yy}(x, 0, 0) &= \langle \partial_y \phi(0) \partial_y \phi(x, 0, 0) \rangle = C_2(x) \approx -\frac{C(x)C'(x)}{2x} \\
F_{xy}(x, 0, 0) &= F_{yx}(-x, 0, 0) = 0
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Le résultat $F_{xy}(x, 0, 0) = 0$ (pour x grand) semble à première vue un peu étrange, mais est confirmé par un deuxième calcul. La distribution $P(E_1, \partial_x E_1, E_2, \partial_y E_2)$ selon la configuration de la Figure A.3a mène à la distribution $P(A_1, A_2, \phi_1, \phi_2, \partial_x A_1, \partial_y A_2, \partial_x \phi_1, \partial_y \phi_2)$ qui est *paire* en $\partial_y \phi_2$. Par conséquent $F_{xy}(x, 0, 0) = 0$ pour tout x , et aussi $F_{yx}(x, 0, 0) = F_{xy}(-x, 0, 0) = 0$ pour tout x . Ce résultat est en accord avec le résultat précédent (2.24) pour $x = 0$.

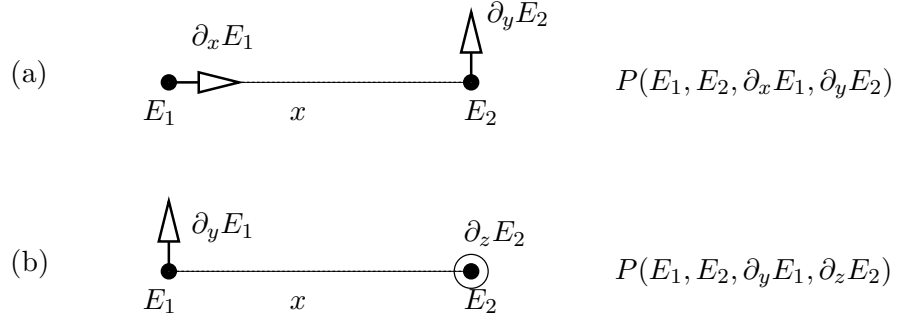


Fig. A.3: (a) Configuration pour $P(E_1, E_2, \partial_x E_1, \partial_y E_2)$. (b) Configuration pour $P(E_1, E_2, \partial_y E_1, \partial_z E_2)$.

Il reste une quantité à déterminer : $F_{yz}(x, 0, 0)$. La distribution $P(E_1, \partial_x E_1, E_2, \partial_y E_2)$ selon la configuration de Figure A.3b mène à la distribution $P(A_1, A_2, \phi_1, \phi_2, \partial_y A_1, \partial_z A_2, \partial_y \phi_1, \partial_z \phi_2)$ qui est *paire* en $\partial_y \phi_2$ et *paire* en $\partial_z \phi_2$. Par conséquent $F_{yz}(x, 0, 0) = 0$ pour tout x .

$$\begin{aligned}
F_{xy}(x, 0, 0) &= F_{yx}(-x, 0, 0) = 0 \\
F_{yz}(x, 0, 0) &= F_{zy}(-x, 0, 0) = 0
\end{aligned} \quad (\text{pour tout } x) \tag{A.11}$$

En résumé, le tenseur $F(x, 0, 0) = \langle \nabla \phi(0) \nabla \phi(x, 0, 0) \rangle$ est égal à :

$$F(x, 0, 0) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad \text{pour tout } x \tag{A.12}$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_1 = C_1(x) = \langle \partial_x \phi(0) \partial_x \phi(x, 0, 0) \rangle \\ C_2 = C_2(x) = \langle \partial_y \phi(0) \partial_y \phi(x, 0, 0) \rangle \end{cases} \tag{A.13}$$

et pour x grand

$$\begin{cases} C_1(x) \approx \frac{1}{2} [C'^2(x) - C(x)C''(x)] \\ C_2(x) \approx -\frac{C(x)C'(x)}{2x} \end{cases} \quad x \gg 1 \tag{A.14}$$

Bibliographie

- [1] J.-P. Fouque, *Diffuse waves in complex media*. NATO Science Series, Series C **531** (1999).
- [2] M. Campillo, A. Paul, *Long-range correlations in the diffuse seismic coda*. Science **299**, p.5606 (2003).
- [3] B. A. van Tiggelen, *New aspects of electromagnetic and acoustic wave diffusion*. POAN Research group (ed.), Springer-Verlag, Heidelberg (1999).
- [4] N. Trégourès, *Approche mésoscopique des ondes en milieu complexe : des micro-ondes aux ondes sismiques*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble-1 (2001).
- [5] K. Aki, P. Richards, *Quantitative Seismology - 2nd edition*. University Science Books, California (2002).
- [6] P. Sheng, *Introduction to wave Scattering, localization, and mesoscopic phenomena*. Academic Press, San Diego (1995).
- [7] E. Larose, A. Derode, M. Campillo, M. Fink, *Imaging from one-bit correlations of wideband diffuse fields*. J. Acoust. Soc. Am **95**, p.8393 (2004).
- [8] E. Larose, A. Derode, G. Montaldo, M. Campillo, *Passive imaging of localized and interfaces in open media*. Submitted (2005).
- [9] A. Tourin, M. Fink, A. Derode, *Multiple scattering of sound*. Topical Review, Waves Random Media **10**, p.R31 (2000).
- [10] J. W. Goodman, *Statistical optics*. Wiley series in pure and applied optics, USA (1985).
- [11] A. Z. Genack, P. Sebbah, M. Stoytchev, B. A. van Tiggelen, *Statistics of wave dynamics in random media*. Phys. Rev. Lett. **82**, p.715 (1999).
- [12] B. A. van Tiggelen, P. Sebbah, M. Stoytchev, A. Z. Genack, *Delay-time statistics for diffuse waves* Phys. Rev. E **59**, p.7166 (1999).
- [13] E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics*. Springer-Verlag, Germany (1990).
- [14] R. Hennino, N. Trégourès, N. M. Schapiro, L. Margerin, M. Campillo, B. A. van Tiggelen, R. L. Weaver, *Observation of equipartition of seismic waves*. Phys. Rev. Lett. **86**, p.3447 (2000).
- [15] O. I. Lobkis, R. L. Weaver, *On the emergence of the Green's function in the correlations of a diffuse field*. J. Acoust. Soc. Am. **110**, p.3011 (2001).
- [16] R. L. Weaver, *Diffuse fields in open systems and the emergence of the Green's function*. J. Acoust. Soc. Am. **116**, p.2731 (2004).

- [17] R. L. Weaver, O. I. Lobkis, *Fluctuations in diffuse field-field correlations and the emergence of the Green's function in open systems*. Submitted (2004).
- [18] P. M. Shearer, *Introduction to seismology*. Cambridge University Press (1999).
- [19] E. Akkermans, G. Montambaux, *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. EDP sciences, CNRS Editions (2004).
- [20] P. Sebbah, O. Legrand, B. A. van Tiggelen, A. Z. Genack, *Statistics of the cumulative phase of microwave radiation in random media*. Phys. Rev. Lett. E **56**, p.3619 (1996).
- [21] M. V. Berry, *Phase singularities in isotropic random waves*. Proc. R. Soc. Lond. A **456**, p.2059 (2000).
- [22] I. Freund, *Saddles, singularities, and extrema in random phase fields*. Phys. Rev. E **52**, p.2348 (1995).