

Exposé scientifique du projet :

(4 pages maximum, en soulignant l'originalité et l'intérêt du projet)

1. Les phases géométriques

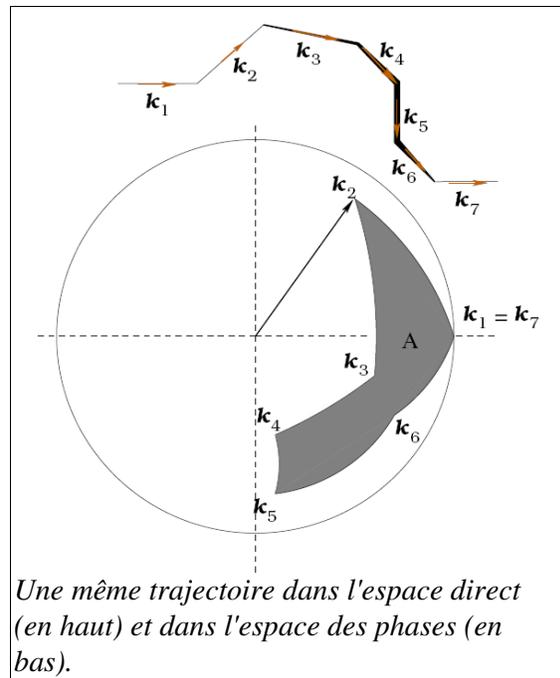
Dans un système physique qui évolue adiabatiquement et de façon cyclique, on peut mettre en évidence, sous certaines conditions, une phase qui dépend de l'ensemble de l'évolution au cours d'un cycle [1]. Cette phase est appelée phase de Berry si le système est quantique. En physique classique, on parle de phase géométrique. Cette phase a été observée dans le cas de la lumière polarisée avec une trajectoire bien définie à l'aide d'une fibre optique [2].

La phase géométrique est définie pour une trajectoire fermée déterminée dans l'espace des phases du système. Si cet espace des phases possède une courbure, alors la phase géométrique pourra être non-triviale. Dans le cas de la lumière, l'espace des phases est la sphère portant le vecteur d'onde (dont le module reste constant). La phase géométrique Φ d'une trajectoire fermée est

$$\Phi = -\sigma A \quad (1)$$

où σ est le spin du photon et A l'aire sphérique délimitée par la trajectoire sur la sphère. Sur la figure ci-contre, on a représenté une trajectoire dans l'espace direct (en haut), les directions de propagation sont notées k_i et sont reportées sur l'espace des phases (en bas) où ils sont représentés par des points reliés par des géodésiques. L'aire A délimitée par cette trajectoire est l'aire entrant dans le calcul de Φ . (Les angles ont été exagérés pour une meilleure lisibilité ; dans notre étude, nous considérerons les trajectoires dont la direction reste proche de la direction initiale). Si la lumière effectuant cette trajectoire est initialement polarisée linéairement, la polarisation sera linéaire après la trajectoire mais dans une direction différente. La rotation de la polarisation est due à la différence des phases attachées aux photons ayant des spins $\sigma = 1$ ou $\sigma = -1$. On a donc une rotation d'un angle $2A$ dans ce cas.

La lumière se propageant dans un milieu désordonné suit, en quelque sorte, plusieurs trajectoires ayant chacune une amplitude différente. Chaque photon suit une trajectoire à laquelle on peut attacher une amplitude et une phase géométrique. Lorsque l'on émet une lumière polarisée en direction d'un milieu contenant des diffuseurs l'état de polarisation émergent dépend de l'ensemble des trajectoires effectuées. La somme des contributions de tous les photons peut être vue d'un point de vue statistique, la trajectoire ayant une probabilité proportionnelle au carré de son amplitude. On peut également interpréter cette somme comme une intégrale de chemins. En définitive, l'état de polarisation émergent est bien plus complexe que dans le cas d'une trajectoire unique, il dépend de la statistique des trajectoires dans le milieu [3]. Si les trajectoires sont indépendantes (le cas le plus connu est l'optique géométrique) on peut alors décrire le problème en termes de probabilités de trajectoires.



2. Modélisation et traitement du signal

Nous proposons de décrire la statistique de polarisation d'un champ d'onde émis par une source polarisée après propagation dans un milieu inhomogène. Nous baserons notre approche sur une modélisation récente de la diffusion multiple à l'aide processus de Poisson composés à valeurs sur des variétés différentiables et des groupes compacts [4]. Ce modèle permet de déduire des caractéristiques de la fonction de phase des diffuseurs à partir de la distribution des directions émergentes. La direction de propagation y est vue comme un vecteur $d(t)$ à valeurs sur la sphère unité et la diffusion multiple comme un processus aléatoire de sauts à valeurs sur cette sphère. Un saut correspond à la rencontre de l'onde avec un diffuseur et se modélise comme une rotation aléatoire R de la direction de propagation. Au temps t le nombre de diffusion $N(t)$ est une variable aléatoire. On a

$$d(t) = \prod_{i=0}^{N(t)} R_i d(0) \quad (2)$$

Sous l'hypothèse d'indépendance des diffuseurs, on sait alors identifier la loi de probabilité des rotations aléatoires qui caractérise les diffuseurs. La formule (2) montre que le processus ainsi défini est un processus de Poisson composé sur le groupe le Lie compact $SO(3)$. La validité de ce modèle a été démontrée dans le cas de la diffusion vers l'avant (petits angles de diffusion) qui sera également notre cadre d'étude de la phase géométrique.

Le modèle décrit par la formule (2) sera enrichi pour prendre en compte la polarisation. Une approche possible se base sur l'analyse harmonique non commutative [5]. Or, l'état de la lumière se modélise comme un point d'un fibré $U(1)$ sur la sphère S^2 . La phase géométrique est directement liée à la connexion sur ce fibré, vu en tant que variété. Le problème de la statistique de la phase géométrique se reformule en un processus stochastique sur une variété compacte, on peut donc envisager une estimation statistique du type « méthode des moments » [6]. L'originalité du problème réside dans le fait que l'on s'intéresse à la statistique d'un objet défini par la connexion sur cette variété. Chaque point de la variété étant la donnée conjointe d'une direction de propagation et d'un état de polarisation, on aura établi un modèle pour la distribution conjointe de ces deux quantités.

À partir du modèle stochastique d'évolution conjointe de la polarisation et de la direction de propagation nous serons en mesure de relier le champ d'onde aux caractéristiques des diffuseurs et du milieu. Comme dans le cas des ondes non polarisées, il sera alors possible de construire des estimateurs pour le problème inverse [6]. Cependant la résolution du problème suppose jusqu'à présent une connaissance (*a priori* ou par une mesure préliminaire) du libre parcours moyen. Nous souhaitons nous affranchir de ce prérequis et estimer les paramètres du milieu directement à l'aide de la statistique conjointe de la phase géométrique et de la direction de sortie des ondes. Pour ce faire, nous proposons d'utiliser des techniques d'estimation statistique paramétrique de type *Expectation-Minimisation* (EM) [7] pour les processus de Poisson composés sur les variétés.

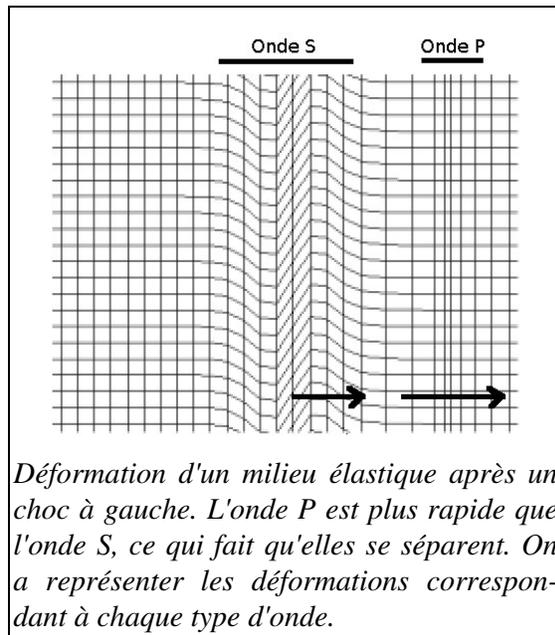
Ainsi, nous pourrions estimer simultanément de manière quasi-optimale plusieurs des paramètres du milieu aléatoire sans faire d'hypothèse trop contraignante sur celui-ci. Dans le cas où la fonction de phase des diffuseurs dépend d'un petit nombre de paramètres (comme les fonctions de phase de Henyey-Greenstein ou von Karman), il semble envisageable d'obtenir un estimateur du maximum de vraisemblance pour ces paramètres. La mesure de la polarisation apportant une information supplémentaire par rapport à la seule mesure de l'intensité, il sera possible d'estimer plus de paramètres que par les techniques existantes.

3. Les ondes élastiques

3.1 Modélisation des ondes élastiques

Plusieurs types de vibrations peuvent se propager dans un solide. Il existe, outre les ondes de pression (ondes P), des ondes de cisaillement appelées ondes S. Les ondes P, qui existent aussi dans les fluides, sont longitudinales et ne peuvent pas permettre d'observer une phase géométrique, car elles correspondent à un état de spin $\sigma = 0$, ce qui d'après la formule (1) conduit à une phase triviale. En revanche les ondes S sont transverses et de ce fait il existe deux directions indépendantes de vibration et on les représente dans une base circulaire, on a alors deux polarisations de référence se comportant comme des particules de spin $\sigma = \pm 1$. Les ondes S ont ainsi des caractéristiques très semblables aux ondes électromagnétiques, donc lumineuses.

Les ondes élastiques ont des caractéristiques plus riches que la lumière car les ondes S et P ont généralement des vitesses de propagation différentes dans un milieu. Sur la figure ci-contre, on a représenté la déformation d'un milieu élastique en réponse à un choc survenant à gauche. Les ondes P sont en avance sur les ondes S. La modélisation des ondes P et S et la polarisation de ces dernières est un *défi technique* supplémentaire pour notre projet car il faut prendre en compte les caractéristiques de chaque type d'onde et les conversions possibles entre elles [8]. La modélisation devra prendre en compte les propriétés spécifiques de chaque type d'onde dans un cadre unique mathématiquement adapté à la phase géométrique et permettant de généraliser les résultats de notre approche en termes de processus aléatoires.



Afin d'analyser un champ d'onde, donnée des déplacements en fonction du temps en un point ou un ensemble de points, il sera également nécessaire de développer des outils d'analyse harmonique spécifiques aux ondes élastiques. En particulier il sera utile de pouvoir filtrer les contributions correspondant à une direction donnée.

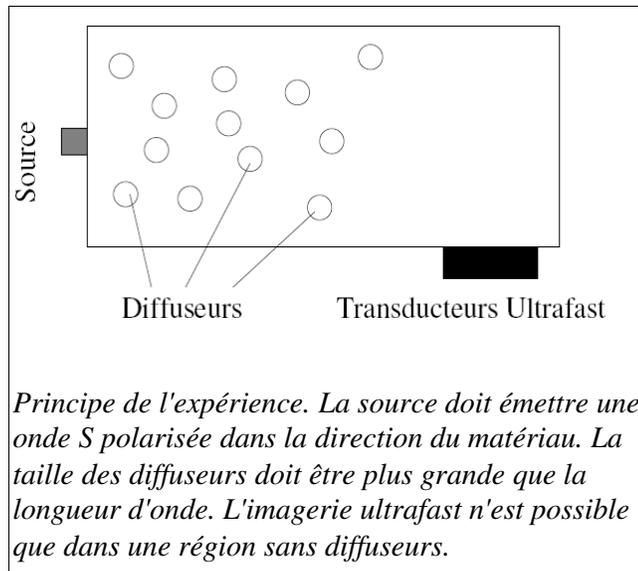
3.2 Proposition d'expérience

Il nous semble intéressant, une fois notre approche stochastique développée, de la confronter à l'expérience. Celle que nous présentons ici permettra en outre de mettre pour la première fois en évidence expérimentalement la phase géométrique des ondes élastiques. Cette expérience pourrait être réalisée en fin de projet.

Les ondes élastiques dans les matériaux courants ont des fréquences variant entre quelques Hz et quelques MHz, il est donc facile d'enregistrer l'amplitude des ondes S avec une bonne résolution temporelle (plusieurs points par oscillation), ce qui est difficile avec de la lumière. De plus, dans certains matériaux, comme le caoutchouc, le rapport des vitesses des ondes S et P est très grand, pouvant atteindre plusieurs ordres de grandeur. Il est alors possible d'utiliser les ondes P pour mesurer le champ d'onde S au cours du temps. Cette technique est appelée *ultrafast* [9]. Dans ce cas, la conversion des ondes P vers les ondes S est négligeable, la

conversion des ondes S vers P aura le même effet qu'une absorption.

Bien que prévue par la théorie, l'existence d'une phase géométrique pour les ondes S n'a jamais été prouvée expérimentalement ni par une expérience à trajectoire imposée, ni par une expérience avec distribution de trajectoires. Un intérêt supplémentaire de cette expérience est donc de pouvoir mettre en évidence la phase géométrique des ondes élastiques pour *la première fois*. Nous collaborons déjà étroitement avec un expérimentateur, Éric Larose, membre de l'équipe Ondes et Structures du Laboratoire de géophysique interne et tectonophysique (LGIT, Grenoble).



4. Financement

Nous demandons pour ce projet une aide de 10 000 € afin de financer les moyens de calcul (3000 €, utilisation de moyens mutualisés: plateforme grenobloise CIMENT), de participer à des conférences (1500 € par participant au projet), d'organiser un atelier sur plusieurs jours et inviter les conférenciers (2500 €). L'organisation de l'atelier se fera conjointement dans le cadre du Centre pour la théorie en physique de Grenoble (CTPG) .

Références

- [1] Berry, M.V., Quantal phase factor accompanying adiabatic changes, *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45-57, (1984).
- [2] Berry, M.V., The adiabatic phase and Pancharatnam's phase for polarized light, *J. Mod. Optics*, **34**(11), 1401-1407 (1987).
- [3] Maggs, A.C. and Rossetto, V., Writhing photons and Berry phases in polarized multiple scattering, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 253901 (2001).
- [4] Said, S., Lageman, C., Le Bihan, N. and Manton, J.H., Nonparametric estimation for compound Poisson processes on compact Lie groups, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Taipei, Taiwan, (2009).
- [5] Chirikjian, G.S. and Kyatkin, A.B., *Engineering applications of noncommutative harmonic analysis*, CRC Press, 2001.
- [6] Said, S., Lageman, C., Le Bihan, N., Margerin, L. and Manton, J.H., Decomposing on compact Lie groups, 8th IMA conference on mathematics in Signal Processing, Cirencester, UK (2008).
- [7] Dempster, A.P., Laird N.M. and Rubin, D.B., *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **39**, No. 1., 1-38 (1977)
- [8] Margerin, L., Campillo, M. and Van Tiggelen, B., Monte Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves, *J. Geophys. Res.*, **105**(B4), 7873-7892, (2000).
- [9] Sandrin, L., Tanter, M., Catheline, S. and Fink, M., Shear Modulus Imaging with 2-D Transient Elastography, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **40**(4), 426-435, (2002).