



STAGE MASTER 2  
réalisé au  
LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MODÉLISATION DES MILIEUX CONDENSÉS

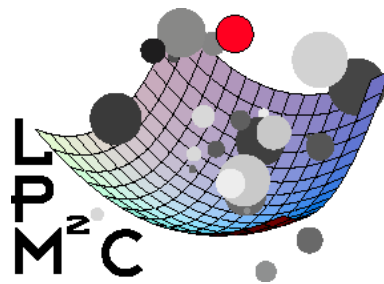
---

MÉSOSCOPIE DES ONDES SISMOLOGIQUES :  
INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR LA CODA.

---

**Domitille ANACHE**

Avril – Juillet 2005



Sous la direction de

**Bart van Tiggelen**

Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés LPM2C  
CNRS/Université Joseph Fourier  
Grenoble, France

**Ludovic Margerin**

Laboratoire de géophysique interne et de technophysique LGIT  
CNRS/Université Joseph Fourier  
Grenoble, France

## Résumé :

Jusqu'à présent les sismologues utilisaient essentiellement la théorie des rais pour l'étude de l'intérieur de la terre. Mais K.Aki montre que la croûte terrestre peut se comporter comme un milieu multiplement diffuseur pour les ondes sismiques. Ainsi, l'enjeu actuel en sismologie est de faire de l'imagerie sismique en milieu désordonné. Il a été montré que la corrélation temporelle et spatiale des ondes fortement diffusées par le désordre fournit une information importante sur leur propagation et s'avère être l'outil privilégié. En particulier, on s'interroge sur la possibilité d'extraire de la fonction de corrélation de l'information sur une variation de température à l'intérieur d'un volcan. L'enjeu du stage est d'apporter des éléments de réponse à cette question. Nous avons réalisé une analyse théorique utilisant les méthodes de la physique mésoscopique et les analogies avec les électrons et l'optique. Nous avons également réalisé une expérience en dimensions réduites avec des ultrasons pour tester l'imagerie sismique en milieu complexe et ses difficultés.

## Mots clefs :

Diffusion multiple, coda sismique, corrélations, température.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Diffusion multiple et sismologie</b>	<b>2</b>
1.1 Diffusion multiple . . . . .	2
1.1.1 Speckle ou source d'information ? . . . . .	2
1.1.2 Les longueurs caractéristiques . . . . .	3
1.2 Diffusion multiple en sismologie : une nouvelle mine d'information . . . . .	4
1.2.1 Coda sismique . . . . .	4
1.2.2 Facteur de Coda $Q$ . . . . .	5
1.2.3 Equipartition de l'énergie . . . . .	5
1.2.4 Mésoscopie des ondes sismiques . . . . .	6
1.3 Coda Wave Interferometry . . . . .	7
1.3.1 Un moyen d'étude de la dynamique des diffuseurs . . . . .	7
1.3.2 Applications en matière molle . . . . .	9
1.3.3 Applications en sismologie . . . . .	9
1.4 Comment mesurer des variations de température dans un volcan ? . . . . .	11
1.4.1 Influence de la température sur la coda sismique . . . . .	11
1.4.2 La fonction d'intercorrélation, l'outil adéquat . . . . .	12
1.4.3 Confirmation expérimentale de R. Weaver . . . . .	13
1.4.4 Problématique du stage . . . . .	14
<b>2 Intercorrélations à deux températures</b>	<b>15</b>
2.1 Approche phénoménologique du transfert radiatif . . . . .	15
2.2 Position du problème . . . . .	16
2.2.1 Équation d'onde du milieu . . . . .	16
2.2.2 Nature des diffuseurs . . . . .	16
2.2.3 Rôle de la température . . . . .	16
2.2.4 Fonction d'intercorrélation . . . . .	17
2.2.5 Interprétation des nouvelles variables . . . . .	18
2.3 Un chouia de formalisme : opérateurs $G$ , $\Sigma$ , $U$ et $T$ . . . . .	18
2.3.1 Fonction de Green . . . . .	18
2.3.2 Equation du champ moyen : équation de Dyson . . . . .	19
2.3.3 Équation de la corrélation du champ : Équation de Bethe Salpeter . . . . .	19
2.3.4 Interprétation de $\Sigma$ et $U$ . . . . .	20
2.4 Équation de Boltzman généralisée . . . . .	20
2.4.1 Équation de Boltzmann généralisée . . . . .	20

2.4.2	Développement multipolaire de $\Phi$ . . . . .	21
2.4.3	Mise en équation . . . . .	21
2.5	De l'équation de Boltzman à l'équation de diffusion . . . . .	21
2.5.1	Le potentiel de diffusion : l'élément clef. . . . .	21
2.5.2	Équation de continuité . . . . .	23
2.5.3	Équation vectorielle du courant . . . . .	23
2.5.4	Équation de diffusion . . . . .	24
2.6	Fonction d'intercorrélation . . . . .	24
2.6.1	Expression de la densité d'énergie $W$ en espace temps. . . . .	25
2.6.2	The end! Expression de la fonction d'intercorrélation . . . . .	25
2.6.3	Normalisation de la fonction d'intercorrélation . . . . .	25
2.6.4	Représentation graphique de la fonction d'intercorrélation . . . . .	26
2.7	Conclusion et Perspectives . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Étude expérimentale</b> . . . . .	<b>28</b>
3.1	Dispositif expérimental . . . . .	28
3.1.1	Choix du site . . . . .	28
3.1.2	Dispositif expérimental . . . . .	29
3.1.3	Données sur le béton . . . . .	30
3.2	Résultats . . . . .	31
3.3	Interprétation . . . . .	33
3.4	Conclusion et Perspectives . . . . .	33
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Calcul de l'équation vectorielle du courant</b> . . . . .	<b>35</b>
A.1	Intégration $\int \vec{p} d^3\vec{p}$ et équation du courant . . . . .	35
A.2	Développement du calcul à l'ordre 1 . . . . .	36
A.3	Équation vectorielle du courant . . . . .	37
<b>B</b>	<b>Calul de l'équation de diffusion au <math>2^{nd}</math> ordre</b> . . . . .	<b>39</b>
B.1	Intégration sur les moments $\vec{p}$ et équation de continuité . . . . .	39
B.2	Développement du calcul à l'ordre 2 . . . . .	39
B.3	Équation de continuité au $1^{ier}$ ordre : . . . . .	40
B.4	Equation de continuité au $2^{nd}$ ordre : . . . . .	41
B.5	Equation de diffusion au second ordre . . . . .	42
<b>C</b>	<b>Extension au cas de vitesses <math>c_0</math> et <math>c_1</math> complexes</b> . . . . .	<b>43</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>44</b>

# Introduction

La sismologie n'existe que depuis un siècle et a connu une explosion dans les années 70 avec l'introduction des ordinateurs. D'énormes quantités de données sont disponibles. Les ondes sismiques nous apportent une meilleure compréhension des séismes et elles sont à la base de l'essentiel des connaissances sur la structure et la composition de la terre profonde.

Les tremblements de terre représentent des sources très énergétiques (jusqu'à 2 ordres de grandeur au-delà des explosions nucléaires) et les mouvements associés aux ondes élastiques peuvent être mesurés à la surface par des pendules tri-axiaux. Le spectre de vibrations s'étend de  $3.10^{-4}Hz$  à  $20Hz$ . Pour les ondes de courte période, l'analyse de la propagation à grande distance se fait le plus souvent sous les hypothèses de la théorie des rais et de l'optique géométrique et permet d'imager les structures profondes. Grâce à ces techniques on a pu établir un modèle de Terre globalement stratifiée en couches homogènes.

Pourtant cette description de l'intérieur de la Terre n'est pas tout à fait satisfaisante. On remarque que les ondes P et S sont suivies par un train d'onde de plus faible amplitude mais de bien plus longue durée qu'on appelle coda. Les travaux de Keiiti Aki montre qu'il s'agit de l'arrivée d'ondes sismiques multiples diffusées dans la lithospère. La pertinence des modèles de terre latéralement homogène va donc être remise en cause. La coda est du bruit dû à la diffusion (équivalent du speckle ou tavelures en optique). Toutefois elle contient de l'information sur le milieu qu'elle a traversé, donc sur les hétérogénéités de la terre. Elle devrait donc permettre d'imager ces hétérogénéités. En outre, on montre que l'analyse de la coda peut être extrêmement intéressante pour diagnostiquer la dynamique du milieu telle que les mouvements du sous sol, les variations de position du foyer sismique ou les variations de température dans un volcan. En effet grâce à un phénomène d'amplification des petites variations proportionnel au nombre de diffusions, la coda sismique est très sensible à ces phénomènes indécélables dans les ondes balistiques.

**La problématique** : peut on extraire de la coda des informations sur la température du milieu dans lequel les ondes sismiques se sont propagées ?

**Plan** : Le chapitre 1 met en évidence la richesse d'information de la coda sismique et présente le contexte dans lequel s'inscrit la problématique de mon stage. On constate que l'outil adapté à cette étude est la fonction d'intercorrélation à deux températures qui est très sensible, non pas à la température, mais aux variations de température. Le chapitre 2 est une analyse théorique dans laquelle on met en oeuvre les méthodes de la physique mésoscopique et en particulier la théorie du transfert radiatif développée pour les électrons, la mécanique quantique et l'optique. Cette analyse aboutit à une expression analytique de la fonction d'intercorrélation à deux températures et à son interprétation. Enfin le chapitre 3 présente une étude expérimentale visant à mesurer la fonction d'intercorrélation à deux températures. Il s'agit d'une expérience en dimensions réduites avec des ultrasons pour tester l'imagerie sismique en milieu complexe et ses difficultés.

# Chapitre 1

## Diffusion multiple et sismologie

### 1.1 Diffusion multiple

#### 1.1.1 Speckle ou source d'information ?

La diffusion multiple est un phénomène très étudié en physique. Elle concerne un très grand nombre de domaines : la physique atomique, la physique des semi-conducteurs, l'astrophysique, l'optique, l'acoustique, l'imagerie médicale et la propagation des ondes sismiques dans la Terre. Bien que ces disciplines fassent intervenir des sujets et des échelles très différentes (du nanomètre pour l'optique aux kilomètres pour la sismologie) des théories communes ont pu être développées car pour citer Léon Brillouin "All waves behave in a similar way".

Le degré d'hétérogénéité du milieu est une donnée fondamentale car il détermine la nature de la propagation de l'onde dans le milieu. Par exemple, dans un bar très enfumé, la lumière des spots lumineux n'est pas multiples diffusée. Il est toujours possible de suivre la direction de la lumière qui trace des chemins rectilignes. On dit qu'on est dans un régime de diffusion simple. Par contre, un jour de très fort brouillard, le ciel apparaît uniformément lumineux, même en regardant dans la direction du soleil, ou de nuit, les phares des voitures créent des halos lumineux et ne donnent pas naissance à des faisceaux rectilignes comme les spots du bar. Dans ces situations nous sommes en présence de diffusion multiple. La lumière a été diffusée de nombreuses fois et a perdu la mémoire de sa direction initiale avant de nous parvenir. Ainsi, pour généraliser, la diffusion multiple concerne la propagation des ondes dans des milieux avec une forte hétérogénéité, c'est-à-dire un fort désordre, de nombreux diffuseurs répartis de façon aléatoire, des variations d'impédances.

Après avoir traversé un milieu désordonné, une onde est déformée mais contient de l'information sur le milieu qu'elle a traversé. La diffusion multiple présente un grand intérêt pour l'étude de matériaux inertes ou vivants. Ainsi, l'analyse de la lumière qui nous parvient d'étoiles lointaines, nous renseigne sur la matière qui se trouve entre elle et nous. En sismologie, l'analyse des ondes multiples diffusées nous renseigne par exemple sur la structure interne d'un volcan.

En fonction des disciplines, l'étude de la propagation d'une onde à travers un milieu désordonné a pour but de répondre à des questions différentes qu'on peut classer selon trois problématiques :

1. Comment déterminer les caractéristiques physiques d'une onde incidente sur un milieu hétérogène à partir de son onde transmise ? C'est le problème auquel sont confrontés les astrophysiciens ou les télécommunications.
2. Résoudre le problème direct, c'est-à-dire déterminer les propriétés de transport d'une onde à travers un milieu hétérogène.
3. Résoudre le problème inverse, c'est-à-dire déterminer les caractéristiques du milieu à partir de la détection des ondes diffuses. La propagation de l'onde dans le milieu hétérogène a alors un but d'imagerie. C'est la problématique de l'imagerie médicale mais aussi de la sismologie.

Par exemple en sismologie, en utilisant des propriétés des champs diffus, Vidale *et al.* [1, 2] ont mis en évidence une super rotation du noyau interne de la terre : le noyau interne de la terre tourne légèrement plus vite que la partie externe de la terre ; Grêt *et al.* [3] ont montré qu'on pouvait détecter des changements de la structure interne -très hétérogène- d'un volcan ; Snieder *et al.* [4] ont montré qu'on pouvait en déduire la distance entre deux foyers sismiques proches. Actuellement, on cherche également à utiliser le champ diffu pour évaluer des modifications de propriétés de matériaux très hétérogènes comme la température ou la contrainte, ou bien déterminer le mouvement d'une source sismique.

La diffusion dans un milieu désordonné peut être décrite à trois niveaux. Le premier, qui est le plus familier, est le niveau macroscopique. Avec une bonne approximation, l'intensité associée à l'onde effectue un mouvement diffusif (marche au hasard). Au niveau mésoscopique, on n'étudie pas les diffuseurs de façon individuelle mais on tient compte des interférences entre chemins de diffusion. Deux éléments entre en jeu : la diffusion de l'onde par un diffuseur et la propagation entre deux diffuseurs. Enfin, au niveau microscopique, le comportement de l'onde est entièrement décrit par son interaction avec les composantes élémentaires du milieu diffusant. Dans ce travail, nous nous plaçons au niveau mésoscopique.

### 1.1.2 Les longueurs caractéristiques

6 longueurs caractéristiques interviennent dans la propagation d'une onde en milieu désordonné : la longueur d'onde  $\lambda$ , le libre parcours moyen  $l$ , le libre parcours moyen de transport  $l^*$ , la longueur d'absorption  $l_a$ , la taille du système  $L$ , et la longueur de cohérence  $l_\phi$ .

**Le libre parcours moyen  $l$**  correspond à la distance moyenne entre deux diffusions de l'onde. Il est donnée par  $l = \frac{1}{n\sigma}$  avec  $\sigma$  la section efficace et  $n$  la densité de diffuseurs.

**Le libre parcours moyen de transport  $l^*$**  est la distance caractéristique que doit parcourir l'onde pour perdre la mémoire de sa direction de propagation incidente. Il est défini à partir de la section efficace de transport  $\sigma^*$  par :  $\sigma^* = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(1 - \cos\theta)d\theta$  puis  $l^* = \frac{1}{n\sigma^*}$ . On voit que dans cette expression on a annulé les contributions du diffuseur dans la direction de propagation incidente. Si la section efficace différentielle est isotrope  $l = l^*$ , par contre si la section efficace différentielle est plus importante vers l'avant, le rayon lumineux va rester plus longtemps dans sa direction d'incidence et on a effectivement  $l^* > l$ .

**La longueur d'absorption** est donnée par  $L_a = \sqrt{D\tau_a}$  où  $D$  est la constante d'absorption et  $\tau_a$  est le temps caractéristique d'absorption. Cela signifie que pour un système de taille  $L > l_a$  les ondes sont significativement absorbées, amorties.

**La longueur de cohérence**  $l_\phi$  propre aux systèmes quantiques, décrit la longueur sur laquelle la fonction d'onde garde sa cohérence de phase. Pour des distances supérieures à  $l_\phi$  la phase est perdue et les effets d'interférence disparaissent suite au couplage avec le milieu.

Dans notre étude, on se place dans le régime dit *mésoscopique de faible désordre* tel que :  $\lambda \ll l^* \ll L \ll l_\phi$ . La propagation de l'onde est cohérente car  $L \ll l_\phi$  et de multiples diffusions ont lieu ( $l^* \ll L$ ). La longueur d'onde  $\lambda$  est petite devant le libre parcours moyen  $l^*$ . C'est donc le régime où on peut observer des phénomènes d'interférence tels que la localisation faible ou rétrodiffusion cohérente.

## 1.2 Diffusion multiple en sismologie : une nouvelle mine d'information

### 1.2.1 Coda sismique

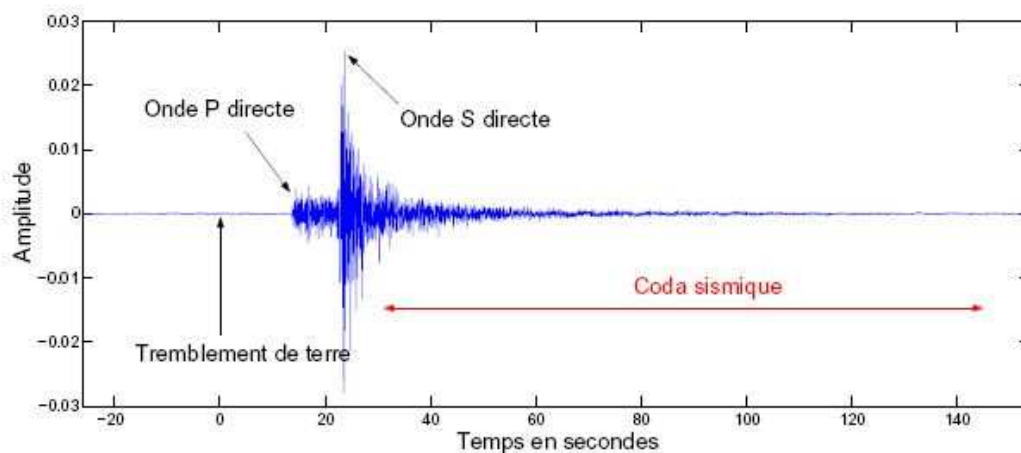


FIG. 1.1 – Exemple d'enregistrement d'un séisme (localisé à 90 km). Les ondes P (de compression) arrivent en premier, puis les ondes S (de cisaillement) plus lentes. La coda présente une décroissance exponentielle.

Les travaux de Keiiti Aki (1969) [5] montrent que la croûte terrestre peut se comporter comme un milieu multiple diffuseur pour les ondes sismiques - les diffuseurs sont alors des zones dans lesquelles les paramètres élastiques sont différents de ceux du reste du milieu. On remarque en effet, sur un sismogramme que les ondes directes S et P dont les temps de trajets ne sont que de quelques secondes sont suivies pendant plusieurs minutes de trains d'ondes continus et s'amortissant lentement dans le temps. Ainsi certaines de ces ondes ont parcouru plusieurs dizaines de fois la distance source-station, soit plusieurs centaines de milliers de kilomètres avant d'être détectées. Ce train d'onde est appelé Coda sismique par analogie à la



coda musicale qui marque la fin d'un morceau de musique. Aki est le premier à s'être intéressé à ce train d'onde et à reconnaître en lui un marqueur de l'hétérogénéité de la lithosphère.

### 1.2.2 Facteur de Coda Q

Une analyse des données (Keiiti Aki, [5, 6, 7]) montre que l'énergie  $K$  de la coda obéit à une loi exponentielle en fonction du temps  $t$  appelé âge de la coda :

$$K \sim t^{-\gamma} \exp(-2\pi ft/Q_c) \quad (1.1)$$

avec  $f$  la fréquence et  $\gamma$  un exposant dont les valeurs observées sont de l'ordre de 1.  $Q_c$  est appelé facteur de qualité de la coda. Il s'avère être un paramètre robuste, indépendant de la distance source station ou de la magnitude du séisme mais dépendant de l'environnement géologique.  $Q_c$  dépend à la fois des effets de diffusion et de dissipation. Il est utilisé comme outil pour réaliser des tomographies en absorption ou en vitesse en sismologie.

La théorie du transfert radiatif permet de retrouver une formule ressemblant beaucoup à celle (1.1) proposée de façon empirique par Aki *et al.* [5, 6, 7].

$$E(\vec{r}, t) \sim \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\xi^2 Dt}{H^2} - \frac{t}{\tau_a}\right) \quad (1.2)$$

avec  $H$  la profondeur de la croûte terrestre,  $\xi$  un paramètre sans dimensions et  $D$  le coefficient de diffusion des ondes sismiques. On voit sur cette formule qu'il y a deux contributions à la décroissance exponentielle : l'absorption et la diffusion.

### 1.2.3 Equipartition de l'énergie

Ce phénomène de diffusion multiple dans la croûte terrestre a été confirmé par la mesure d'une équipartition de l'énergie dans tous les modes de vibration possibles de la croûte [8].

Dans le cas d'un milieu solide, il existe deux modes distincts : les ondes de compression  $P$  et les ondes de cisaillement  $S$ . Le principe d'équipartition impose que les modes aient tous le même poids énergétique et la physique statistique nous apprend qu'à une fréquence  $f$  et en 3D il y a  $2f^2/v^3$  modes par unité de volume, où  $v$  désigne la vitesse de propagation des ondes. Les ondes  $P$  et  $S$  n'ont pas la même vitesse et en outre les ondes  $P$  sont polarisées longitudinalement alors que les ondes  $S$  ont une polarisation transverse ce qui leur offre deux degrés de liberté. Ainsi dans le cas de l'équipartition de l'énergie on s'attend à un rapport d'énergie  $S/P$  en milieu infini est égal à :

$$\frac{E_S}{E_P} = 2 \left(\frac{v_P}{v_S}\right)^3 = 10.3 \quad (1.3)$$

Si on prend en compte les effets de bord on a  $\frac{E_S}{E_P} = 7.19$ .

Si la coda sismique est dominée par la diffusion multiple on s'attend à une équipartition de l'énergie. En effet, la présence de désordre se traduit par le couplage progressif entre les modes de propagation qui conduit à une distribution uniforme de l'énergie dans l'espace de phase.

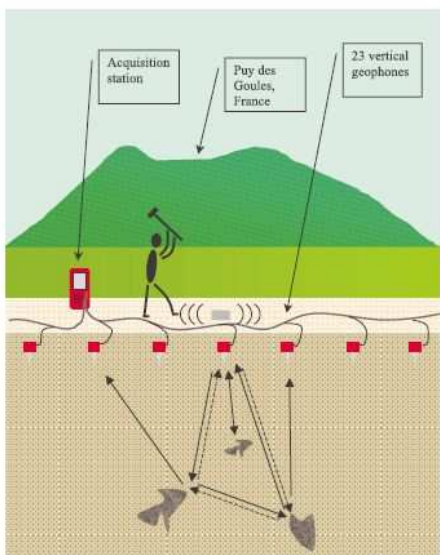
Une expérience réalisée au Mexique -dont le sous sol est très hétérogène- par L. Margerin *et al.* [9] donne un rapport de  $7.2 \pm 0.7$  ce qui est en excellent accord avec la valeur prédite plus haut.

### 1.2.4 Mésoscopie des ondes sismiques

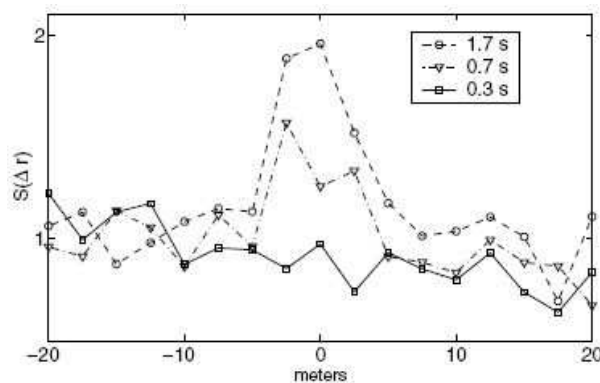
Une question se pose : est ce que l’approche mésoscopique s’applique aux ondes sismiques ? On a montré que le champ d’onde de la coda est multiplement diffusé en se basant sur des arguments énergétiques mais la phase est-elle conservée ?

Un diagnostic pour vérifier que les ondes multiplement diffusées gardent leur cohérence est la fonction de corrélation du déplacement qui en sismologie se mesure typiquement en espace temps :  $\langle \vec{u}(\vec{r} - \frac{\vec{x}}{2}, t - \frac{\tau}{2}) \vec{u}(\vec{r} + \frac{\vec{x}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) \rangle$  où la moyenne peut être faite sur une fenêtre temporelle  $\Delta T$  dans une bande de fréquence  $\Delta f$ , ou sur des réalisations indépendantes. Le théorème de fluctuation dissipation applicable dans le cas de l’équilibre thermodynamique mais qui marche quand même grâce à l’équipartition montre que la corrélation espace-temps du champ est proportionnelle à la fonction de Green symétrique en temps  $G(\vec{x}, t) + G(\vec{x}, -t)$ . Là encore les résultats sont nombreux et très encourageants [10].

Un second test a été la mise en évidence d’un effet de localisation faible (bien connu en mécanique quantique) pour les ondes sismiques sur le Puy des Goules (en effet les volcans sont des milieux très hétérogènes donc bien diffusants) par Eric Larose *et al.* [11].



(a) Dispositif expérimental. Les flèches en traits pleins ou en pointillés illustrent les chemins de diffusion réciproque



(b) Distribution de l’énergie en fonction de la distance source récepteur pour différents durées. On peut voir que la probabilité de retourner à la source est deux fois plus grande que celle d’aller vers les autres récepteurs lorsque la diffusion est multiple.

FIG. 1.2 – La localisation faible est un effet d’interférence constructive entre les chemins réciproques.

On constate que les ondes sismiques de la coda présentent la propriété de cohérence et d’interférence. On va donc pouvoir leur appliquer les méthodes de la mésoscopie développées pour les électrons ou l’optique.

### 1.3 Coda Wave Interferometry

L'étude de la coda a longtemps été négligée au profit de la compréhension des ondes directes. Toutefois, comme l'objet de cette étude va le montrer, la coda est elle aussi riche en informations.

#### 1.3.1 Un moyen d'étude de la dynamique des diffuseurs

Le principe de la Coda Wave Interferometry [12] est exactement le même que celui de la DAWS (Diffusing Acoustic Wave Spectroscopy) qu'on doit à John H. Page *et al.* [13]. Dans les matériaux où on a de la diffusion multiple, l'information sur la position des diffuseurs est perdue. Les images du champ acoustique multiplement diffusé sont dominées par du speckle (fluctuations aléatoires du champ) qui provient de l'interférence entre les ondes diffusées qui ont suivi différents chemins à travers l'échantillon. Si on perd l'information sur la position des diffuseurs, on peut toutefois utiliser les fluctuations du "speckle pattern" lorsque les diffuseurs bougent pour étudier la dynamique du système. Il s'agit là de l'idée de la DAWS que nous présentons dans cette section.

On mesure la fonction d'autocorrélation du champ de pression  $\psi(t)$  dans la coda sismique entre deux enregistrements distants de  $\tau$  :

$$g(\tau) = \frac{\int \Psi(t)\Psi^*(t+\tau)dt}{\int |\Psi(t)|^2 dt} \quad (1.4)$$

On utilise l'approximation de diffusion dans laquelle on suppose que les ondes multiplement diffusées voyagent dans l'échantillon selon une marche aléatoire caractérisée par la longueur moyenne de transport  $l^*$ , la vitesse de l'énergie  $v_E$  et le coefficient de diffusion  $D = v_E l^* / 3$ . On commence par le cas de la diffusion isotrope en considérant un seul chemin de marche aléatoire de  $n$  pas et donc de longueur totale  $s = (n+1)l$ . La contribution de ce chemin à la décroissance de  $g(\tau)$  est déterminée par le déphasage du mouvement de tous les diffuseurs sur le chemin. D'après la figure 1.3, on voit que entre  $t$  et  $t+\tau$ , on a un déphasage total qui s'écrit comme :

$$\Delta\phi^{(n)}(\tau) = \sum_{p=0}^n \Delta\phi_p(\tau) = \sum_{p=0}^n \left[ \vec{k}_p \cdot \{ \Delta\vec{r}_{p+1}(\tau) - \Delta\vec{r}_p(\tau) \} \right] = \sum_{p=1}^{n-1} \vec{k}_p \cdot \Delta\vec{r}_{rel,p}(\tau, l) + \vec{k}_0 \cdot \Delta\vec{r}_1(\tau) - \vec{k}_n \cdot \Delta\vec{r}_n(\tau) \quad (1.5)$$

où  $\vec{k}_p$  est le vecteur de l'onde diffusée entre le  $p^{ième}$  et le  $(p+1)^{ième}$  diffuseur, et  $\Delta\vec{r}_{rel,p}(\tau) = \Delta\vec{r}_{p+1}(\tau) - \Delta\vec{r}_p(\tau)$  est le déplacement relatif des diffuseurs pendant l'intervalle de temps  $\tau$ .

La fonction d'autocorrélation totale est obtenue en moyennant sur tous les chemins de  $n$  diffuseurs, puis en sommant sur les longueurs  $n$  de chemin :

$$g(\tau) = \sum_n P(n) \langle e^{-i\Delta\phi^{(n)}(\tau)} \rangle \quad (1.6)$$

où  $P(n)$  est la fraction d'intensité diffusée dans les chemins de longueur  $n$ ,  $\langle \dots \rangle$  dénote à la fois une moyenne configurationnelle sur le changement de position des diffuseurs et une moyenne sur tous les vecteurs d'onde possibles  $\vec{k}_p$ .

– Dans une expérience en continu la somme s'étend nécessairement sur tous les  $n$ .

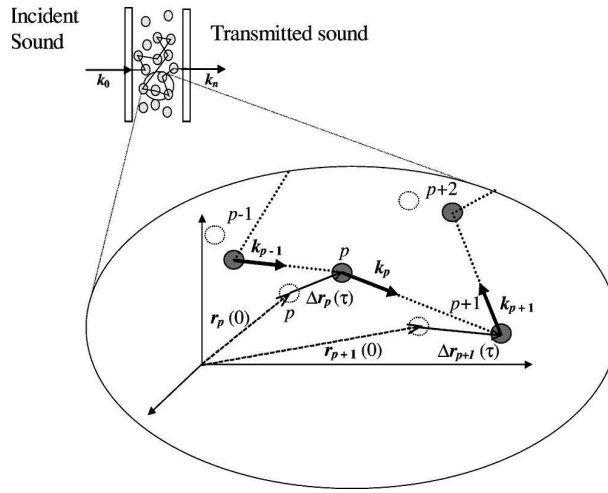


FIG. 1.3 – Zoom sur un chemin de diffusion multiple avec des diffuseurs en mouvement. Les sphères pleines correspondent aux diffuseurs à l’instant  $t = \tau$  et les sphères creuses à  $t = 0$

- Dans une expérience résolue en temps, comme dans un séisme, la longueur moyenne du chemin  $s$  est déterminée par le temps écoulé depuis le pulse  $t = \frac{s}{v_E} = \frac{(n+1)l}{v_E}$  et on restreint la somme aux chemins dont les longueurs diffèrent de la moyenne par la largeur du pulse ( $\Delta t/v_e$ ). En particulier pour un pulse de largeur temporelle étroite,  $P(n)$  est quasi-constant dans la somme sur  $n$  et la fonction de corrélation normée prend la forme très simple :

$$g(\tau, t_n) \simeq \langle e^{i\Delta\phi^{(n)}(\tau)} \rangle \quad (1.7)$$

L’équation 1.7 montre immédiatement l’intérêt de la DAWS, en particulier pour les mesures utilisant un pulse. En effet,  $g(\tau)$  ne dépend pas des effets de conditions de bord, ni de l’absorption des ultrasons lors de la propagation à travers l’échantillon.

On peut alors utiliser le théorème de la limite centrale qui dit que si  $\Delta\phi^{(n)}(\tau) = \sum_{p=0}^n \Delta\phi_p(\tau)$  est une somme de variables aléatoires indépendantes (ce qui est une bonne approximation) avec  $n \rightarrow \infty$  (valable car en diffusion multiple il y a beaucoup de diffuseurs) alors  $\Delta\phi^{(n)}(\tau)$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle. Ainsi avec un développement en cumulants :

$$g(\tau) \simeq \langle e^{i\Delta\phi^{(n)}(\tau)} \rangle \simeq e^{-\frac{1}{2}\langle \Delta\phi^{(n)}(\tau)^2 \rangle} \quad (1.8)$$

car à cause du théorème de limite central seul le second cumulant est non nul.

En utilisant de nouveau que les déphasages de chaque diffusion sont indépendants ce qui est une bonne approximation pour les grandes valeurs de  $n$  :

$$g(\tau) \simeq \exp \left[ -\frac{n}{2} \langle [\vec{k} \cdot \Delta\vec{r}_{rel}(\tau, l)]^2 \rangle \right] \quad (1.9)$$

Enfin, lorsque les directions de  $\vec{k}$  et  $\Delta\vec{r}_{rel}$  ne sont pas corrélées, la moyenne donne :

$$g(\tau) \simeq \exp \left[ -\frac{nk^2}{6} \langle \Delta r_{rel}^2(\tau, l) \rangle \right] \quad (1.10)$$

On montre que l'autocorrélation est une exponentielle décroissante avec  $n$  (directement relié au temps de parcours des ondes diffusées depuis leur émission) et le déplacement quadratique moyen. Si on poursuit le calcul, il peut également être intéressant d'exprimer l'autocorrélation en fonction de l'évolution temporelle du tenseur des contraintes. Des expériences avec des suspensions de billes de verre dans un mélange eau+glycérol ont validé l'efficacité de cette méthode. L'expression 1.10 montre que plus  $n$  est grand, c'est-à-dire plus il y a de diffusions, plus  $g$  est sensible à  $\langle \Delta r^2 \rangle$ .

### 1.3.2 Applications en matière molle

La DAWS est un outil quantitatif très important en physique des colloïdes [14] du fait de son applicabilité à des systèmes contenant des très hautes concentrations de diffuseurs et de sa sensibilité extrême aux petits mouvements. Cette sensibilité trouve son origine dans une amplification du déphasage due aux très longues trajectoires.

### 1.3.3 Applications en sismologie

La démonstration qu'on pouvait utiliser la DAWS en sismologie afin de détecter des petites modifications de structure interne dans les volcans a été faite par Grêt *et al.* [3] sur l'exemple du Mont Erebus.

Le Mont Erebus est un volcan avec un lac de lave. La cavitation de grosses bulles de gaz génère des explosions Stromboliennes qui fournissent une source sismique répétitive dont les ondes se propagent ensuite dans la géologie très diffusante du volcan. La reproductibilité est assurée par la petite taille du lac de lave (20 m). Les sismogrammes sont enregistrés à partir d'un ensemble de stations dont on peut voir la répartition figure 1.4.

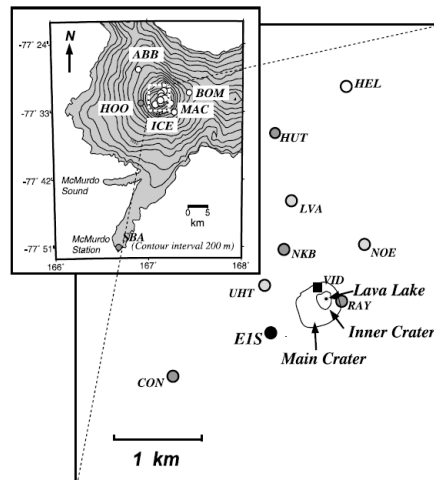


FIG. 1.4 – Carte d'instrumentation du Mont Erebus

On compare ensuite les sismogrammes enregistrés à chaque événement à celui du premier événement dans deux fenêtres : une fenêtre située dans la partie des ondes directes (ou balistiques) et l'autre située loin dans la coda. Figure 1.5(a) les événements sont distants d'une

journée, on observe une bonne reproductibilité du signal dans la partie des ondes directes mais aussi dans la coda ce qui indique que la fonction de Green est peu changée. Dans la figure 1.5(b) les événements sont distants de 15 jours, on observe toujours une bonne reproductibilité pour les ondes directes, par contre il y a des différences importantes dans la coda. On interprète ce changement dans la coda comme la manifestation d'un changement dans le milieu trop faible pour affecter les ondes directes mais qu'on peut visualiser grâce à l'effet d'accumulation caractéristique des ondes multiples diffusées.

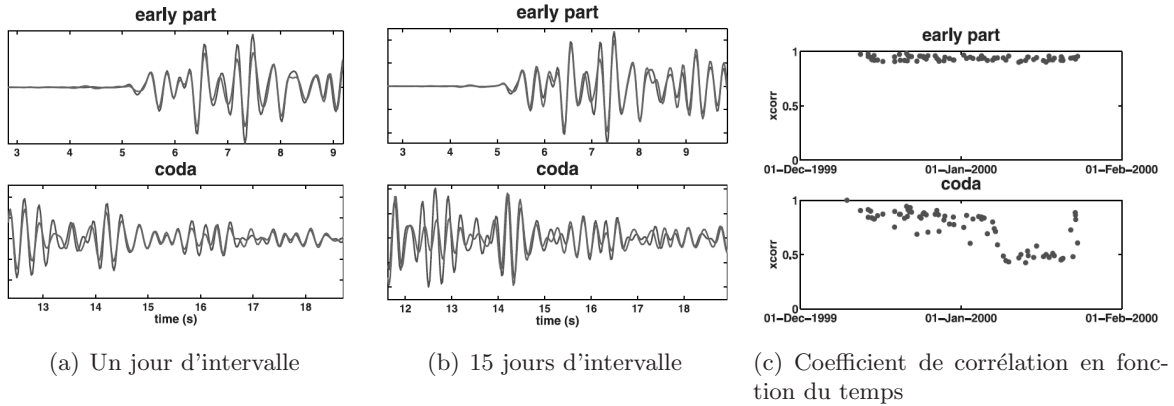


FIG. 1.5 – (a) et (b) Montrent la superposition de 2 sismogrammes dans deux fenêtres dans la partie des ondes directes puis de la coda à respectivement 1 et 15 jours d'intervalle. (c) Montre le coefficient de corrélation pour la composante verticale enregistrée à la station ES1 en fonction du temps.

On quantifie ensuite ce changement dans la coda en calculant le coefficient de corrélation  $C$  donné par le maximum de la fonction d'autocorrélation normalisée et calculée sur la fenêtre.

$$C = \max_{\tau} \left( \frac{\int \Psi(t)\Psi(t + \tau)dt}{\int \Psi^2(t)dt} \right) \quad (1.11)$$

D'après la théorie de la DAWS, si les diffuseurs ne bougent pas,  $C$  vaut 1, sinon il y a une décroissance exponentielle avec l'écart quadratique des diffuseurs. La figure 1.5(c) représente le coefficient de corrélation en fonction du temps écoulé par rapport au premier séisme. On observe nettement une chute du coefficient de corrélation le 8 janvier 2000. Ce changement reflète une évolution soudaine de la structure interne du volcan et qui affecte ses propriétés diffusantes. Ce changement est très faible donc invisible dans les ondes directes mais il peut être observé dans la coda grâce à sa grande sensibilité aux changements dans le milieu.

Les applications d'une telle observation sont évidentes. On espère ainsi prévoir les éventuelles éruptions volcaniques parce qu'on s'attend à ce qu'elles soient précédées de modifications de la structure interne.

## 1.4 Comment mesurer des variations de température dans un volcan ?

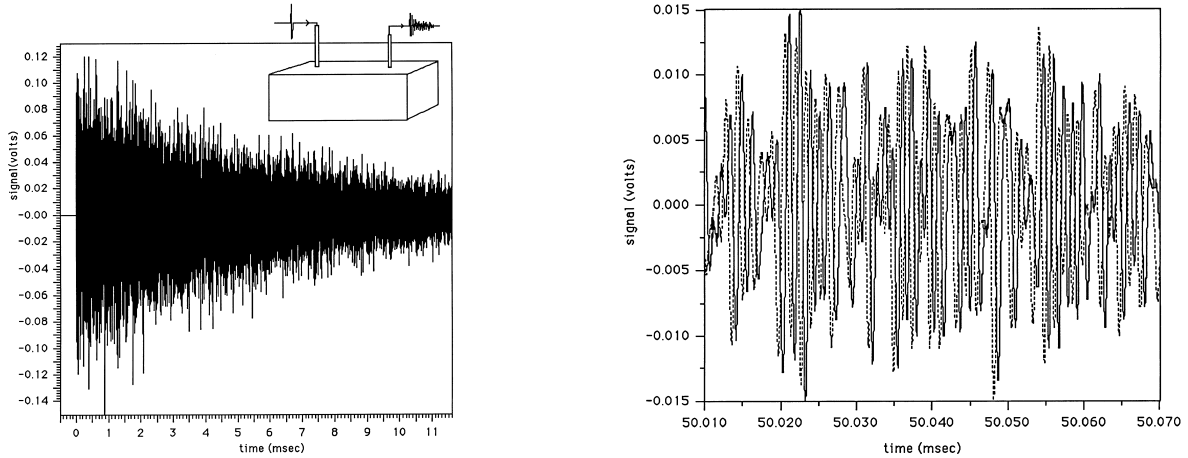
Nous venons de montrer que la DAWS consiste à déceler de très faibles modifications dans la position des diffuseurs en étudiant les ondes multiples diffusées. Notre idée est d'étendre cette méthode pour étudier les variations de vitesse dans le milieu au cours du temps, par exemple dues à des écarts de température  $\Delta T = T_1 - T_2$  avec  $T_1$  et  $T_2$  deux températures successives du milieu. On utilise le même outil d'étude, la fonction d'intercorrrelation du champ de pression dans la coda  $\Psi(t)$  à deux températures  $T_1$  et  $T_2$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\tau, t, T_1, T_2) &= \frac{\int \Psi_{T_1}(t) \Psi_{T_2}^*(t+\tau, T_2) dt}{\sqrt{\int |\Psi_{T_1}(t)|^2 dt \int |\Psi_{T_2}(t)|^2 dt}} \\ &\sim \left\langle \exp\left(-\sum_{p=0}^n \Delta\phi_p\right) \right\rangle \sim \left\langle \exp\left(-\sum_{p=0}^n (\vec{k}_p(T_1) - \vec{k}_p(T_2)) \cdot \vec{r}_p\right) \right\rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

où l'intégrale est faite sur une courte fenêtre centrée en l'âge de la coda  $t$ .

### 1.4.1 Influence de la température sur la coda sismique

R. Weaver [15, 16] montre expérimentalement dans un bloc d'aluminium que lorsque la température augmente, les ondes sont ralenties ce qui conduit à une dilatation temporelle du signal avec un coefficient  $\alpha$  mais aussi distordues comme l'illustre la figure 1.6. Malheureusement ce sont des effets très faibles, a priori difficiles à quantifier.



(a) Une source impulsionnelle donne lieu à un signal ultrasonore stochastique et robuste. Ce signal résulte d'une moyenne de 10 à 100 impulsions

(b) Section de  $60\mu s$  de signal à un âge  $t = 50ms$ . Le signal d'origine semble déplacé vers la droite alors que l'échantillon refroidit et aussi un peu distordu.

FIG. 1.6 – Dispositif expérimental

Il est important de remarquer que cette expérience n'est pas tout à fait de la diffusion multiple car l'aspect chaotique est dû aux réflexions à la surface. On s'attend à ce que le résultat soit le même pour une expérience en diffusion multiple mais cela n'a pas encore été vérifié.

### 1.4.2 La fonction d'intercorrélation, l'outil adéquat

La fonction d'intercorrélation 1.12 est l'outil adéquat pour évaluer finement ces effets de la température sur la coda car c'est un moyen d'évaluation de la ressemblance entre deux signaux dans une fenêtre centrée en  $t$ . Elle est maximale en  $\tau_{max}$  si les signaux sont décalés de  $\tau_{max}$ . Ce maximum vaut 1 si c'est un décalage pur. Sinon, plus la distorsion est grande plus ce maximum décroît.

Dans le cas de la variation de température, la dilatation des signaux peut être vue localement comme un décalage des signaux qui varie linéairement avec l'âge de la coda. Donc, dans la fonction de corrélation, la dilatation va se traduire par un déplacement du maximum de corrélation  $\tau_{max}$  linéaire en l'âge de la coda :  $\tau_{max} = \alpha t$ . La distorsion va se traduire par un terme d'amortissement dans la fonction d'intercorrélation.

Ainsi, R.Weaver [15, 16] propose la formule suivante pour la fonction d'intercorrélation à deux températures à la fréquence  $\omega$  :

$$\mathcal{C}(\tau, t) \sim \exp(i\omega(\tau - \alpha t)) \exp(-D) \quad (1.13)$$

où  $t$  est l'âge de la coda, c'est-à-dire le temps écoulé depuis le début de la source et  $\tau$  le temps de corrélation. Discutons cette formule 1.13 :

- $\exp(i\omega(\tau - \alpha t))$  montre que le signal est dilaté dans le temps d'un facteur  $\alpha$ . Si on considère que cette dilatation est uniquement due au ralentissement des ondes entre les diffuseurs alors  $\alpha = \frac{\Delta c}{c} = \chi \Delta T$  avec  $c$  la vitesse des ondes, et  $\chi$  la variation relative de vitesse par degré.
- On a également un effet de distorsion du signal qui se traduit par  $\exp(-D)$ . R. Weaver propose ce modèle pour le coefficient de distorsion  $D$  :

$$D \propto (\Delta T)^2 \omega^2 t V/S \quad (1.14)$$

où  $V$  est le volume de l'échantillon d'aluminium et  $S$  sa surface.

Essayons de comprendre l'expression 1.14 de  $D$ . R. Weaver pense que cette distorsion est due à la conversion entre les ondes S et P aux interfaces. En l'absence de cette conversion, la corrélation s'exprimerait :  $\mathcal{C}(\tau, t) = \exp(i\omega(\tau - \alpha t))$ . Or du fait de la conversion des ondes entre P et S, la vitesse n'est pas exactement  $c(T)$  mais tantôt  $c_P(T)$  et tantôt  $c_S(T)$ . Cette expression n'est donc plus exacte. On a donc plutôt :  $\mathcal{C}(\tau, t) = \langle \exp(i\omega(\tau - \alpha t)) \rangle$  où  $\langle \dots \rangle$  dénote une moyenne pondérée entre les ondes S et P. Essayons de calculer cela.

La variation relative de vitesse par degré  $\chi$  varie au cours du temps  $t$ . En moyenne elle vaut  $\bar{\chi} = (\chi_P t_P + \chi_S t_S)/t = t_P(\chi_P - \chi_S)/t + \chi_S$  avec respectivement  $\chi_P$  et  $\chi_S$  la variation relative de vitesse par degré pour les ondes P et S et respectivement  $t_P$  et  $t_S$  les temps passés par l'onde dans les modes P ou S. On en déduit la variance de  $\chi$  :

$$var(\chi) = \frac{(\chi_P - \chi_S)^2}{t^2} var(t_P) \quad (1.15)$$

Par ailleurs on montre que la variance de  $t_P$  est linéaire en  $t$  d'où  $var(\chi) \propto 1/t$ . Donc finalement, en notant  $\chi = \bar{\chi} + \tilde{\chi}$ , avec  $\tilde{\chi}$  la partie fluctuante de  $\chi$  :

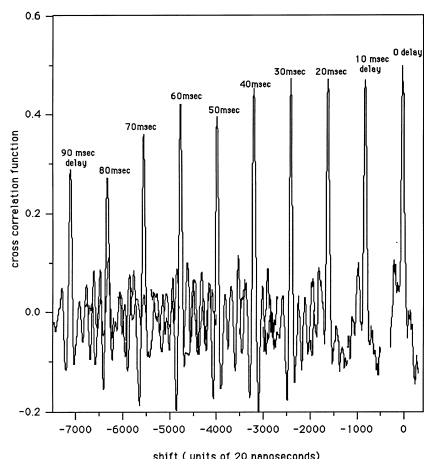
$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\tau, t) &= \langle \exp(i\omega(\tau - \alpha t)) \rangle \\ &= \exp(i\omega(\tau - \bar{\chi} \Delta T t)) \langle \exp(i\omega \tilde{\chi} \Delta T t) \rangle \\ &= \exp(i\omega(\tau - \bar{\chi} \Delta T t)) \exp(-\frac{1}{2} \omega^2 var(\tilde{\chi}) (\Delta T)^2 t^2) \\ &= \exp(i\omega(\tau - \bar{\chi} \Delta T t)) \exp(-\frac{1}{2} \omega^2 (\Delta T)^2 t \frac{V}{S} x) \end{aligned} \quad (1.16)$$



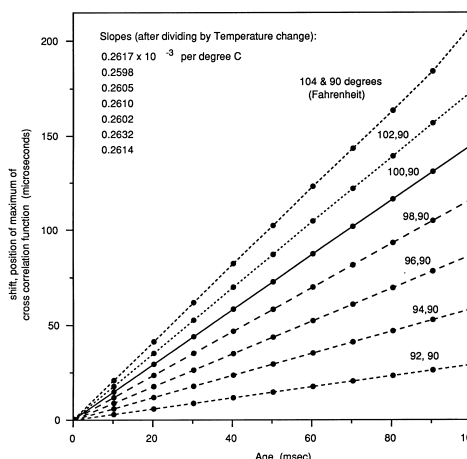
où  $x$  est une constante. On obtient donc effectivement l'équation 1.14. Le rapport  $V/S$  provient du fait que la conversion S/P se produisant à la surface, la variance  $var(t_P)$  est d'autant plus grande que la taille  $V/S$  de l'échantillon est grande.

### 1.4.3 Confirmation expérimentale de R. Weaver

Les résultats expérimentaux de R. Weaver sont présentés dans les figures 1.6, 1.7 et 1.8.

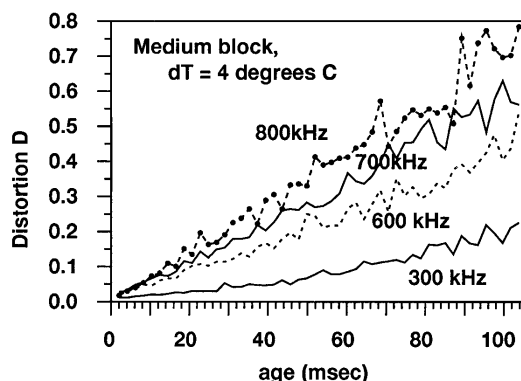


(a) La corrélation entre des signaux obtenus à 30 et 36°C est représentée pour différents âges

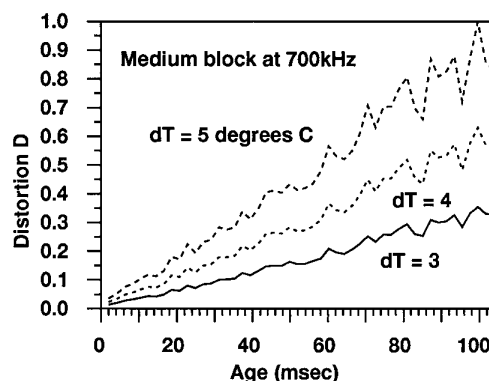


(b) La position du maximum de corrélation est représentée en fonction de l'âge et du changement de température

FIG. 1.7 – La variation de température induit un décalage linéaire en temps des signaux et linéaire avec le changement de température.



(a) D augmente linéairement avec l'âge et quadratiquement avec la fréquence centrale



(b) D est proportionnel au carré de l'écart de température

FIG. 1.8 – Étude de la distorsion D

Ils confirment l'intérêt de l'utilisation de la fonction d'intercorrélation. La figure 1.7 met en évidence la linéarité du décalage  $\tau_{max} = \alpha t$  du maximum de la fonction d'intercorrélation

avec l'âge  $t$  de la coda. On voit qu'on peut ainsi évaluer finement ce décalage. La figure 1.8, présente la vérification expérimentale de la formule de la distortion 1.14.

#### 1.4.4 Problématique du stage

La dilatation temporelle  $\alpha$  de la coda lors d'un changement de vitesse globale est un phénomène que les sismologues pourraient utiliser pour réaliser des tomographies en vitesses de régions sismiques ou des tomographies en température de l'intérieur d'un volcan.

Toutefois, un passage de l'expérience de laboratoire en ultrasons (où la plupart des paramètres physiques sont contrôlables) à l'expérience de terrain s'impose. Une des difficultés majeures des sismologues est que le plus souvent plusieurs paramètres sont modifiés simultanément : la position de la source, la position des diffuseurs et une modification de vitesse. Ainsi il est difficile d'extraire l'information relative à chacun de ces paramètres.

Le but de mon travail est de réaliser d'une part une étude théorique et d'autre part une étude expérimentale dans le but d'isoler des autres paramètres l'influence du changement de température sur la coda.

Le but de l'étude théorique est de vérifier si on a effectivement une dilatation temporelle du signal dans le cas de la diffusion multiple et d'évaluer le facteur de dilatation de la coda. L'hypothèse section 1.4.2 est que seul le changement de vitesse entre les diffuseurs intervient et que le facteur de dilatation est  $\Delta c_0/c_0$ . Toutefois, nous pensons qu'il peut y avoir d'autres contributions non négligeables telles que la variation de vitesse à l'intérieur des diffuseur  $\Delta c_1/c_1$  et le temps de piégeage de l'onde à l'intérieur d'un diffuseur. Nous travaillerons avec un modèle d'ondes scalaires afin de simplifier tout en conservant à l'esprit qu'on cherche à résoudre le problème pour des ondes élastiques avec une composante de compression et une composante de cisaillement qui sont couplées. Nous allons essayer d'obtenir une expression analytique de la fonction d'intercorrélation au premier ordre en variation en utilisant les méthodes de physique mésoscopique et les analogies avec les électrons et l'optique, en l'occurrence la théorie du transfert radiatif.

L'étude expérimentale a pour but de voir si les résultats de R. Weaver peuvent être reproduits en milieu non contrôlé (le béton) et se rapprochant des conditions des milieux naturels (roches).

## Chapitre 2

# Intercorrélations à deux températures

Dans cette partie je présente mon travail pour trouver une expression analytique pour la fonction d'intercorrélation à 2 températures :  $\mathcal{C}(\vec{R}, \vec{x}, t, \frac{\tau}{2}, T_1, T_2) = \left\langle \Psi_{T_1}(\vec{R} - \frac{\vec{x}}{2}, t - \frac{\tau}{2}) \Psi_{T_2}^*(\vec{R} + \frac{\vec{x}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) \right\rangle$  dans le cas particulier des ondes scalaires. J'utilise pour cela la théorie du transfert radiatif et je me base sur le travail de Ad Lagendijk et B. A. van Tiggelen [17].

### 2.1 Approche phénoménologique du transfert radiatif

Dans cette première section nous allons énoncer l'équation de transfert radiatif telle qu'elle a été développée par Chandrasekhar en 1960. Soit  $I_{\vec{k}}$  la quantité d'énergie traversant une surface dans une direction  $\vec{k}$  donnée par unité de temps, d'angle solide et de surface. Nous allons expliciter la propagation de cette intensité  $I_{\vec{k}}$  dans un milieu hétérogène, statistiquement isotrope, élastique et contenant des diffuseurs de section efficace  $\sigma$  et de densité  $n$ .

L'équation de transfert radiatif s'obtient en écrivant le bilan énergétique d'un volume infinitésimal, de surface unitaire et de longueur  $dz$ , contenant  $ndz$  diffuseurs :

- Une partie de l'énergie se propageant dans la direction  $\vec{k}$  est perdue par diffraction dans une autre direction  $\vec{k}'$  ce qui se traduit par une perte :  $dI_{\vec{k}} = -I_{\vec{k}} n dz \sigma$
- Un faisceau se propageant dans la direction  $I_{\vec{k}'}$  peut être diffractés dans la direction  $\vec{k}$  et donc venir renforcer le faisceau incident  $I_{\vec{k}}$  d'où un gain :  $dI_{\vec{k}} = n dz \int \frac{d\sigma(\vec{k}' \rightarrow \vec{k})}{d\Omega} I_{\vec{k}'} d\vec{k}'$   
où  $\frac{d\sigma(\vec{k}' \rightarrow \vec{k})}{d\Omega}$  est la section efficace différentielle c'est à dire la probabilité pour un faisceau se propageant dans la direction  $\vec{k}'$  d'être diffracté dans la direction  $\vec{k}$ .
- Enfin , si il existe des sources émettrices d'énergie par unité de volume dans la boîte, on a un apport d'énergie dans la direction  $\vec{k}$  donné par :  $dI_{\vec{k}} = e(\vec{x}, \vec{k}, t)$ .

Ces éléments permettent d'écrire le bilan énergétique suivant :

$$\boxed{\frac{1}{v} \frac{\partial I(\vec{x}, \vec{k}, t)}{\partial t} + \vec{k} \cdot \vec{\nabla} I(\vec{x}, \vec{k}, t) = -\frac{I(\vec{x}, \vec{k}, t)}{l} + \frac{1}{4\pi l} \int d\vec{k}' \frac{d\sigma(\vec{k}' \rightarrow \vec{k})}{d\Omega} I(\vec{x}, \vec{k}', t) + e(\vec{x}, \vec{k}, t)}$$
(2.1)

Cette équation est l'équation de transfert radiatif. C'est une équation phénoménologique décrivant la propagation de l'énergie dans le milieu. Elle exprime la conservation locale de l'énergie. Le membre de gauche exprime la variation de l'énergie du faisceau et le membre de droite est le terme de source.

## 2.2 Position du problème

Cette équation de transfert radiatif a été démontrée à partir des équations d'onde, pour des ondes scalaires quantiques puis classiques par Legendijk *et al.* [17]. Un traitement des ondes vectorielles a été fait par Papanicolaou *et al.*. Dans ce chapitre je vais reprendre cette démonstration dans le cas scalaire pour calculer de la même façon la fonction d'intercorrélation à deux températures différentes. La différence réside en un écart de température non nul entre les deux fonctions d'onde. Cet écart va induire des termes correctifs qu'on pourra considérer à différents ordres.

### 2.2.1 Équation d'onde du milieu

On étudie la propagation dans un milieu contenant des diffuseurs d'une onde acoustique scalaire de la forme :

$$\left( \frac{\epsilon_r(\vec{r})}{c_0^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.2)$$

qu'on peut ensuite réécrire sous la forme d'une équation de Schrödinger :

$$(\nabla^2 + V(\vec{r}, \omega)) \Psi(\vec{r}, \omega) = \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \Psi(\vec{r}, \omega) \quad (2.3)$$

avec un potentiel de diffusion

$$V(\vec{r}, \omega) = \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 [1 - \epsilon_r(\vec{r})] \quad (2.4)$$

Les informations sur les diffuseurs sont contenues dans un analogue de la constante diélectrique relative noté  $\epsilon_r(\vec{r})$ .

### 2.2.2 Nature des diffuseurs

Les diffuseurs sont des zones d'impédance différente de celle du milieu extérieur aux diffuseurs. On suppose que l'impédance est homogène dans le milieu extérieur et dans les diffuseurs et que l'impédance est la même à l'intérieur de tous les diffuseurs.

### 2.2.3 Rôle de la température

La différence de température modifie les vitesses de propagation. On notera  $c_0$  les vitesses dans le milieu extérieur au diffuseur. Pour  $T_1 < T_2$  :  $c_0(T_1) = c_0 + \frac{\Delta c_0}{2}$  et  $c_0(T_2) = c_0 - \frac{\Delta c_0}{2}$ . Et on notera  $c_1$  les vitesses à l'intérieur des diffuseurs :  $c_1(T_1) = c_1 + \frac{\Delta c_1}{2}$   $c_1(T_2) = c_1 - \frac{\Delta c_1}{2}$ . Dans la suite on suppose :  $\Delta c_0, \Delta c_1 \ll c_0, c_1$ , et que les vitesses sont réelles.

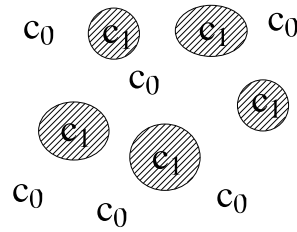


FIG. 2.1 – Nature des diffuseurs : on note  $c_1$  la vitesse dans les diffuseurs et  $c_0$  la vitesse à l'extérieur des diffuseurs.

### 2.2.4 Fonction d'intercorrélation

On veut calculer la fonction d'intercorrélation :

$$\mathcal{C}(\vec{R}, \vec{x}, t, \frac{\tau}{2}) = \left\langle \Psi_{T_1}(\vec{R} - \frac{\vec{x}}{2}, t - \frac{\tau}{2}) \Psi_{T_2}^*(\vec{R} + \frac{\vec{x}}{2}, t + \frac{\tau}{2}) \right\rangle \quad (2.5)$$

où les crochets matérialisent une moyenne sur les réalisations des diffuseurs. On ne pourra donc obtenir au final que de l'information sur la statistique du milieu et des diffuseurs.

Puisqu'on préfère travailler en espace des fréquences et des impulsions, on écrit :

$$\Psi_1(t - \frac{\tau}{2}) \Psi_2^*(t + \frac{\tau}{2}) = \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{4\pi^2} e^{-i\omega_1(t - \frac{\tau}{2})} e^{i\omega_2(t + \frac{\tau}{2})} \tilde{\Psi}_1(\omega_1) \tilde{\Psi}_2^*(\omega_2)$$

en posant :

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 \equiv 2\omega \\ \omega_1 - \omega_2 \equiv \Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi_1(t - \frac{\tau}{2}) \Psi_2^*(t + \frac{\tau}{2}) = \int \frac{d\omega d\Omega}{4\pi^2} e^{-i\Omega t} e^{i\omega\tau} \tilde{\Psi}_1(\omega + \frac{\Omega}{2}) \tilde{\Psi}_2^*(\omega - \frac{\Omega}{2})$$

Et on procède de même pour les variables d'espace :

$$\Psi_1(\vec{R} - \frac{\vec{x}}{2}) \Psi_2^*(\vec{R} + \frac{\vec{x}}{2}) = \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} e^{i\vec{k}_1(\vec{R} - \frac{\vec{x}}{2})} e^{-i\vec{k}_2(\vec{R} + \frac{\vec{x}}{2})} \tilde{\Psi}_1(\vec{k}_1) \tilde{\Psi}_2^*(\vec{k}_2)$$

avec la notation :  $\sum_{\vec{k}} = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}$

et en posant :

$$\begin{cases} \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \equiv 2\vec{p} \\ \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \equiv \vec{q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi_1(\vec{R} - \frac{\vec{x}}{2}) \Psi_2^*(\vec{R} + \frac{\vec{x}}{2}) = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{R}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \tilde{\Psi}_1(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}) \tilde{\Psi}_2^*(\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2})$$

Ainsi dans l'espace des fréquences et des impulsions, la fonction d'intercorrélation s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\omega, \Omega, \vec{p}, \vec{q}) &= \left\langle \tilde{\Psi}_1(\vec{\omega} + \frac{\vec{\Omega}}{2}, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, T_1) \tilde{\Psi}_2^*(\vec{\omega} - \frac{\vec{\Omega}}{2}, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, T_2) \right\rangle \\ &= \left\langle G(\vec{\omega} + \frac{\vec{\Omega}}{2} + i\epsilon, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, T_1) G^*(\vec{\omega} - \frac{\vec{\Omega}}{2} - i\epsilon, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, T_2) |S(\omega, \vec{p})|^2 \right\rangle \end{aligned}$$

avec  $|S(\omega, \vec{p})|^2$  la puissance spectrale de la source.

On note  $\Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}) = \left\langle G(\vec{\omega} + \frac{\vec{\Omega}}{2} + i\epsilon, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, T_1) G^*(\vec{\omega} - \frac{\vec{\Omega}}{2} - i\epsilon, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, T_2) \right\rangle$  l'analogue de la fonction de Green à deux particules en matière condensée.

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{C}(\omega, \Omega, \vec{p}, \vec{q}) = \Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}) \langle |S(\omega, \vec{p})|^2 \rangle} \quad (2.6)$$

$\Phi$  est la quantité que l'on cherche à calculer et qui nous permettra à la fin de retrouver directement la fonction d'intercorrélation dans l'espace réel. On appelle  $\Phi$  fonction d'intercorrélation aussi.

### 2.2.5 Interprétation des nouvelles variables

- $\Omega, \vec{q}$  (variables lentes, associées à  $\tau$  et  $\vec{x}$ ) sont les variables conjuguées de l'enveloppe.
- $\omega, \vec{p}$  (variables rapides, associées à  $t$  et  $\vec{R}$ ) sont les variables conjuguées de la porteuse.

On se placera dans le cadre de l'hypothèse SVEA (slowly varying envelope approximation), valide pour l'approximation de diffusion. Ainsi on a  $|\vec{q}| \ll |\vec{p}|$ , et  $\Omega \ll \omega$ .

## 2.3 Un choix de formalisme : opérateurs $G, \Sigma, U$ et $T$

On introduit dans cette partie le formalisme de la diffusion multiple dont on se sert dans le calcul. On peut aussi se référer à l'ouvrage de référence de E. Akkermans et G. Montambaux [18].

### 2.3.1 Fonction de Green

La fonction de Green  $G$  est définie par la solution de l'équation d'onde avec une source delta :

$$\left( \frac{\epsilon_r(\vec{r})}{c_0^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) G(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) \quad (2.7)$$

La fonction de Green libre  $G_0$  est la fonction de Green en l'absence de diffuseurs :

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) G_0(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) \iff G_0^\pm(\vec{p}, \omega) = \frac{1}{-\frac{\omega^2}{c_0^2} + p^2 \pm i0} \quad (2.8)$$

Pour trouver  $G$ , on réécrit l'équation 2.7 comme l'équation d'onde sans diffuseurs mais avec une source  $s$  telle que :

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) G(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) \text{ avec } s(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) - \left( \frac{1 - \epsilon_r(\vec{r})}{c_0^2} \right) \partial_t^2 G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \quad (2.9)$$

Or les propriétés de la fonction de Green permettent d'écrire que le champ avec une source  $s$  est égal à la convolution de la fonction de Green avec la source :

$$\begin{aligned} G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) &= G_0(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) * s(\vec{r}, t) \iff G(\vec{p}, \omega) = G_0(\vec{p}, \omega) s(\vec{p}, \omega) \\ &\iff G(\vec{p}, \omega) = G_0(\vec{p}, \omega) (1 + V(\vec{p}, \omega) G(\vec{p}, \omega)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donc on a montré que la fonction de Green vérifie la relation exacte  $G = G_O + G_O V G$ . On peut la réécrire comme un développement perturbatif :

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots \quad (2.11)$$

L'interprétation physique de cette série, appelée série de Born, est la suivante :

- le 1<sup>ier</sup> terme,  $G_0$ , correspond au champ dans le milieu en absence de diffuseur,
- le 2<sup>nd</sup> correspond au champ diffusé une seule fois,
- le 3<sup>ième</sup> correspond au champ diffusé au second ordre.

### 2.3.2 Equation du champ moyen : équation de Dyson

On introduit  $\Sigma$ , l'opérateur de masse, tel qu'on a la relation suivante pour le champ moyen :

$$G = G_0 + G_0 V G \Rightarrow \langle G \rangle = G_0 + G_0 \Sigma \langle G \rangle \Rightarrow \langle G \rangle = (G_0^{-1} - \Sigma)^{-1} \quad (2.12)$$

c'est l'équation de Dyson sur les statistiques d'ordre 1 du champ, où  $\langle G \rangle$  est la fonction de Green du champ moyen appelée fonction de Green de Dyson.

### 2.3.3 Équation de la corrélation du champ : Équation de Bethe Salpeter

On considère maintenant les statistiques au deuxième ordre du champ, c'est à dire la fonction de corrélation. Dans une équation analogue à la précédente, on introduit un opérateur  $U$ . Il s'agit de l'équation de Bethe Salpeter :

$$\langle G(1) G^*(2) \rangle = \langle G(1) \rangle \langle G^*(2) \rangle + \langle G(1) \rangle \langle G^*(2) \rangle U(1, 2) \langle G(1) G^*(2) \rangle \quad (2.13)$$

Soit en fonction de la fonction d'intercorrélation  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) &= \langle G \rangle(\omega + \frac{\Omega}{2} + i\epsilon, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, T_1) \langle G^* \rangle(\omega - \frac{\Omega}{2} + i\epsilon, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, T_2) \\ &\quad \left[ 1 + \sum_{\vec{p}'} U_{\omega \vec{p} \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \Phi_{\omega \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ici les  $\langle G \rangle$  sont les fonctions de Green de Dyson introduites en 2.3.2 :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G(1) \rangle &= \langle G \rangle(\omega + \frac{\Omega}{2} + i\epsilon, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, T_1) = \left[ \left( \frac{\omega + \frac{\Omega}{2} + i\epsilon}{c_0 + \frac{\Delta c_0}{2}} \right)^2 - \left( \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} \right)^2 - \Sigma(\omega + \frac{\Omega}{2} + i\epsilon, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, T_1) \right]^{-1} \\ \langle G(2)^* \rangle &= \langle G^* \rangle(\omega - \frac{\Omega}{2} - i\epsilon, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, T_2) = \left[ \left( \frac{\omega - \frac{\Omega}{2} - i\epsilon}{c_0 - \frac{\Delta c_0}{2}} \right)^2 - \left( \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2} \right)^2 - \Sigma^*(\omega - \frac{\Omega}{2} - i\epsilon, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, T_2) \right]^{-1} \end{aligned} \right. \quad (2.15)$$

### 2.3.4 Interprétation de $\Sigma$ et $U$

Dans l'approximation d'une faible densité de diffuseurs on peut écrire [18] :

$$\Sigma(V, \vec{p}) = nT_{\vec{p}\vec{p}}(V) \quad (2.16)$$

$$U_{\omega\vec{p}\vec{p}'}(V_1, V_2) = nT_{\vec{p}'\vec{p}}(V_1)T_{\vec{p}\vec{p}'}(V_2) \quad (2.17)$$

avec  $n$  la densité de diffuseurs et  $T_{\vec{p}'\vec{p}} = \langle \vec{p}' | T | \vec{p} \rangle$  les éléments de la matrice de diffusion  $T$  d'un seul diffuseur qui vérifie l'équation de Lippman Schwinger :  $\Psi_{out} = (1 + G_0T)\Psi_{in}$ .

## 2.4 Équation de Boltzman généralisée

Par combinaison des deux équations (2.13 et 2.12), on montre que la fonction d'intercorrélation  $\Phi$  moyennée sur le désordre satisfait la variante de l'équation de Boltzmann généralisée (2.20).

### 2.4.1 Équation de Boltzmann généralisée

On remarque que :

$$\begin{aligned} \langle G(1) \rangle - \langle G(2)^* \rangle &= \langle G(1) \rangle (\langle G(2)^* \rangle^{-1} - \langle G(1) \rangle^{-1}) \langle G(2)^* \rangle \\ &\Rightarrow \langle G(1) \rangle \langle G(2)^* \rangle = \frac{\langle G(1) \rangle - \langle G(2)^* \rangle}{\langle G(2)^* \rangle^{-1} - \langle G(1) \rangle^{-1}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

or on calcule :  $\langle G(1) \rangle - \langle G(2)^* \rangle = 2i\Delta G_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q})$

et  $\langle G(2)^* \rangle^{-1} - \langle G(1) \rangle^{-1} \simeq \frac{2\omega^2\Delta c_0}{c_0^3} - \frac{2\Omega\omega}{c_0^2} + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + 2i\Delta\Sigma_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q})$  au premier ordre (et le deuxième ordre est nul) en perturbation c'est à dire au premier ordre en  $\Omega$ ,  $\vec{q}$ ,  $\Delta c_0/c_0$ .

Et on note :

$$\begin{cases} \Delta\Sigma_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) = \frac{1}{2i} \left( \Sigma(\omega + \frac{\Omega}{2} + i\epsilon, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, T_1) - \Sigma^*(\omega - \frac{\Omega}{2} - i\epsilon, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, T_2) \right) \\ \Delta G_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) = \frac{1}{2i} \left( \langle G \rangle(\omega + \frac{\Omega}{2} + i\epsilon, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, T_1) - \langle G^* \rangle(\omega - \frac{\Omega}{2} - i\epsilon, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, T_2) \right) \end{cases} \quad (2.19)$$

Donc on déduit de 2.3.3 l'équation de Boltzmann généralisée étendue au cas de deux températures différentes de l'équation de Bethe Salpeter :

$$\boxed{\begin{aligned} &\left( \frac{-i\omega^2\Delta c_0}{c_0^3} + \frac{i\Omega\omega}{c_0^2} - i\vec{p} \cdot \vec{q} + \Delta\Sigma_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right) \Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ &= \Delta G_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \left[ 1 + \sum_{\vec{p}'} U_{\omega\vec{p}\vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \Phi_{\omega\vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right] \end{aligned}} \quad (2.20)$$

Cette équation est l'analogie de l'équation de transfert radiatif. Interprétons les différents termes :

- $\frac{i\Omega\omega}{c_0^2}$  agira comme une dérivée temporelle en espace réel ;
- $i\vec{p} \cdot \vec{q}$  est un terme de flux et contient en coordonnées d'espace un gradient ;
- $-i\omega^2\frac{\Delta c_0}{c_0^3}$  est un déphasage, c'est un terme nouveau dû à l'écart de température ;
- $\delta\Sigma$  est essentiellement un terme d'extinction dû à la diffusion vers les autres directions en effet en première approximation, d'après le théorème optique, ce terme est égal à la section efficace totale [19]. Il y a en plus des contribution de l'écart de température qu'on calcule plus loin (section 2.5.1).



- $\Delta G(1+U\Phi)$  contient la diffusion de toutes les autres directions vers la direction  $\vec{p}$ , toutes les valeurs absolues de  $\vec{p}$  ne comptent pas car le facteur  $\Delta G$  assure que la relation de dispersion soit respectée. Il y a en plus des contribution de l'écart de température qu'on calcule plus loin (section 2.5.1).

### 2.4.2 Développement multipolaire de $\Phi$

On définit les analogues de la densité et du flux d'énergie :

$$\begin{cases} W_{\omega}^{rad}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) &= \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \sum_{\vec{p}} \Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ \vec{J}_{\omega}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) &= \omega \sum_{\vec{p}} \vec{p} \Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \end{cases} \quad (2.21)$$

Un développement multipolaire donne l'expression suivante pour la fonction d'intercorrélation :

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}) &= \frac{16\pi^2 c_0^3}{\omega^3} \delta\left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - p^2\right) I_{\omega}(\Omega, \vec{q}) \\ \text{avec } I_{\omega}(\Omega, \vec{q}) &= \frac{c_0}{4\pi} \left( W_{\omega}^{rad}(\Omega, \vec{q}) + \frac{3}{c_0} \hat{p} \cdot \vec{J}_{\omega}(\Omega, \vec{q}) + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

On remarque que le premier terme contient la partie isotrope et le second la contribution anisotrope au premier ordre. On a négligé les dépendances angulaires successives.

### 2.4.3 Mise en équation

Il faut 4 équations, une scalaire et une vectorielle pour déterminer  $W^{rad}$  et  $\vec{J}$  et en déduire  $\Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q})$ . On obtiendra la première équation en intégrant sur les moments  $\vec{p}$  pour obtenir une équation de continuité. Et la seconde en faisant une intégration  $\int \vec{p} d^3 \vec{p}$  pour obtenir l'expression du courant et la constante de diffusion. C'est ce que nous faisons dans la section suivante.

## 2.5 De l'équation de Boltzman à l'équation de diffusion

On propose de commencer par présenter de façon détaillée que le calcul au premier ordre afin de faciliter la compréhension.

### 2.5.1 Le potentiel de diffusion : l'élément clef.

On remarque que la dépendance de  $\Sigma$  et  $U$  en  $(\Omega, T_1, T_2) = (\Omega, \Delta c_0, \Delta c_1)$  ne se fait que via la matrice de diffusion  $T$  qui ne dépend que du potentiel de diffusion  $V$ , d'où sa grande importance. De plus on remarque que les perturbations  $+\Omega, +\Delta c_0, +\Delta c_1$  ou  $-\Omega, -\Delta c_0, -\Delta c_1$  vont toujours ensemble dans la fonction d'onde. Or  $V(\omega) = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2$  dans un diffuseur.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow V(T_1) &= V(\omega, \Omega, \Delta c_0, \Delta c_1) \\
 &= \left( \frac{\omega + \frac{\Omega}{2}}{c_0 + \frac{\Delta c_0}{2}} \right)^2 - \left( \frac{\omega + \frac{\Omega}{2}}{c_1 + \frac{\Delta c_1}{2}} \right)^2 \\
 &= V(\omega) + \Omega \omega \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) - \frac{\omega^2 \Delta c_0}{c_0^3} + \frac{\omega^2 \Delta c_1}{c_1^3} \\
 &= V(\omega) + \delta V_1 + \delta V_2 \\
 \Rightarrow V(T_2) &= V(\omega, -\Omega, -\Delta c_0, -\Delta c_1) \\
 &= V(\omega) - \delta V_1 - \delta V_2
 \end{aligned}$$

On voit ainsi que les perturbations en fréquence ou en température s'écrivent naturellement sous forme d'une perturbation  $\delta V$  du potentiel  $V$  où  $\delta V_1$  est la contribution "habituelle" due au fait qu'on manipule des ondes classiques et non des électrons. Et  $\delta V_2$  est une nouvelle contribution due au fait qu'on corrèle des fonctions à deux températures différentes. On remarque que le second ordre  $\delta^2 V$  est nul.

Il faut donc commencer par procéder à un développement des différents termes de l'équation de Boltzman par rapport à  $V$ . On montre que [20] :

$$\begin{aligned}
 \Delta \Sigma_{\omega \vec{p}}(\tilde{\Omega}, \vec{q}, T_1, T_2) &= \frac{1}{2i} n \left( T_{\vec{p}\vec{p}}(V + \delta V) - T_{\vec{p}\vec{p}}^*(V - \delta V) \right) = n \left( \Im m T_{\vec{p}\vec{p}} - i \frac{\partial \Re e T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V} \delta V \right) + \dots \\
 U_{\omega, \vec{p}', \vec{p}} &= n T_{\vec{p}\vec{p}}(V + \delta V) T_{\vec{p}\vec{p}}^*(V - \delta V) = n |T_{\vec{p}\vec{p}}(\omega)|^2 + 2in |T_{\vec{p}\vec{p}}(\omega)|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \delta V + \dots
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \Sigma_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) &- \sum_{\vec{p}'} \Delta G_{\omega \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}) U_{\omega \vec{p}' \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
 &= n \left[ \Im m T_{\vec{p}\vec{p}} - \sum_{\vec{p}'} \pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p'^2 \right) |T_{\vec{p}\vec{p}}|^2 \right] + n \left[ -i \frac{\partial \Re e T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V} - \sum_{\vec{p}'} \pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p'^2 \right) 2i |T_{\vec{p}\vec{p}}|^2 \frac{\partial \phi}{\partial V} \right] \delta V + \dots \\
 &= nA + inB\delta V + nC \frac{(\delta V)^2}{2} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

### Quelques remarques

- On montre que  $\Delta G \simeq \pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p^2 \right)$ . On remarque que cette expression contient la relation de dispersion. On a conservé dans cette expression uniquement les ordres 0 en  $n$  et  $\delta V$  car  $\Delta G$  est en facteurs de termes d'ordre 1.
- L'identité de Ward [17] implique que  $A = 0$ . C'est le terme à  $V$  constant. C'est la relation de continuité pour les ondes quantiques qui sont telles que  $V$  reste constant.

$$B = -\frac{\partial \Re e T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V} - \sum_{\vec{p}'} \pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p'^2 \right) 2 |T_{\vec{p}\vec{p}}|^2 \frac{\partial \phi}{\partial V}$$

- et on se limite pour l'instant à l'ordre 1 donc on prendra  $C = 0$
- on note  $\delta = nB \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)$  le "dwell time", en cohérence avec les articles [17, 21, 20], sa signification physique est donnée dans le paragraphe suivant (2.5.2).

### 2.5.2 Équation de continuité

On va obtenir l'équation de continuité sommante sur  $\vec{p}$  dans l'équation de Boltzman généralisée 2.20 :

$$\begin{aligned}
 & \left( -i\frac{\Delta c_0}{c_0}\omega + i\Omega \right) W_\omega^{rad}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) + i\vec{q}\vec{J}_\omega(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
 & + \omega \sum_{\vec{p}} \left[ \Delta \Sigma_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) - \sum_{\vec{p}'} \Delta G_{\omega\vec{p}'}(\Omega, \vec{q}) U_{\omega\vec{p}'\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right] \Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
 & = \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ce qui donne tous calculs faits :

$$\boxed{\left[ i\Omega(1 + \delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right) \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q} \cdot \vec{J}_\omega = \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}}} \tag{2.26}$$

#### Interprétation des différents termes

– **Note sur  $\delta$  :**

Le terme  $\delta$  qui apparaît dans la relation de continuité -le premier terme dans les crochets  $i\Omega(1 + \delta)$ - en facteur de  $W^{rad}$  a un sens important. Il est lié à la nature classique des ondes. Dans le cas quantique  $\delta = 0$ . Il signifie que  $W^{rad}$  n'est pas ici la quantité conservée pertinente mais qu'il s'agit plutôt de  $W^{tot} = (1 + \delta)W^{rad}$ .

En effet, dans le cas quantique la densité d'énergie est  $\int d^3\vec{r} |\Psi(\vec{r})|^2$ , mais dans le cas classique il s'agit de  $\int d^3\vec{r} \epsilon(\vec{r}) |\Psi(\vec{r})|^2$ . D'où  $\delta = \frac{\int d^3\vec{r} (\epsilon(\vec{r}) - 1) |\Psi(\vec{r})|^2}{\int d^3\vec{r} |\Psi(\vec{r})|^2}$

On peut relier  $\delta$  au "dwell time" c'est à dire le temps moyen passé par l'onde dans un diffuseur puisque c'est le rapport de l'énergie de l'onde uniquement dans les diffuseurs uniquement sur l'énergie sans diffuseurs [21, 22].

– **Deuxième correction :**

$\omega \frac{\Delta c_0}{c_0}$  est le retard qu'on trouve de façon triviale et qui est dû à la différence de vitesse lors du cheminement entre les diffuseurs.

– **Troisième correction :**

$\delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right)$  est la contribution des diffuseurs mêmes et qui, par contre, est non triviale.

### 2.5.3 Équation vectorielle du courant

Cette fois on fait une intégration  $\int \vec{p} d^3\vec{p}$  sur l'équation de Boltzman 2.20 :

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \left( \frac{i\Omega\omega}{c_0^2} - \frac{i\omega^2\Delta c_0}{c_0^3} - i\vec{p} \cdot \vec{q} + \Delta\Sigma_{\omega,\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right) \Phi_{\omega,\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \Delta G_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \left[ 1 + \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} U_{\omega\vec{p}\vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \Phi_{\omega\vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right] \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Le détail du calcul est donné en annexe B.

On obtient l'équation vectorielle :

$$\boxed{\left[ \frac{i\Omega}{c_0}(1+\delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0^2} + \delta \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0 \right) + \tilde{l}_{tr}^{-1} \right] \vec{J}_\omega = \frac{ic_0}{3} \vec{q} W_\omega^{rad}} \quad (2.28)$$

avec :  $\tilde{l}_{tr}^{-1} = \int d^2\hat{p}' (1 - \hat{p}\hat{p}') n \frac{\partial\sigma(\vec{p}' \rightarrow \vec{p})}{\partial\Omega} (1 + 2i \frac{\partial\phi}{\partial V} \delta V)$  qui est la longueur de transport (à l'ordre zéro) plus des termes d'ordre 1 en perturbation.

### 2.5.4 Équation de diffusion

Les équation 2.28 et 2.26 permettent d'écrire l'équation de diffusion :

$$\Rightarrow W_\omega^{rad} = \frac{\omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}}}{i\Omega(1+\delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0^2} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right) \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right) - \frac{c_0 q^2}{3} l_{tr}} \quad (2.29)$$

avec

$$l_{tr}^{-1} = \int d^2\hat{p}' (1 - \hat{p}\hat{p}') n \frac{d\sigma(\vec{p}' \rightarrow \vec{p})}{d\Omega} \delta V$$

la longueur de transport habituelle.

On remarquera qu'on a enlevé certains termes car  $q^2 \sim \Omega$  car  $\sqrt{\Omega}$  est un pôle. L'insertion de 2.28 faisait donc intervenir des termes d'ordre 2 en trop car on se limite ici au premier ordre.

Pour alléger l'écriture, on pose :

$$\begin{cases} D = \frac{c_0 l_{tr}}{3(1+\delta)} \\ F = \frac{\left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right) \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right)}{1+\delta} \\ N = \frac{1}{1+\delta} \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} = \frac{1}{1+\delta} \frac{\omega^2}{4\pi c_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_\omega^{rad}(\Omega, \vec{q}) = \frac{N}{i\Omega - Dq^2 + i\omega F}} \quad (2.30)$$

Insistons sur le fait qu'on obtient une équation de diffusion pour l'analogie de la densité d'énergie  $W^{rad}$  ce qui va être très agréable pour finir le calcul.

## 2.6 Fonction d'intercorrélation

Maintenant qu'on a l'expression de  $W$  au premier ordre il faut remonter à  $\Phi$  en utilisant l'équation 2.22 puis  $\mathcal{C}$  en espace réel en utilisant l'équation 2.6.

### 2.6.1 Expression de la densité d'énergie $W$ en espace temps.

On calcule la transformée inverse par rapport à  $\Omega$  et  $\vec{q}$  de la densité d'énergie  $W^{rad}$  au premier ordre :

$$W_{\omega}^{rad}(\vec{R}, t) = \left( \frac{\omega^2}{4\pi c_0(1+\delta)} \right) \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} e^{-i\omega Ft} \quad (2.31)$$

### 2.6.2 The end ! Expression de la fonction d'intercorrélation

Pour remonter à la fonction d'intercorrélation on se place à l'ordre le plus bas du développement multipolaire (pas de contributions anisotropes) ce qui suppose une isotropie du flux d'énergie (ce qui n'est pas évident en pratique).

$$\Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}) = \frac{4\pi^2 c_0^3}{\omega^3} \delta\left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - p^2\right) W_{\omega}^{rad} \quad (2.32)$$

Puis on calcule la transformée inverse par rapport à  $\omega$  et  $\vec{p}$  ce qui nous donne la fonction d'intercorrélation en espace réel.

$$\mathcal{C}(\vec{R}, \vec{x}, t, \tau) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega 2\pi \frac{\exp(i\frac{\omega}{c_0}(x+c_0(\tau-Ft)))}{i\frac{\omega}{c_0}x} |S(\omega)|^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega 2\pi \frac{\exp(i\frac{\omega}{c_0}(-x+c_0(\tau-Ft)))}{i\frac{\omega}{c_0}x} |S(\omega)|^2 \right] \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}(\vec{R}, \vec{x}, t, \tau, T_1, T_2) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega x}{c_0}\right) \exp(i\omega(\tau - Ft)) |S(\omega)|^2 \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \quad (2.33)$$

### 2.6.3 Normalisation de la fonction d'intercorrélation

Pour des raisons de simplification, on peut normer la fonction d'intercorrélation de la façon suivante :

$$\bar{\mathcal{C}}(\vec{R}, \vec{x}, t, \frac{\tau}{2}, T_1, T_2) = \frac{\langle \Psi_1(\vec{R} - \frac{\vec{x}}{2}, t - \frac{\tau}{2}, T_1) \Psi_2^*(\vec{R} + \frac{\vec{x}}{2}, t + \frac{\tau}{2}, T_2) \rangle}{\sqrt{\langle \Psi_1(\vec{R}, t - \frac{\tau}{2}, T_1) \Psi_1^*(\vec{R}, t - \frac{\tau}{2}, T_1) \rangle \langle \Psi_2(\vec{R}, t + \frac{\tau}{2}, T_2) \Psi_2^*(\vec{R}, t + \frac{\tau}{2}, T_2) \rangle}} \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{C}}(\vec{R}, \vec{x}, t, \frac{\tau}{2}, T_1, T_2) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega x}{c_0}\right) \exp(i\omega(\tau - Ft)) |S(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |S(\omega)|^2} \quad (2.35)$$

On constate que cette fonction est maximale en  $x = 0$  et  $\tau = Ft$ , et que la contribution de la différence de température est un décalage  $Ft$  linéaire en l'âge du signal  $t$ , avec un facteur de proportionnalité

$$F = \frac{\left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right)}{1 + \delta} \quad (2.36)$$

Ce résultat correspond exactement à ce qu'on recherchait. Il signifie qu'au premier ordre on a une dilatation temporelle du signal multiplement diffusé avec la température avec un facteur  $F$ . Interprétons les différents termes de ce facteur de dilatation :

- $\frac{1}{1+\delta}$  est une sorte de coefficient de normalisation lié à la nature classique des ondes.
- $\frac{\Delta c_0}{c_0}$  est la contribution au facteur de dilatation qu'on a qualifiée de triviale car elle provient de la variation de la vitesse entre les diffuseurs.
- $\delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right)$  est la contribution des diffuseurs mêmes et qui est, par contre, non triviale. Elle dépend des variations de vitesse dans les diffuseurs et aussi à l'extérieur des diffuseurs. En facteur, on a le dwell time  $\delta$ , c'est-à-dire le temps de séjour moyen des ondes dans un diffuseur.  $\delta$  dépend de la fréquence et peut présenter des résonances. Pour ces résonances, seule cette contribution non triviale intervient dans le facteur de dilatation !

Le facteur de dilatation est noté  $F$  même si il correspond au coefficient  $\alpha$  de la section 1.4.2 car les études correspondent à des situations physiques différentes. Ici les ondes sont scalaires et multiplement diffusées, dans l'étude 1.4.2 de R. Weaver les ondes sont polarisées S et P mais subissent des réflexions et non pas des diffusions.

Un de nos projets est de faire une application à la diffusion élastique pour quantifier l'importance relative de ces différents termes.

#### 2.6.4 Représentation graphique de la fonction d'intercorrélation

Pour illustrer le résultat 2.35, je propose une représentation graphique (figure 2.2) de  $\bar{C}$  pour  $x = 0$  et pour une source gaussienne.

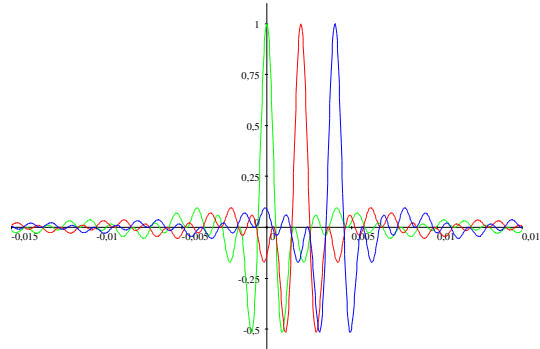


FIG. 2.2 – Représentation de la fonction d'intercorrélation pour  $x = 0$  en fonction de  $\tau$  pour une source gaussienne centrée en  $\omega = 2\text{Hz}$  de largeur  $\sigma = 4\text{Hz}$ , pour un facteur  $F = 0.01$  et pour différents âges de Coda : en vert :  $t = 0\text{s}$ , en rouge :  $t = 200\text{s}$  et en bleu :  $t = 400\text{s}$ .

## 2.7 Conclusion et Perspectives

Le calcul au premier ordre donne un effet de décalage pur dans la fonction d'intercorrélation 2.35 ce qui concorde avec l'observation expérimentale d'une dilatation temporelle par R. Weaver (section 1.4). C'est très satisfaisant. Par contre on a pas de facteur d'atténuation dans la fonction de corrélation 2.35. Une question fondamentale se pose : dans quelle mesure peut on comparer les travaux de R. Weaver à notre calcul théorique ? En premier lieu, on constate que dans notre théorie on considère des diffuseurs qui sont des hétérogénéités tandis que dans l'expérience de Weaver ce sont les réflexions aux interfaces qui jouent le rôle de diffuseurs. Toutefois le résultat est encourageant car on a le même phénomène de dilatation temporelle. D'autre part, on considère des ondes scalaires tandis que l'expérience de R. Weaver fait intervenir des ondes polarisées S et P or l'interprétation de la distorsion faite par Weaver est basée sur la conversion S/P. Ceci peut expliquer qu'on ait pas de distorsion dans notre modèle d'ondes scalaires au premier ordre.

Il reste cependant des questions en suspens. Notamment qu'est ce qui pourrait être à l'origine d'une atténuation dans notre modèle d'onde scalaire ? Nous avons exploré quelques pistes :

**Cas des vitesses complexes.** Je me suis aussi intéressée au cas où  $c_0 \in \mathbb{C}$  et  $c_1 \in \mathbb{C}$  sont complexes. Le calcul complet est donné en annexe C. On fait l'étude au premier ordre en variation du potentiel, voici le résultat obtenu :

$$\bar{C} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega x}{c_0}\right) \exp(i\omega(\tau - \tilde{F}'t)) \exp(-\omega \tilde{F}''t) |S(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |S(\omega)|^2} \quad (2.37)$$

On voit qu'on a une expression similaire à 2.35 mais avec en plus un facteur d'atténuation  $\exp(-\omega \tilde{F}''t)$  marqueur d'un effet de distorsion.

**Que se passe-t-il au second ordre ?** J'ai poussé le calcul précédent à l'ordre 2. Le calcul de l'équation de continuité à l'ordre 2 est donné en annexe A. Il est inutile de pousser plus loind le calcul de l'équation vectorielle à cause du facteur  $q^2 \sim \Omega$ . Il suffit de conserver cette fois tous les termes. On montre ainsi que la densité d'énergie satisfait une équation de la forme :

$$W_{\omega}^{rad} = \frac{N}{i(\Omega + \omega F) + (\Omega^2 \omega T^2 F_1 + \Omega \omega^2 T^2 F_2 + \omega^3 T^2 F_3) - Dq^2 \left[ 1 - i \frac{\operatorname{tr}(1+\delta)}{c_0^2} (\Omega + \omega F) + i\xi \left( \Omega \omega \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) - \omega^2 \left( \frac{\Delta c_0}{c_0^3} - \frac{\Delta c_1}{c_1^3} \right) \right) \right]} \quad (2.38)$$

L'expression en espace de Fourier de la densité d'énergie  $W^{rad}$  que j'obtiens au second ordre montre qu'on a de nouveau un décalage temporel décrit par le terme  $i\omega F$ , mais aussi un effet de distorsion indiqué par la présence de termes non-linéaires en fréquence proportionnels à  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ . Ce calcul est à poursuivre car nous pensons que des contributions supplémentaires d'ordre 2 doivent être prises en compte. Malheureusement, la forme extrêmement compliquée de cette expression nous fait craindre l'impossibilité de trouver une expression analytique. En effet, il ne s'agit plus d'une forme simple d'équation de diffusion comme au premier ordre.

## Chapitre 3

# Étude expérimentale

Pendant la partie expérimentale de mon stage, j'ai pu travailler en collaboration avec Eric Larose, Ludovic Margerin et Pierre Gouedard du Laboratoire de Géophysique Interne et de Technophysique (LGIT). L'équipe dispose d'un matériel d'enregistrement ultrasonore facile à transporter qui a été acheté très récemment grâce à un financement ACI jeune chercheur. Il s'agit d'un ensemble de transducteurs piézoélectriques 10Hz-10kHz, avec un système amplificateur et de filtrage. L'acquisition peut ensuite être réalisée par un ordinateur portable équipé d'une carte d'acquisition 12 bits ou un ordinateur de terrain (Stratavisor) équipé d'une carte d'acquisition 24 bits.

Dans un premier temps j'ai participé à plusieurs essais de terrain autour de Grenoble au cours desquels j'ai pu me familiariser avec le matériel puis participer à la mise au point d'un système de déclenchement le plus précis possible. C'était l'un des buts de ce stage. Au cours de ces essais, nous avons également fait quelques acquisitions sur un bloc de roche de quelques mètres de diamètre stratifiée très hétérogène, notamment pour vérifier la possibilité d'extraire la fonction de Green à partir des corrélations. Ces acquisitions rentraient dans le cadre du stage de Master 2 Ondes et acoustiques de Pierre Gouedard.

J'ai pu utiliser ce matériel pour réaliser une expérience rentrant dans la problématique de mon stage. L'idée de l'expérience est de regarder l'influence de la température sur la coda sismique.

### 3.1 Dispositif expérimental

#### 3.1.1 Choix du site

L'expérience a été réalisée sur un escalier extérieur du LGIT en béton. Nous avons choisi ce milieu car il est proche des milieux naturels, notamment des roches. Et aussi parce que son inertie thermique est moins importante que celle d'un bloc de roche de plusieurs mètres de diamètre ou qu'une falaise. On espère ainsi avoir une température à peu près homogène dans le milieu. La température change grâce à l'ensoleillement.

La longueur d'onde est de quelques mètres. Compte tenu des dimensions de l'escalier, les éléments diffuseurs dans cette expérience sont la surface libre de l'escalier ou des murs. Il s'agit donc dans cette expérience plutôt de réflexions multiples donnant lieu à un signal



chaotique semblable à de la diffusion multiple. Cette situation est donc la même que celle de l'expérience de R.Weaver [15, 16], mais un peu différent de ce qu'on veut et de l'étude théorique menée au chapitre 2.

### 3.1.2 Dispositif expérimental

On dispose sur les marches plusieurs capteurs. On protège les capteurs du rayonnement avec du polystyrène. Les capteurs sont collés avec du phényl salicilate qui est une colle très solide qui assure un bon couplage avec le milieu.

Les capteurs sont reliés par un câble blindé à un dispositif multivoies (Nexus) permettant une amplification des accélérations ( $100mV/m\Delta s^{-2}$ ) et un premier filtrage entre 10Hz et 10kHz. Le signal est ensuite envoyé directement sur la carte d'acquisition 24 Bits de l'ordinateur de terrain (Stratavisor). L'ensemble est alimenté par batteries car on est à l'extérieur et car cela limite le bruit électronique.

La source sismique est un coup de marteau sur le sol de l'escalier à quelques mètres des capteurs. C'est en première approximation une source  $\delta(\vec{r}, t)$ .

Un accéléromètre fixé sur le marteau assure le déclenchement de l'acquisition.

Le contrôle de la température est effectué grâce à deux thermocouples dont la sonde est enfoncée d'environ 15cm dans une fissure dans l'escalier et à deux endroits différents pour s'assurer de l'homogénéité.

Pour s'assurer d'avoir la totalité du signal de coda, l'enregistrement débute 0.1s avant l'instant  $t = 0$  du déclenchement et dure 1 à 2 secondes selon les expériences. On répète l'acquisition plusieurs fois pour réaliser des moyennes.

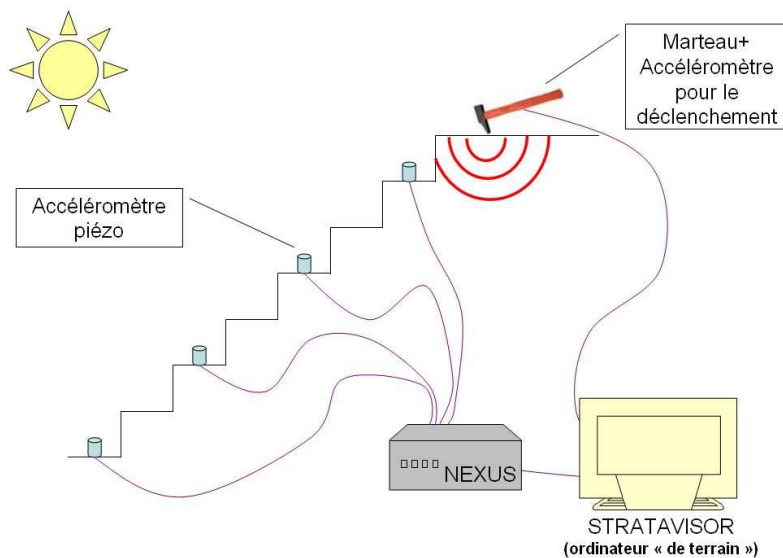


FIG. 3.1 – Illustration du dispositif expérimental

### 3.1.3 Données sur le béton

Je présente quelques données pour le béton utiles pour interpréter l'expérience. Il faut prendre ces données avec précaution car elles dépendent du type de béton.

Grandeur physique	Symbole	Valeur	Unité
Conductivité thermique à 20°C	$\lambda$	1.28	$W/mK$
densité	$\rho$	2200	$Kg/m^3$
Capacité thermique volumique	$C$	1.94	$10^6 J.m^{-3}$
Diffusivité thermique	$D = \lambda/\rho C$	66	$10^{-8} m^2/s$
Vitesse du son	$c$	3100	$km.s^{-1}$

TAB. 3.1 – Grandeurs physique pour le béton. Données Hukselux.

- La vitesse du son dans le béton est de l'ordre de  $4km.s^{-1}$  et on enregistre 1 à 2 secondes de Coda, cela signifie que les ondes enregistrées ont parcouru jusqu'à quelques kilomètres dans l'escalier et le bâtiment avant de rejoindre le récepteur.
- Un second point important est la constante de diffusion thermique. Il faut en effet s'assurer que la température à l'intérieur de l'escalier est bien homogène. J'ai calculé que pour une onde thermique de périodicité 24h, la profondeur de pénétration de l'onde dans l'escalier est de 30cm. Le temps de retard à cette profondeur est de l'ordre de 4 heures. Le temps de retard est d'une heure pour 10 cm d'épaisseur.

Il faut comparer ces données aux temps et dimensions caractéristiques de l'expérience. Pour les dimensions, l'escalier fait environ 50 cm d'épaisseur et il est en contact avec l'air chaud de part et d'autre. La forme de l'escalier (avec les marches) favorise l'échange thermique par rapport à deux plans simples. Si on compare 50/2 cm à 30 cm on peut dire que les ordres de grandeurs sont comparables. Il est donc raisonnable de penser qu'on a une température à peu près homogène.

Pour le temps, au moins une heure sépare chacune des séries d'acquisitions faites tous les °C affichés au thermocouple, c'est l'ordre de grandeur du temps de transfert.

En conclusion, on peut penser que si les ondes explorent essentiellement l'escalier elles ont vu un milieu à peu près homogène en température. Par contre les ondes ayant exploré le bâtiment ont en aucun cas vu un milieu homogène en température. C'est une limitation de l'expérience dont il faut être conscient.

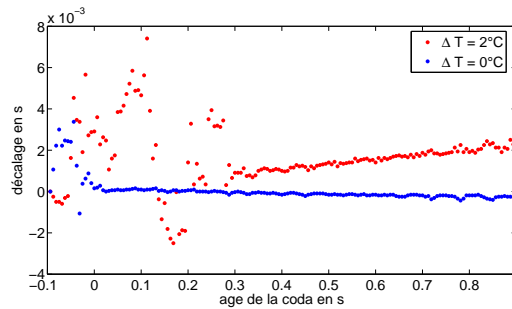
Température	Béton sec	Béton saturé en eau
°C	%	%
60	+5	+4
40	+2	+1.7
20	0	0
0	-0.5	-1

TAB. 3.2 – Effet de la température sur la transmission d'un pulse. Mesure de la variation de la vitesse du son  $\frac{\delta c_0}{c_0}$ . Données CNS Farnell.

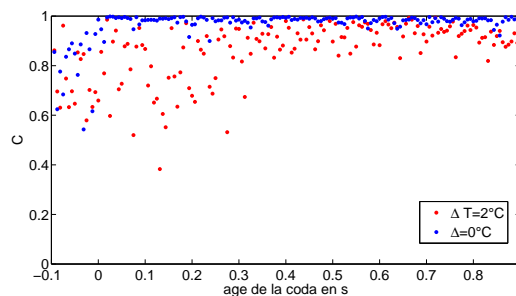
Enfin, le tableau 3.2 permet de faire une estimation du facteur de dilatation de la coda sismique. Si on considère ici uniquement la contribution triviale du changement de vitesse entre les parois alors le facteur de dilatation est  $\Delta c_0/c_0$ , soit environ 0.1% par degré. Gardons à l'esprit qu'il y a probablement d'autres contributions comme discuté au chapitre 2.

### 3.2 Résultats

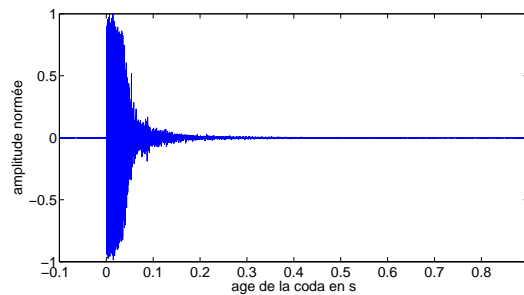
Les résultats obtenus sont présentés figure 3.2 pour le cas d'un écart de température  $\Delta T = 2^\circ C$  entre les deux séries d'enregistrement successifs de la coda.



(a) Représentation de  $\tau_{max}$  (c.a.d du décalage) en fonction de l'âge de la coda



(b) Représentation du Coefficient de corrélation en fonction de l'âge de la coda



(c) Représentation des signaux correspondants

FIG. 3.2 – Représentation des résultats d'une expérience où on compare respectivement (●) deux signaux de coda enregistrés à  $T_1 = 25^\circ C$  à quelques minutes d'intervalle (courbe témoin) et (●) deux signaux enregistrés à  $T_1 = 25^\circ C$  et  $T_2 = 27^\circ C$ .  $T_w = 1ms$ .

**Les étapes du traitement des données :**

1. Une moyenne est réalisée sur une dizaine d'acquisitions.
2. Le signal est filtré entre  $350Hz$  et  $550Hz$  car il est plus reproductible à cette fréquence qu'aux hautes fréquences. Le filtrage permet de s'affranchir d'un éventuel effet de la fréquence sur le décalage même si il faut souligner que cela reste un signal large bande.
3. On divise le signal enregistré en de nombreuses fenêtres temporelles. Pour chacune de ses fenêtres on calcule la fonction de corrélation :

$$\mathcal{C}(\tau, T_w, T_1, T_2, t) = \frac{\int_{t-\frac{T_w}{2}}^{t+\frac{T_w}{2}} \Psi_{T_1}(t) \Psi_{T_2}(t + \tau) dt}{\sqrt{\int_{t-\frac{T_w}{2}}^{t+\frac{T_w}{2}} \Psi_{T_1}(t) \Psi_{T_1}(t) dt \int_{t-\frac{T_w}{2}}^{t+\frac{T_w}{2}} \Psi_{T_2}(t + \tau) \Psi_{T_2}(t + \tau) dt}} \quad (3.1)$$

avec  $T_w$  la largeur de la fenêtre,  $t$  l'âge de la coda pour lequel on calcule cette corrélation.

4. On détermine le maximum de la fonction de corrélation  $C_{max}$  appelé coefficient de corrélation et la valeur  $\tau_{max}$  correspondante.  $\tau_{max}$  donne le décalage temporel entre les deux signaux et le coefficient de corrélation donne leur degré de ressemblance. En faisant ce calcul, on suppose que la dilatation qu'on cherche à voir est suffisamment faible pour être vue localement à l'échelle d'une fenêtre comme un simple décalage.

**Choix de la fenêtre de calcul de la corrélation** Le choix de la taille de la fenêtre doit respecter deux critères : la taille de la fenêtre doit être petite devant l'ordre de grandeur de la dilatation (=décalage par seconde) et grande devant la durée d'un cycle. Ce choix est donc nécessairement source du problème suivant : au bout d'un certain temps les codas vont être plus décalées que la largeur  $T_w$  de la fenêtre de corrélation. Si on ne corrige pas ce problème on obtient un résultat comme figure 3.3. Le décalage présente des sauts réguliers où il revient à zéro dès qu'il atteint une valeur donnée. On constate que cette valeur est égale à la durée d'un cycle. Cela signifie qu'on se trompe de  $n.2\pi$ .

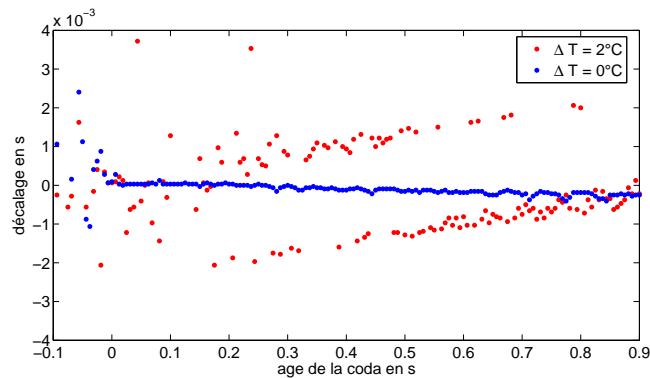


FIG. 3.3 – Représentation des mêmes résultats que figure 3.2 mais sans le traitement de recalage évitant les sauts de  $2\pi$

Pour résoudre ce problème, à chaque itération  $i$  on corréle des fenêtres non plus centrées en  $t$  mais l'une centrée en  $t$  et l'autre centrée en  $t + \tau(i - 1)$ . On en déduit la variation

du décalage par rapport à l'itération précédente puis  $\tau(i) = \tau(i - 1) + \delta\tau(i)$ . J'ai réalisé ce traitement numérique pour obtenir le résultat figure 3.2.

### 3.3 Interprétation

Figure 3.2(a) on observe clairement un décalage linéaire du maximum de corrélation avec l'âge de la coda. Ceci est le témoin d'une dilatation temporelle (cf. section 1.4.2). Une évaluation graphique de la pente (notée *alpha* avec les conventions de R.Weaver dans le premier chapitre puis *F* dans le second chapitre) à partir de la figure 3.2 donne : 0.2%, soit 0.1% par °C ce qui est l'ordre de grandeur attendu.

On remarque qu'il faut attendre 0.3s c'est à dire la coda lointaine, bien plus tard que la fin des ondes directes pour observer cette droite. Or si la source était reproductible on devrait observer une droite dès le début car les ondes directes sont également dilatées à priori. Une de nos hypothèses est que la source n'était pas suffisamment reproductible quant à l'orientation de la force imprimée au sol. Ainsi les chemins suivis par les ondes sont trop différents au départ. Ensuite, plus tard dans la coda, on a un effet de moyenne statistique sur les diffusions et on retrouve quelque chose de linéaire.

Le coefficient de corrélation donne une indication du degré de confiance qu'on peut avoir pour le décalage. En particulier, avant 0.3s il est inférieur à 0.8 puis au delà, dans la zone de décalage linéaire, le coefficient de corrélation est supérieur à 0.8.

Figure 3.2, on montre également le résultat d'une expérience témoin où on réalise la corrélation entre deux coda enregistrées à la même température. Cette expérience est également intéressante. On vérifie qu'avant  $t = 0$  les signaux sont pas du tout corrélés. On est dans le bruit.

### 3.4 Conclusion et Perspectives

Cette expérience est en soit très intéressante car elle est un test en miniature d'une expérience d'imagerie sismique en milieu complexe. L'observation d'une dilatation temporelle du signal de coda ultrasonore est très encourageante car elle permet d'espérer des applications en tomographie sismique, par exemple pour des volcans. Cette expérience a également mis en évidence par ses difficultés celles qui seront rencontrées dans les applications en sismologie. En particulier la difficulté d'avoir une source reproductible. Et d'autre part, nous avons constaté que en reproduisant l'expérience qu'elle donne pas toujours un beau résultat comme figure 3.2. Il va falloir trouver des explications à cela : une moins bonne homogénéité en température ? un bruit plus important ? Il faut identifier les causes car elles seront probablement les mêmes en sismologie.

# Conclusion

Durant ce stage, nous avons apporté des éléments de réponse à la problématique de l'extraction d'informations sur la température du milieu dans lequel les ondes sismiques se sont propagées à partir de la coda.

L'interprétation de l'expérience de R. Weaver de réflexions chaotiques d'ondes ultrasonores dans un bloc d'aluminium nous a montré qu'une variation de température dans le milieu induisait une dilatation temporelle et une distorsion du signal. Notre travail confirme qu'on devrait observer les mêmes effets sur la coda sismique dans le cas d'une variation de température dans la lithosphère ou par exemple dans un volcan.

Au préalable, nous avons montré qu'il faut un bon outil pour quantifier ces effets et les isoler pour pouvoir ensuite les utiliser comme une signature et une mesure de variations de température d'un milieu tel qu'un volcan. Nous avons vu que l'utilisation de la fonction d'intercorrélation, inspirée par la théorie de la DAWS, pour quantifier ces effets est adaptée.

Notre analyse théorique avec un modèle d'onde scalaire de diffusion multiple, basée sur les méthodes de physique mésoscopique, donne une expression analytique utilisable de la fonction d'intercorrélation qui contient l'effet de dilatation. Ce résultat est positif car on retrouve la dilatation pour la diffusion multiple des ondes sismiques, et parce qu'on met en évidence les différentes contributions au coefficient de dilatation avec leur interprétation.

Nous avons également pu réaliser une expérience en dimensions réduites avec des ultrasons pour tester cette nouvelle idée d'imagerie sismique de température en milieu désordonné et ses difficultés. Nous avons pu mettre en évidence le phénomène de dilatation. C'est un résultat très encourageant pour l'application aux ondes sismiques et aux volcans. Toutefois, l'étude doit être poussée car nous avons pas réussi à reproduire ce résultat.

Durant mon stage j'ai eu l'occasion de rencontrer R. Weaver (University of Illinois, USA) et J. H. Page (University of Manitoba, Canada). Ce fut deux discussions extrêmement intéressantes et je les en remercie. J'ai également pu assister à l'école d'été "Acoustical imaging of complex media : applications in medicine, seismology and oceanography" à Cargèse. Les conférences présentées m'ont permis d'avoir une vue d'ensemble de la recherche dans ce domaine qui englobe à la fois l'imagerie médicale, l'acoustique marine et la sismologie.

Je tiens à remercier Bart van Tiggelen qui m'a guidée avec énormément d'enthousiasme tout au long de ce stage. J'exprime également ma reconnaissance envers Ludovic Margerin, Eric Larose et Pierre Gouedard qui m'ont appris beaucoup de choses et m'ont aidée pour ce travail. Enfin je remercie tous les étudiants et thésards du LPM2C qui contribuent à rendre agréable le travail dans ce laboratoire.

## Annexe A

# Calcul de l'équation vectorielle du courant

Cette annexe complète la section 2.5.3 dans le chapitre 2. On calcule l'équation vectorielle du courant  $\vec{J}$  (2.28) :

$$\left[ \frac{i\Omega}{c_0}(1 + \delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0^2} + \delta \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0 \right) + \tilde{l}_{tr}^{-1} \right] \vec{J}_\omega = \frac{ic_0}{3} \vec{q} W_\omega^{rad} \quad (\text{A.1})$$

avec :  $\tilde{l}_{tr}^{-1} = \int d^2\hat{p}' (1 - \hat{p}\hat{p}') n \frac{\partial \sigma(\vec{p}' \rightarrow \vec{p})}{\partial \Omega} (1 + 2i \frac{\partial \phi}{\partial V} \delta V)$  qui est la longueur de transport (à l'ordre zéro) plus des termes d'ordre 1 en perturbation, en faisant l'intégration  $\int \vec{p} d^3\vec{p}$  de l'équation de Boltzman généralisée (2.20).

Associée à l'équation scalaire sur  $W^{rad}$  et  $\vec{J}$  (2.26) calculée à partir du premier moment de l'équation de Boltzman généralisée (2.20), elle permet d'obtenir l'équation de diffusion vérifiée par  $W^{rad}$  (2.29).

### A.1 Intégration $\int \vec{p} d^3\vec{p}$ et équation du courant

Pour obtenir cette équation on calcule l'intégrale  $\int \vec{p} d^3\vec{p}$  de l'équation de Boltzman généralisée. (2.20)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \left( \frac{i\Omega\omega}{c_0^2} - \frac{i\omega^2 \Delta c_0}{c_0^3} - i\vec{p}\vec{q} + \Delta \Sigma_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \Delta G_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \left[ 1 + \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} U_{\omega \vec{p} \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \Phi_{\omega \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right] \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

## A.2 Développement du calcul à l'ordre 1

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \left( \frac{i\Omega\omega}{c_0^2} - \frac{i\omega^2 \Delta c_0}{c_0^3} \right) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&\quad - i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{q}) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&\quad + \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \Delta \Sigma_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&\quad - \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \vec{p}' \Delta G_{\omega \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) U_{\omega \vec{p}' \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \Phi_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \Delta G_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \left( \frac{i\Omega\omega}{c_0^2} - \frac{i\omega^2 \Delta c_0}{c_0^3} \right) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \quad (\mathcal{A})$$

$$- i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{q}) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \quad (\mathcal{B})$$

$$+ \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \left( \Delta \Sigma_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) - \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \Delta G_{\omega \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) U_{\omega \vec{p}' \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \quad (\mathcal{C})$$

$$+ \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} (\vec{p} - \vec{p}') \Delta G_{\omega \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) U_{\omega \vec{p}' \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \Phi_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \quad (\mathcal{D})$$

$$= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \Delta G_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \quad (\mathcal{E})$$

On calcule séparément les différents termes :

$$\boxed{(\mathcal{A}) = ?}$$

$$(\mathcal{A}) = \left( \frac{i\Omega}{c_0^2} - \frac{i\omega \Delta c_0}{c_0^3} \right) \vec{J}_\omega$$

$\boxed{(\mathcal{B}) = ?}$  On remarque que seule la projection de  $\vec{p}$  selon  $\vec{q}$  sera non nulle.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\mathcal{B}) &= -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp p^4 \int d^2 \hat{p} \hat{p}(\hat{p} \cdot \hat{q}) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&= -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp p^4 q \int d^2 \hat{p} \hat{q} \cos(\theta)^2 \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&= \frac{-i}{3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp p^4 q \int d^2 \hat{p} \hat{q} \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&= \frac{-i}{3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{q} p^2 \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&= \frac{-i}{3} \vec{q} W_\omega^{rad}
\end{aligned}$$



(C) = ?

$$\begin{aligned} (C) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} (inB\delta V) \Phi_{\omega, \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ &= \frac{inB\delta V}{\omega} \vec{J}_\omega \end{aligned}$$

(D) = ?

$$\begin{aligned} (D) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \vec{p} (1 - \hat{p} \cdot \hat{p}') \pi \delta\left(\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - p'^2\right) U_{\omega \vec{p}' \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \Phi_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int d^2 \hat{p}' (1 - \hat{p} \cdot \hat{p}') \int dp' p'^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{c_0}{\omega} \delta\left(\frac{\omega}{c_0} - p'\right) n \left( |T_{\vec{p}' \vec{p}}|^2 (1 + 2i \frac{\partial \phi}{\partial V} \delta V) \right) \vec{p} \Phi_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \int d^2 \hat{p}' (1 - \hat{p} \cdot \hat{p}') \frac{\omega}{c_0} n \frac{\partial \sigma(\vec{p}' \rightarrow \vec{p})}{\partial \Omega} (1 + 2i \frac{\partial \phi}{\partial V} \delta V) \vec{p} \Phi_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ &= \frac{1}{c_0} \tilde{l}_{tr}^{-1} \vec{J}_\omega \end{aligned}$$

$$\text{avec } \tilde{l}_{tr}^{-1} = \int d^2 \hat{p}' (1 - \hat{p} \cdot \hat{p}') n \frac{\partial \sigma(\vec{p}' \rightarrow \vec{p})}{\partial \Omega} (1 + 2i \frac{\partial \phi}{\partial V} \delta V)$$

(E) = ?

$$\begin{aligned} (E) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \Delta G_{\omega \vec{p}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2 \hat{p} \int dp p^2 \vec{p} \pi \delta\left(\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - p^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2 \hat{p} \int dp p^2 \vec{p} \pi \delta\left(\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - p^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{2c_0^2} \int d^2 \hat{p} \hat{p} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

car la somme sur toutes les directions de l'espace d'un vecteur unitaire donne un vecteur nul.

### A.3 Équation vectorielle du courant

En remplaçant les termes calculés :

$$\begin{aligned} \left(\frac{i\Omega}{c_0^2} - \frac{i\omega \Delta c_0}{c_0^3}\right) \vec{J}_\omega + \frac{-i}{3} \vec{q} W_\omega^{rad} + \frac{inB\delta V}{\omega} \vec{J}_\omega + \frac{1}{c_0} \tilde{l}_{tr}^{-1} \vec{J}_\omega &= \vec{0} \\ \left(\frac{i\Omega}{c_0} - \frac{i\omega \Delta c_0}{c_0^2}\right) \vec{J}_\omega + \frac{-ic_0}{3} \vec{q} W_\omega^{rad} + i\delta \left(1 - \frac{c_0^2}{c_1^2}\right)^{-1} \left(\Omega \omega \left(1 - \frac{c_0^2}{c_1^2}\right) \frac{1}{c_0^2} + \omega^2 \left(\frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3}\right)\right) \frac{c_0}{\omega} \vec{J}_\omega + \tilde{l}_{tr}^{-1} \vec{J}_\omega &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\frac{i\Omega}{c_0}(1 + \delta)\vec{J}_\omega + \frac{-ic_0}{3}\vec{q}W_\omega^{rad} + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0^2} + \delta \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0 \right) \vec{J}_\omega + \tilde{l}_{tr}^{-1} \vec{J}_\omega = \vec{0}$$

$$\boxed{\left[ \frac{i\Omega}{c_0}(1 + \delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0^2} + \delta \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0 \right) + \tilde{l}_{tr}^{-1} \right] \vec{J}_\omega = \frac{ic_0}{3}\vec{q}W_\omega^{rad}} \quad (\text{A.3})$$

Ceci est l'équation de transport au premier ordre en  $\delta V$

## Annexe B

# Calcul de l'équation de diffusion au 2<sup>nd</sup> ordre

Cette annexe complète la section 2.7 dans le chapitre 2. On calcule l'équation de continuité à l'ordre 2 nécessaire pour en déduire l'équation de diffusion à l'ordre 2 (2.38) :

$$\Rightarrow \boxed{W_{\omega}^{rad} = \frac{N}{i(\Omega + \omega F) + (\Omega^2 \omega T^2 F_1 + \Omega \omega^2 T^2 F_2 + \omega^3 T^2 F_3) - Dq^2 \left[ 1 - i \frac{L_{tr}(1+\delta)}{c_0^2} (\Omega + \omega F) + i\xi \left( \Omega \omega \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) - \omega^2 \left( \frac{\Delta c_0}{c_0^3} - \frac{\Delta c_1}{c_1^3} \right) \right) \right]}} \quad (\text{B.1})$$

### B.1 Intégration sur les moments $\vec{p}$ et équation de continuité

En sommant sur  $\vec{p}$  dans l'équation généralisée de Boltzman :

$$\begin{aligned} & \left( -i \frac{\Delta c_0}{c_0} \omega + i\Omega \right) W_{\omega}^{rad}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) + i\vec{q} \vec{J}_{\omega}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ & + \omega \sum_{\vec{p}} \left[ \Delta \Sigma_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) - \sum_{\vec{p}'} \Delta G_{\omega \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}) U_{\omega \vec{p}' \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \right] \Phi_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\ & = \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \end{aligned}$$

### B.2 Développement du calcul à l'ordre 2

On développe les termes par rapport au potentiel pour une variation  $\delta V$  avec  $\delta V = -\frac{\omega^2 \Delta c_0}{c_0^3} + \frac{\omega^2 \Delta c_1}{c_1^3}$ .

- Calcul de  $\Delta \Sigma$

$$\begin{aligned} \Delta \Sigma_{\omega \vec{p}}(\tilde{\Omega}, \vec{q}, T_1, T_2) &= \frac{1}{2i} n \left( T_{\vec{p}\vec{p}}(V + \delta V) - T_{\vec{p}\vec{p}}^*(V - \delta V) \right) \\ &= n \left( \Im m T_{\vec{p}\vec{p}} - i \frac{\partial \Re e T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V} \delta V - \frac{\partial^2 \Im m T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V^2} \frac{(\delta V)^2}{2} \right) \end{aligned}$$

• **Calcul de U**

$$\begin{aligned}
U_{\omega, \vec{p}', \vec{p}} &= n T_{\vec{p}\vec{p}}(V + \delta V) T_{\vec{p}\vec{p}}^*(V - \delta V) \\
&= n \left( T_{\vec{p}\vec{p}}(V) + \frac{\partial T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V} \delta V + \frac{\partial^2 T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial^2 V} \frac{(\delta V)^2}{2} \right) \left( T_{\vec{p}\vec{p}}^*(V) - \frac{\partial T_{\vec{p}\vec{p}}^*}{\partial V} \delta V + \frac{\partial^2 T_{\vec{p}\vec{p}}^*}{\partial^2 V} \frac{(\delta V)^2}{2} \right) \\
&= n |T_{\vec{p}'\vec{p}}(\omega)|^2 \\
&\quad + 2in |T_{\vec{p}'\vec{p}}(\omega)|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \delta V + n \left( 2 |T_{\vec{p}'\vec{p}}| \frac{\partial^2 |T_{\vec{p}'\vec{p}}|}{\partial V^2} - 4 |T_{\vec{p}'\vec{p}}|^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial V} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial |T_{\vec{p}'\vec{p}}|}{\partial V} \right)^2 \right) \frac{(\delta V)^2}{2}
\end{aligned}$$

avec  $T_{\vec{p}\vec{p}} = |T_{\vec{p}\vec{p}}| e^{i\phi}$

•  $\Delta \Sigma - \sum \Delta G U$

$$\begin{aligned}
\Delta \Sigma_{\omega \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) &- \sum_{\vec{p}'} \Delta G_{\omega \vec{p}'}(\Omega, \vec{q}) U_{\omega \vec{p}' \vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
&= n \left[ \Im m T_{\vec{p}\vec{p}} - \sum_{\vec{p}'} \Pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p'^2 \right) |T_{\vec{p}\vec{p}}|^2 \right] \\
&\quad + n \left[ -i \frac{\partial \Re e T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V} - \sum_{\vec{p}'} \Pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p'^2 \right) 2i |T_{\vec{p}'\vec{p}}|^2 \frac{\partial \phi}{\partial V} \right] \delta V \\
&\quad + n \left[ -\frac{\partial^2 \Im m T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V^2} - \sum_{\vec{p}'} \Pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p'^2 \right) \left( -4 |T_{\vec{p}'\vec{p}}|^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial V} \right)^2 + 2 |T_{\vec{p}'\vec{p}}| \frac{\partial^2 |T_{\vec{p}'\vec{p}}|}{\partial V^2} - 2 \left( \frac{\partial |T_{\vec{p}'\vec{p}}|}{\partial V} \right)^2 \right) \right] \frac{(\delta V)^2}{2} \\
&= nA + inB\delta V + nC \frac{(\delta V)^2}{2}
\end{aligned}$$

### B.3 Équation de continuité au 1<sup>ier</sup> ordre :

On fait appel aux arguments suivants :

- L'identité de Ward implique que  $A = 0$  car c'est le terme à  $V$  constant.

-

$$B = -\frac{\partial \Re e T_{\vec{p}\vec{p}}}{\partial V} - \sum_{\vec{p}'} \Pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p'^2 \right) 2 |T_{\vec{p}'\vec{p}}|^2 \frac{\partial \phi}{\partial V}$$

- et on se limite pour l'instant à l'ordre 1 donc on prendra  $C = 0$
- on précise également la notation  $\delta = nB(1 - \frac{c_0^2}{c_1^2})$ , en cohérence avec les articles [17, 21, 20].

On obtient ainsi l'équation de continuité au  $1^{ier}$  ordre :

$$\begin{aligned}
i(\Omega - \frac{\Delta c_0}{c_0}\omega)W_\omega^{rad}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) + i\omega \sum_{\vec{p}} nB\delta V\Phi_{\omega\vec{p}}(\Omega\vec{q}, T_1, T_2) + i\vec{q}\vec{J}_\omega(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) &= \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}}(\Omega, \vec{q}, T_1, T_2) \\
\Rightarrow \left[ i(\Omega - \frac{\Delta c_0}{c_0}\omega) + inB \left( \Omega\omega \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) - \frac{\omega^2\Delta c_0}{c_0^3} + \frac{\omega^2\Delta c_1}{c_1^3} \right) \left( \frac{c_0^2}{\omega} \right) \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega &= \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} \\
\Rightarrow \left[ i\Omega(1 + nB \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)) - i\omega \frac{\Delta c_0}{c_0} + inB \left( -\frac{\omega^2\Delta c_0}{c_0^3} + \frac{\omega^2\Delta c_1}{c_1^3} \right) \left( \frac{c_0^2}{\omega} \right) \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega &= \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} \\
\Rightarrow \left[ i\Omega(1 + nB \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + nBc_0^2 \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0^3} + \frac{\Delta c_1}{c_1^3} \right) \right) \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega &= \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} \quad (B.2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[ i\Omega(1 + \delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right) \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega = \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} \quad (B.3)$$

**B.4 Equation de continuité au  $2^{nd}$  ordre :**

$$\begin{aligned}
\left[ i\Omega(1 + \delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right) + nC \frac{(\delta V)^2}{2} \left( \frac{c_0^2}{\omega} \right) \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega &= \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} \\
\Rightarrow \left[ i\Omega(1 + \delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right) \right. \\
+ \frac{nC}{2} \left( \Omega^2\omega \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right)^2 + 2\Omega\omega^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) + \omega^3 \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right)^2 \right) c_0^2 & \left. \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega \\
= \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} &
\end{aligned}$$

On pose  $\mathcal{T} = \frac{nC}{2c_0^2}$

$$\Rightarrow \left[ i\Omega(1 + \delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right) \right. \\
+ \Omega^2\omega\mathcal{T}^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right)^2 c_0^4 + 2\Omega\omega^2\mathcal{T}^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^4 + \omega^3\mathcal{T}^2 \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right)^2 c_0^4 & \left. \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega \\
= \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} & \quad (B.4)
\end{aligned}$$

### B.5 Equation de diffusion au second ordre

$$\begin{aligned}
& \left[ i\Omega(1+\delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right) \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right) \right] W_\omega^{rad} \\
& + \left[ \Omega^2 \omega \mathcal{T}^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right)^2 c_0^4 + 2\Omega \omega^2 \mathcal{T}^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^4 + \omega^3 \mathcal{T}^2 \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right)^2 c_0^4 \right] W_\omega^{rad} \\
& - \frac{q^2 c_0}{3} \frac{1}{\left[ \frac{i\Omega}{c_0} (1+\delta) + i\omega \left( -\frac{\Delta c_0}{c_0^2} + \delta \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right)^{-1} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0 \right) + \tilde{l}_{tr}^{-1} \right]} W_\omega^{rad} \\
& = \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega \vec{p}}
\end{aligned}$$

en posant  $\mathcal{T} = \frac{nC}{2c_0^2}$ .

Ce qui peut se réécrire en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
D = \frac{c_0 \tilde{l}_{tr}}{3(1+\delta)} \\
F = \frac{\left( -\frac{\Delta c_0}{c_0} + \delta c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0^2}{c_1^2} \right) \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) \right)}{1+\delta} \\
N = \frac{1}{1+\delta} \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega \vec{p}} = \frac{1}{1+\delta} \frac{\omega^2}{4\pi c_0} \\
\xi = \frac{\int d^2 \hat{p}' (1 - \hat{p} \hat{p}') n \frac{\partial \sigma(\hat{p}' \rightarrow \vec{p})}{\partial \Omega} 2 \frac{\partial \phi}{\partial V}}{\int d^2 \hat{p}' (1 - \hat{p} \hat{p}') n \frac{\partial \sigma(\hat{p}' \rightarrow \vec{p})}{\partial \Omega}} \\
F_1 = \frac{1}{1+\delta} \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right)^2 c_0^4 \\
F_2 = 2 \frac{1}{1+\delta} \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^4 \\
F_3 = \frac{1}{1+\delta} \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right)^2 c_0^4
\end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{W_\omega^{rad} = \frac{N}{i(\Omega + \omega F) + (\Omega^2 \omega \mathcal{T}^2 F_1 + \Omega \omega^2 \mathcal{T}^2 F_2 + \omega^3 \mathcal{T}^2 F_3) - D q^2 \left[ 1 - i \frac{\tilde{l}_{tr}(1+\delta)}{c_0^2} (\Omega + \omega F) + i \xi \left( \Omega \omega \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) - \omega^2 \left( \frac{\Delta c_0}{c_0^3} - \frac{\Delta c_1}{c_1^3} \right) \right) \right]}} \quad (\text{B.5})$$

## Annexe C

# Extension au cas de vitesses $c_0$ et $c_1$ complexes

Cette annexe complète la section 2.7 du chapitre 2. On y calcule la fonction d'inter-corrélation 2.37 dans le cas où  $c_0 \in \mathbb{C}$  et  $c_1 \in \mathbb{C}$  :

$$\bar{c} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega x}{c_0}\right) \exp(i\omega(\tau - \tilde{F}'t)) \exp(-\omega \tilde{F}''t) |S(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |S(\omega)|^2} \quad (\text{C.1})$$

**Voici le développement du calcul :**

Dans le cas où  $c_0 \in \mathbb{C}$  et  $c_1 \in \mathbb{C}$  on a désormais :

$$\begin{aligned} \langle G^* \rangle^{-1} - \langle G \rangle^{-1} &= -2\Omega\omega \Re e \left( \frac{1}{c_0^2} \right) + 2\omega^2 \Re e \left( \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) - 2i\omega^2 \Im m \left( \frac{1}{c_0^2} \right) \\ \Delta \Sigma &= n \left( \Im m(T_{\vec{p}\vec{p}'}(V)) - i \Re e \left( \frac{\partial T_{\vec{p}\vec{p}'}(V)}{\partial V} \delta V \right) \right) \\ U &= n \left( |T|^2 + 2i |T|^2 \frac{\partial \phi_{\vec{p}\vec{p}'}(V)}{\partial V} \delta V + 2iT_{\vec{p}\vec{p}'}(V) \left( \frac{\partial T_{\vec{p}\vec{p}'}}{\partial V} \right)^* \Im m(\delta V) \right) \\ \Delta \Sigma - \sum \Delta GU &= n \left( \Im m(T_{\vec{p}\vec{p}'}(V)) - \sum_{\vec{p}'} \pi \delta \left( \left( \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) - p'^2 \right) |T_{\vec{p}\vec{p}'}(V)|^2 \right. \\ &\quad \left. + in \left[ -\Re e \left( \frac{\partial T_{\vec{p}\vec{p}'}(V)}{\partial V} \delta V \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\vec{p}'} \pi \delta \left( \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 - p'^2 \right) \left( 2 |T_{\vec{p}\vec{p}'}(V)|^2 \frac{\partial \phi_{\vec{p}\vec{p}'}(V)}{\partial V} \delta V + 2T_{\vec{p}\vec{p}'}(V) \left( \frac{\partial T_{\vec{p}\vec{p}'}}{\partial V} \right)^* \Im m(\delta V) \right) \right] \right) \\ &= nA + in\tilde{B}' \Re e(\delta V) + in\tilde{B}'' i \Im m(\delta V) \end{aligned}$$

Ainsi l'équation de continuité s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
& \left[ i\Omega \Re \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 - i\omega \Re \left( \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^2 - \omega \Im \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 \right] W_\omega^{rad} \\
& + in \left[ \tilde{B}' \Re(\delta V) + i\tilde{B}'' \Im(\delta V) \right] \frac{c_0^2}{\omega} W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega = \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} \\
\Rightarrow i\Omega & \left[ \Re \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 + n\tilde{B}' \Re \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) c_0^2 + in\tilde{B}'' \Im \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) c_0^2 \right] W_\omega^{rad} \\
& + i\omega \left[ -\Re \left( \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^2 + n\tilde{B}' \Re \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^2 + in\tilde{B}'' \Im \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^2 \right] W_\omega^{rad} + i\vec{q}\vec{J}_\omega = \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}} \\
\Rightarrow i\Omega & \left( \Re \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 + \tilde{\delta} \right) W_\omega^{rad} + i\omega\tilde{F} + i\vec{q}\vec{J}_\omega = \omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{\delta} = \tilde{\delta}' + i\tilde{\delta}'' = n\tilde{B}' \Re \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) c_0^2 + in\tilde{B}'' \Im \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) c_0^2 \\ \tilde{F} = -\Re \left( \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^2 + n\tilde{B}' \Re \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^2 + in\tilde{B}'' \Im \left( \frac{\Delta c_1}{c_1^3} - \frac{\Delta c_0}{c_0^3} \right) c_0^2 \end{cases}$$

On notera dans la suite pour simplifier l'écriture :

$$\begin{cases} N = \frac{\omega \sum_{\vec{p}} \Delta G_{\omega\vec{p}}}{\Re \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 + \tilde{\delta}} \\ \tilde{F}' = \Re \left( \frac{\tilde{F}}{\Re \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 + \tilde{\delta}} \right) \\ \tilde{F}'' = \Im \left( \frac{\tilde{F}}{\Re \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 + \tilde{\delta}} \right) \\ \tilde{D} = \frac{c_0 l_{tr}}{3} \frac{1}{\Re \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 + \tilde{\delta}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_\omega^{rad} = \frac{N}{i\Omega + i\omega\tilde{F}' - \omega\tilde{F}'' - \tilde{D}q^2}$$

On en déduit que les expressions de la densité d'énergie , de la fonction d'intercorrélacion et de la fonction d'intercorrélacion normée sont modifiées comme suit :

$$\boxed{W^{rad}(\vec{R}, t) = \frac{\omega^2}{4\pi c_0 \left( \Re \left( \frac{1}{c_0^2} \right) c_0^2 + \tilde{\delta} \right)} \frac{1}{(4\pi\tilde{D}t)^{3/2}} e^{\left(-\frac{r^2}{4\tilde{D}t}\right)} e^{-i\omega\tilde{F}'t} e^{-\omega\tilde{F}''t}} \quad (C.2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \text{sinc}\left(\frac{\omega x}{c_0}\right) \exp(i\omega(\tau - \tilde{F}'t)) \exp(-\omega\tilde{F}''t) |S(\omega)|^2 \frac{1}{(4\pi\tilde{D}t)^{3/2}} e^{\left(-\frac{r^2}{4\tilde{D}t}\right)}} \quad (C.3)$$

$$\boxed{\bar{\mathcal{C}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \text{sinc}\left(\frac{\omega x}{c_0}\right) \exp(i\omega(\tau - \tilde{F}'t)) \exp(-\omega\tilde{F}''t) |S(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |S(\omega)|^2}} \quad (C.4)$$



# Bibliographie

- [1] J. E. Vidale, D. A. Dodge, and P. S. Earle. Slow differential rotation of the Earth's inner core indicated by temporal changes in scattering. *Nature*, 405 :445, May 2000.
- [2] HC. Nataf. Inner core takes another turn. *Nature*, 405 :411, May 2000.
- [3] A. Grêt and R. Snieder. Monitoring rapid temporal change in a volcano width coda wave interferometry. *Geophysical Research Letters*, 32, March 2005.
- [4] R. Snieder and M. Vrijlandt. Constraining the source separation with coda wave interferometry : Theory and application to earthquake doublets in the hayward fault, california. *Journal of Geophysical Research*, 110, April 2005.
- [5] K. Aki and P. G. Richards. *Quantitative Seismology*. 2nd edition edition, 2002.
- [6] K. Aki. Analysis of seismic coda of local earthquake as scattered waves. *Journal of Geophysical Research*, 76 :615–631, 1969.
- [7] K. Aki and B. Chouet. Origin of coda waves- source attenuation and scatterinf effects. *Journal of Geophysical Research*, 80 :3322–3342, 1975.
- [8] L. Margerin, M. Campillo, and B. A. Van Tiggelen. Diffusion multiple des ondes sismiques. *Images de la physique - CNRS*, pages 220–224, 2005.
- [9] R. Hennino, N. Trégourès, N. M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B. A. van Tiggelen, and R. L. Weaver. Observation of Equipartition of Seismic Waves. *Physical Review Letter*, 86 :3447–3450, april 2001.
- [10] E. Larose. *Diffusion multiple des ondes sismiques et expériences analogiques en ultrasons*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, Juillet 2005.
- [11] E. Larose, L. Margerin, B. A. van Tiggelen, and M. Campillo. Weak localisation of Seismic Waves. *Physical Review Letters*, 93(4), July 2004.
- [12] R. Snieder. Coda Wave Interferometry. *McGraw-Hill Yearbook of Science and Technology*, 54-56, 2004.
- [13] M.L. Cowan, I.P. Jones, J.H. Page, and D.A. Weitz. Diffusing acoustic wave spectroscopy. *Physical Review E*, 65, June 2002.
- [14] B.A. Van Tiggelen and S. Skipetrov. *Wave Scattering in Complex Media : From Theory to Applications*. Kluwer Academic Publisher, 2003.
- [15] R. L. Weaver and O. I. Lobkis. Temperature dependence of diffuse field phase. *Ultrasonics*, 38 :491–494, 2000.
- [16] O. I. Lobkis and R. L. Weaver. Coda-Wave Interferometry in Finite Solids : Recovery of P-to-S Conversion Rates in a Elastodynamic Billiard. *Physical Review Letters*, 90(25), June 2003.

- [17] A. Lagendijk and B. A. van Tiggelen. Resonant multiple scattering of light. *Physics Reports*, 270(3), May A996.
- [18] E. Akkermans and G. Montambaux. *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. 2004.
- [19] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon.
- [20] B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, M. P. van Albada, and A. Tip. Speed of light in random media. *Physical review B*, 45(21) :12233–12243, June 1992.
- [21] B. A. van Tiggelen, A. Tip, and A. Lagendijk. Dwell times for light and electrons. *J. Phys. A : Math gen.*, 26 :1731–1748, 1993.
- [22] B. A. van Tiggelen and A. Lagendijk. Rigorous Treatment of the speed of Diffusing Classical Waves. *Europhysics Letters*, 23(5) :311–316, August 1993.