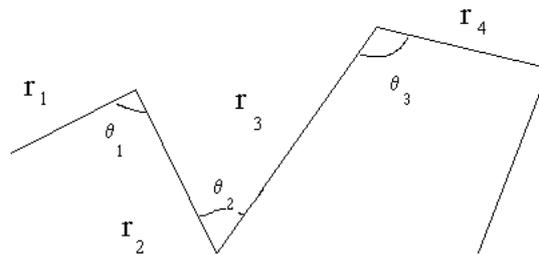


## Mésoscopie et Décohérence des Photons

TD nr. 1 : Transfert Radiatif

**Exercice 1 :** Interprétation probabiliste de l'équation du transfert radiatif et des libres parcours moyens.

Considérez une marche aléatoire d'une particule classique de vitesse  $v$  constante, avec à chaque point de diffusion une probabilité  $\Phi(\theta)$  d'être diffusée d'un angle  $\theta$ . La distribution du libre parcours moyen est donnée par  $P(r_i)$ , indépendante de l'histoire de la particule.



a) Calculez la constante de diffusion, définie par la formule d'Einstein :

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle / 6t,$$

où  $t$  est le temps écoulé et  $\mathbf{r}(t)$  est la position de la particule à l'instant  $t$ .

b) Démontrez que pour une distribution exponentielle,  $P(r) = \exp(-r/\ell)/\ell$ , cette expression se réduit à la relation classique de Boltzmann,  $D = v \ell^*/3$ , où  $\ell^*$  est le libre parcours moyen de transport, donné par  $\ell^* = \ell / (1 - \langle \cos \theta \rangle)$ . Il est différent de la longueur d'extinction  $\ell$  quand la diffusion est anisotrope.

**Exercice 2 :** Equation de diffusion à  $d$  dimensions et sa fonction de Green.

Considérez la fonction de Green qui obéit à l'équation de diffusion dynamique

$$\partial_t G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) - D \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t)$$

avec  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t < 0) = 0$ . La transformée de Laplace de  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  est notée  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$ .

a) Démontrez que, dans un milieu infini à une dimension,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$  diverge lorsque  $\Omega$  tend vers zéro, *i.e.* l'intégrale temporelle diverge. Démontrez que pour un milieu infini à 3 dimensions  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega=0)$  existe à la condition que  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ .

- b) Considérez l'équation ci-dessus stationnaire et à une dimension. Soit  $f_+(z)$  et  $f_-(z)$  la fonction propre croissante et décroissante de l'équation homogène, i.e. sans le terme de source. Démontrez que le Wronskian  $W = f_+(z)' f_-(z) - f_-(z)' f_+(z)$  est constant et que la fonction de Green est donnée par  $G(z, z') = f_+[\max(z, z')] f_-[\min(z, z')] / WD$ .
- c) Les conditions de bords sont obtenues à partir de la conservation de flux. Dans l'approximation de diffusion, l'intensité spécifique est donnée par

$$I_{\mathbf{k}}(z) = v \rho(z) + 3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}(z),$$

avec  $\mathbf{J} = -\hbar D \partial_z \rho$ . Démontrez que, pour que le flux incident s'annule à  $z = 0$ , la condition de bord est donnée par  $f(0) - z_0 \partial_z f(0) = 0$ , où  $z_0 = 2\ell^*/3$  est la *longueur d'extrapolation*.

- d) Démontrez que pour un demi-espace,  $G(z, z') = [\min(z, z') + z_0]/D$ .
- e) Les coefficients de réflexion et de transmission « *all channel in all channel out* » des photons qui se propagent dans une tranche désordonnée de longueur  $L \gg \ell^*$  peuvent être obtenus à partir de la fonction de Green en mettant une source imaginaire  $\delta(z-z_0)$  à une profondeur  $z_0$  :  $R = -D \partial_z G(z=0, z_0)$  et  $T = -D \partial_z G(z=L, z_0)$ .

Démontrez que  $R + T = 1$  et que  $T = 2 z_0 / (L + 2 z_0)$

- f) La conductance « photonique » pourrait être définie par la relation  $G = \sum_{ab} T_{ab}$  (formule de Landauer avec  $e^2/\hbar=1$ ) où  $T_{ab}$  est le coefficient de transmission du canal  $a$  incident vers le canal  $b$  sortant. Pour une tranche de surface  $A$  le nombre de canaux indépendants (zones de Fresnel) est  $Ak^2$  où  $k = 2\pi/\lambda$  est le vecteur d'onde.

Démontrez que  $G = 4/3 k^2 \ell^* A/L$ .

*La conductivité de Drude « photonique » est donc donnée par  $\sigma = k^2 \ell^*$*

### Exercice 3 : Fonction de Wigner

La fonction de Wigner est définie par

$$\Phi_{\omega\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{x} \int d\Delta t \exp(-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) \exp(i\omega\Delta t) \Psi(\mathbf{r}+\mathbf{x}/2, t+\Delta t/2) \Psi(\mathbf{r}-\mathbf{x}/2, t-\Delta t/2)^*$$

Démontrez que

- a)  $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \int d\omega \int d\mathbf{p} \Phi_{\omega\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$  (densité de probabilité)
- b)  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \equiv (1/m) \text{Im} \Psi(\mathbf{r}, t) \partial_{\mathbf{r}} \Psi(\mathbf{r}, t)^* = \int d\omega \int d\mathbf{p} (\mathbf{p}/m) \Phi_{\omega\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$  (courant Schrödinger)
- c)  $\frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{r}) |\partial_t \Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2} |\partial_{\mathbf{r}} \Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \int d\omega \int d\mathbf{p} p^2 \Phi_{\omega\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$  (énergie classique).

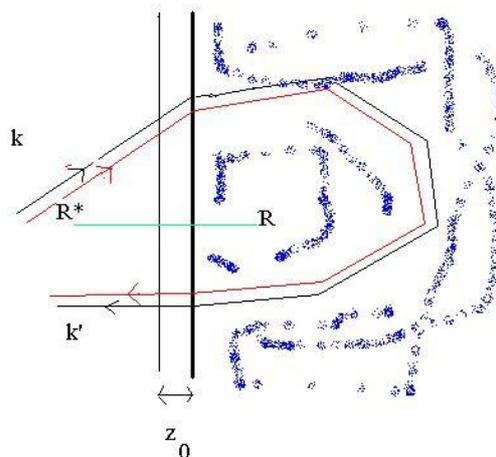
Ici, on doit faire appel à l'équation scalaire et l'approximation SVEA.

## Mésoscopie et Décohérence des Photons

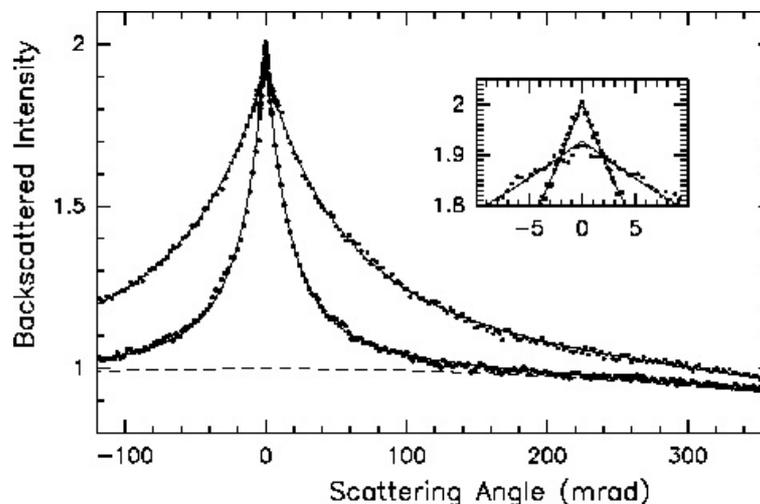
TD nr. 2 : Rétro-diffusion Cohérente et Tavelures.

**Exercice 1 :** Profil angulaire de la rétrodiffusion cohérente (Akkermans, Wolf et Maynard, Phys. Rev. Lett. **56**, 1471, 1986).

Considérez un demi-espace avec un libre parcours de transport  $\ell^*$  et une longueur d'extinction  $\ell$ .

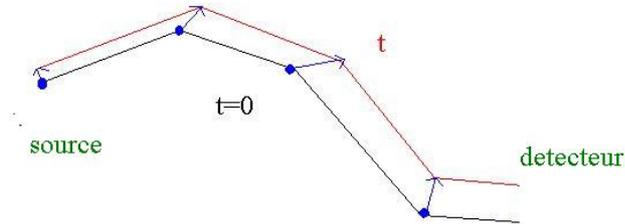


- Trouvez la fonction de Green incohérente à partir de celle d'un milieu infini en utilisant la méthode des images afin de respecter la condition de bord à  $z=0$  (voir figure).
- Généralisez cette expression pour la fonction de Green du « cooperon », i.e. celle qui est associée aux diagrammes croisés.
- Trouvez le profil angulaire de la rétrodiffusion cohérente en supposant que le flux réfléchi est donné par des photons qui entrent et sortent à une longueur d'extinction  $\ell$  de profondeur :  $I(\theta) = G(z=\ell, z=\ell, \mathbf{Q})$ , avec  $\mathbf{Q} = \mathbf{k} + \mathbf{k}'$ .



Courbe expérimentale de la rétrodiffusion cohérente avec deux libres parcours moyen différents. (Wiersma, Van Albada, Lagendijk et Van Tiggelen, Phys. Rev. Lett. **74** 4193, 1995)

**Exercice 2 :** Spectroscopie des Ondes Diffuses (Diffuse Wave Spectroscopy, DWS (Wolf et Maret, Zeitschrift für Physik B **65**, 409, 1987).



Considérez un milieu infini rempli de diffuseurs animés d'un mouvement Brownien (une colloïde). Une source ponctuelle à  $\mathbf{r} = 0$  émet des photons de façon stationnaire. À une distance  $\mathbf{r}$  de la source, on mesure la densité des photons en fonction du temps.

- Démontrez que, pour un chemin avec  $N$  diffusions élastiques des photons, le déphasage subi après un temps  $t$  est donnée par  $\Delta\phi(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i(t)$ , où  $\Delta\mathbf{r}_i(t)$  est le déplacement de la particule  $i$  après un temps  $t$ .
- Démontrez – en faisant appel à une statistique gaussienne du champ optique – que la fonction de corrélation temporelle  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \langle \Psi(\mathbf{r}, t=0) \Psi^*(\mathbf{r}, t) \rangle$  du champ mesurée au détecteur obéit à l'équation de diffusion

$$[- D \Delta + 1/\tau_p(t)] \Phi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}),$$

où le temps de déphasage est donné par  $1/\tau_p(t) = k^2 \langle \Delta\mathbf{r}(t)^2 \rangle c_0/3\ell$ .

- Résolvez cette équation pour un milieu infini, et montrez que la méthode DWS est sensible à des déplacements de l'ordre de  $\Delta\mathbf{r}(t) = \lambda/\sqrt{t/\ell}$ , *i.e. largement inférieurs* à la longueur d'onde optique (500 nm).

**Exercice 3 :** Vitesse de transport (Van Tiggelen et Lagendijk, Europhys. Lett. **23**, 311, 1993)

La question se pose: quelle est la vitesse de la lumière qui s'applique au régime diffus, *i.e.* quelle est la « vitesse de transport » qui apparaît dans la constante de diffusion  $D = v_E \ell^*/3$ ? Vitesse de phase, vitesse de groupe ou autre chose?

- Démontrez de façon heuristique - à partir de l'équation de continuité - que la vitesse de transport d'un paquet d'onde centré autour d'une fréquence  $\omega$  est donnée par la relation  $v_E(\omega) = \langle J_\omega \rangle / \langle \rho_\omega \rangle$ , où  $\langle \rho \rangle$  et  $\langle J \rangle$  sont la densité et le courant moyen du milieu.
- Démontrez que, pour les ondes de De Broglie, obéissant à l'équation de Schrödinger,  $v_E = \hbar k/m$ , où  $k$  est le vecteur d'onde et  $m$  est la masse de la particule.
- Pour les ondes classiques et scalaires la densité d'énergie est donnée par

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon(\mathbf{r}) c_0^{-2} |\partial_t \Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2} |\partial_{\mathbf{r}} \Psi(\mathbf{r}, t)|^2.$$

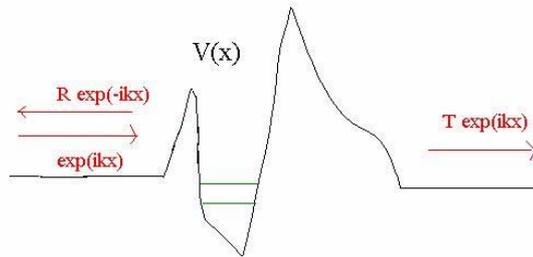
Démontrez que – pour une faible densité  $n$  des diffuseurs - la vitesse de transport est donnée par la relation

$$v_E = c_0^2 / v_p [ 1 + n \int d\mathbf{r} [\varepsilon(\mathbf{r})-1] |\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r})|^2 ]^{-1}$$

où l'intégrale s'effectue sur le volume d'un seul diffuseur et où  $\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r})$  est la fonction propre normalisée de la diffusion à la fréquence  $\omega = kv_p$ , où  $v_p$  est la vitesse de phase. Argumentez qu'au voisinage d'une résonance optique  $v_E \ll c_0$ .

- d) En comparant l'équation de Schrödinger ( $\hbar^2/2m = 1$ ) à l'équation d'onde scalaire, le potentiel « photonique »  $V(\mathbf{r}) = [1-\varepsilon(\mathbf{r})] \omega^2/c_0^2$  peut être identifié. Donc

$$\int d\mathbf{r} [\varepsilon(\mathbf{r})-1] |\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r})|^2 = \langle \Psi_{\mathbf{k}}^+ | V | \Psi_{\mathbf{k}}^+ \rangle c_0^2 / \omega^2$$



- 1) Considérez cette expression à une dimension. La solution de l'équation de Schrödinger pour un paquet d'ondes incident est donnée par

$$\Psi(x,t) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty dk \Psi_0(k) \Psi_{\mathbf{k}}^+(x) \exp(-ik^2t),$$

avec  $(2\pi)^{-1} \int_0^\infty dk |\Psi_0(k)|^2 = 1$ . Considérez le potentiel « complexe »  $V(x) = (V_0 + i\varepsilon) f(x)$ . Démontrez – en utilisant l'équation de continuité - la relation suivante entre le champ à l'intérieur de la région d'interaction et celui à l'extérieur :

$$\langle \Psi_{\mathbf{k}}^+ | V | \Psi_{\mathbf{k}}^+ \rangle = \text{Lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} [1 - |R_{\mathbf{k}}|^2 - |T_{\mathbf{k}}|^2] kV_0/\varepsilon$$

- 2) Les coefficients de réflexion et de transmission sont des fonctions analytiques du paramètre  $V_0 + i\varepsilon$  du potentiel. Appliquez les équations de Cauchy-Riemann pour exprimer l'élément de matrice ci-dessus dans les déphasages subis en réflexion et en transmission  $\varphi_{R,T}$  :

$$\langle \Psi_{\mathbf{k}}^+ | V | \Psi_{\mathbf{k}}^+ \rangle = 2kV_0 [ |R_{\mathbf{k}}|^2 d\varphi_R/dV_0 + |T_{\mathbf{k}}|^2 d\varphi_T/dV_0 ]$$

L'expression à droite est définie (à une vitesse près) comme « temps de séjour » (*dwell time*)  $\tau_d$  des ondes dans la région d'interaction (M. Buttiker, Phys. Rev. B **27**, 6178, 1983).

*La vitesse de transport est donc modifiée par le retard subi lors de la diffusion des ondes.*

- e) (Pour les courageux) À 3 dimensions, on définit l'amplitude de transition (*T-matrice on -shell*)  $t_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\omega)$  d'un diffuseur (avec la dimension d'une longueur) telle que le champ lointain est donné par

$$\Psi(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\mathbf{k} \Psi_0(\mathbf{k}) [\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) - t_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \exp(i\mathbf{k}r)/4\pi r] \exp(-ik^2t),$$

Démontrez que:

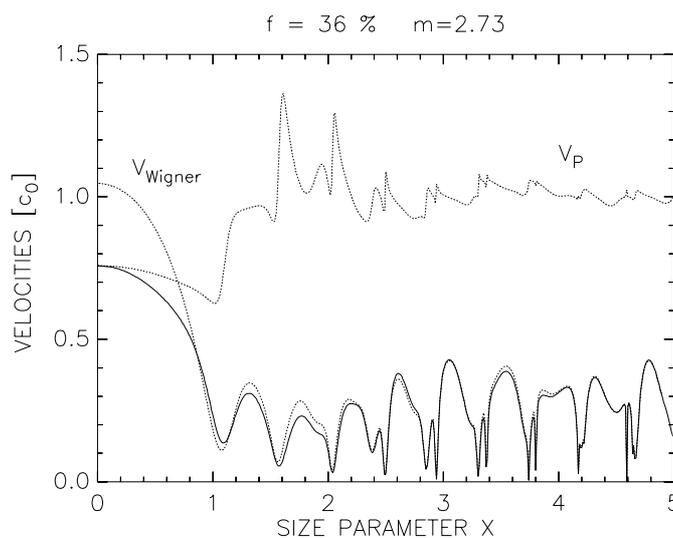
$$\langle \Psi_{\mathbf{k}'}^+ | V | \Psi_{\mathbf{k}}^+ \rangle = V_0 [ d \operatorname{Re} t_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} / dV_0 - 2k \int d^2\Omega d\sigma/d\Omega d\phi(\Omega)/dV_0 ]$$

où  $d\sigma/d\Omega = |t_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\omega)|^2/4\pi$  est la section efficace différentielle et  $\phi(\Omega)$  le déphasage subi par l'onde diffractée dans la direction  $\Omega$ .

- f) L'approximation  $V_0 d/dV_0 \approx \frac{1}{2} \omega d/d\omega$  remplace l'expression ci-dessus par la dérivée de la phase par rapport à la fréquence (ou énergie/ $\hbar$ ), dérivée connue dans la littérature sous le nom de *temps de retard de Wigner*  $\tau_\phi$ . Wigner a été le premier à insister sur l'importance de ce temps pour des diffusions résonantes (E. Wigner, Phys. Rev. **70**, 606, 1946 : Prix Nobel). À 3 dimensions, le nombre de canaux actifs dans la diffusion (dans un langage optique le nombre de « rayons » capturés par le diffuseur) est estimé par  $\sigma k^2$ , où  $\sigma$  est la section efficace totale et  $k = \omega/c_0$  est le vecteur d'onde. Démontrez que la vitesse de transport se réduit à

$$v_E = c_0^2 / V_p [ 1 + \tau_\phi / \tau ]^{-1}$$

où  $\tau = \ell/c_0$  est le temps du libre parcours moyen entre les diffusions.



Vitesse de transport pour une collection de diffuseurs de Mie (sphères diélectriques) de dioxyde de titane, avec une fraction volumique 36 %, en fonction de leur paramètre de taille  $x = 2\pi a/\lambda$ . La courbe en trait plein montre la solution exacte, en pointillés l'approximation de Wigner (voir 3f) et la vitesse de phase du milieu effectif.

### Mésoscopie et Décohérence des Photons

TD nr. 3 : Localisations Faible et Forte

**Exercice 1 :** Modèle d'Anderson à une dimension (P.W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492, 1958 : papier Prix Nobel « *often quoted but never read paper* »)

Considérez l'hamiltonien suivant,

$$H = \sum_n \varepsilon_n |n\rangle\langle n| + V |n\rangle\langle n+1| + V |n+1\rangle\langle n|$$

L'hamiltonien décrit le saut (« hopping ») d'un électron fortement lié (« *tightly bound* ») d'un site à un site voisin.

- a) Dans le cas où l'énergie potentielle est nulle ( $\varepsilon_n = 0$ ), démontrez que le spectre d'énergie est continu et donné par  $-2V < E < 2V$ .

Anderson et Thouless ont démontré que – en présence du désordre « diagonal » i.e. avec  $V$  déterministe et les  $\varepsilon_n$  stochastiques et indépendantes – le modèle d'Anderson à 1D est localisé *quelle que soit* la distribution des  $\varepsilon_n$ . Cela implique qu'en présence de désordre toutes les fonctions propres deviennent (exponentiellement) localisées :  $\Psi_i = \exp -|n-n_i|/\zeta$  où  $\zeta$  est la longueur de localisation, qui ne dépend que de l'énergie. Donc  $\log(\Psi_{n+1}/\Psi_n) = \pm\zeta$ .

- b) Normalisez  $V=1$  et définissez  $R_n = \Psi_{n+1}/\Psi_n$ . Démontrez que

$$R_n = E - \varepsilon_n - 1/R_{n-1}$$

Donc  $R_n = f(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \dots)$ .

- c) (D.J. Thouless, *Ill-Condensed Matter*, Les Houches 1979, éditée par R. Balian, R. Maynard, D. Thoulose).

Soit  $\varepsilon_n = \varepsilon E_n$  où  $\varepsilon$  est une variable qui tend vers zéro ; Introduisez  $R_n \equiv A \exp(\varepsilon B_n + \varepsilon C_n + \dots)$ , où  $B_n$  et  $C_n$  sont des variables stochastiques. Supposez que  $\langle \varepsilon_n \rangle = 0$  et que  $\langle \varepsilon_n^2 \rangle = \sigma^2 < \infty$ . Démontrez que la longueur de localisation est donnée par

$$\zeta = 2(4-E^2)/\sigma^2$$

*La localisation est donc la plus efficace aux bords  $E = \pm 2$  du spectre.*

- d) Pourquoi le modèle d'Anderson ne s'applique-t-il pas à la localisation forte photonique ? Qu'en est il dans les matériaux photoniques à bandes interdites ?

**Exercice 2 :** « Le soupçon de Wigner » (*Wigner's surmise*) sur la répulsion des niveaux dans une matrice aléatoire.

Considérez l'hamiltonien à 2 niveaux avec les éléments  $H_{11}$ ,  $H_{12}=H_{21}$  et  $H_{22}$ . Supposez que ces éléments sont des variables stochastiques indépendantes à cause d'un processus gaussien inconnu,

$$P(H_{11}, H_{12}, H_{22}) \sim \exp(-\beta \text{Tr } \mathbf{H}^2)$$

Les deux niveaux d'énergie  $E_{1,2}$  sont donc aléatoires eux aussi. La distribution  $P(H_{11}, H_{12}, H_{22})$  est invariante dans un changement de base.

- a) (**cas délocalisé**) Démontrez que la probabilité de trouver les deux niveaux à une distance  $|E_1 - E_2| = s$  est donnée par,

$$P(s) = \beta s \exp(-\frac{1}{2} \beta s^2)$$

- b) (**cas localisé**) Argumentez que l'invariance dans un changement de base sera brisée en régime localisé. Démontrez que, en absence d'un recouvrement (« overlap ») entre les deux fonctions d'ondes, la probabilité de trouver les deux niveaux à une distance  $|E_1 - E_2| = s$  est donnée par

$$P(s) = \sqrt{(\pi\beta/2)} \exp(-\frac{1}{2}\beta s^2)$$

*Le recouvrement entre les fonctions propres impose la répulsion des niveaux.*

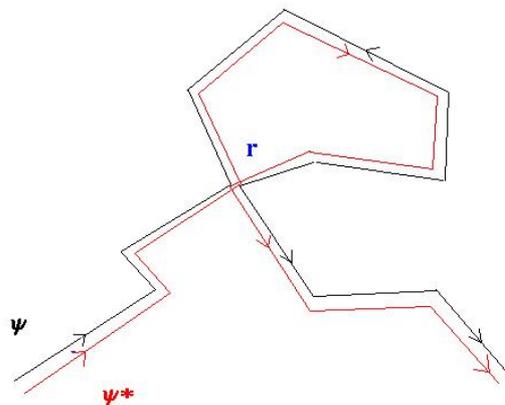
- c) En réalité, il existe beaucoup plus de valeurs propres. Cela modifie la distribution  $P(s)$ . En régime localisé, toutes les valeurs propres fluctuent de façon indépendante. Argumentez que, dans ce cas, le nombre total de valeurs propres dans une bande d'énergie  $\Delta$  est donnée par la distribution de Poisson

$$P(n) = \exp(-\rho s) (\rho s)^n / n!$$

où  $\rho = \langle n(s) \rangle / s$  est la densité d'états, supposée indépendante de  $s$ . La distribution du spectre « libre » ( $n=0$ ) est donc,

$$P(s) = \rho^{-1} \exp(-\rho s)$$

**Exercice 3** : Localisations faible et forte dans un milieu quasi-unidimensionnel.



Contrairement aux particules classiques, les ondes ont la possibilité d'interférer constructivement par voie de deux boucles qui se propagent dans des directions opposées.

- a) Argumentez que le poids de ce genre d'interférence est décrit par la fonction de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t)$ , associée à l'équation de diffusion « incohérente » i.e. sans tenir compte de la phase. Est-ce vrai pour des électrons dans un champ magnétique ?

On pourrait anticiper que ce processus d'interférence supprime la constante de diffusion du milieu. En effet, la théorie microscopique (Vollhardt et Wölfle, Phys. Rev. B **22**, 4666, 1980) montre que

$$D(\mathbf{r})^{-1} = D_0^{-1} + [2\pi^2/v_E \ell \rho(\omega)] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega=0)$$

où  $\ell$  est le libre parcours moyen,  $v_E$  la vitesse de transport, et  $\rho(\omega)$  est la densité d'états par unité de volume (DOS). On a également

$$-\partial_{\mathbf{r}} D(\mathbf{r}) \partial_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

On a donc affaire à un problème *self-consistent*.

- b) Un milieu quasi-unidimensionnel possède une taille transverse petite devant le libre parcours moyen. Argumentez que dans ce cas,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(z, z')/A$ , où  $G(z, z')$  est la fonction de Green de l'équation de diffusion à une dimension, et  $A$  la surface transverse.
- c) Démontrez que  $2\pi^2 v_E \rho(\omega) A = N$ , le nombre de modes transverses (piste : supposez que  $v_E$  est égale à la vitesse de groupe  $d\omega/dk$ ).
- d) Démontrez que, pour un tube infini, la solution du problème self-consistent, à qui l'on ajoute la condition de bord  $G(z=0, z') - x_0 D(z) \partial_z G(z=0, z') = 0$ , est donnée par

$$D(z) = (x_0/\zeta + 1/D_0)^{-1} \exp(-z/\zeta)$$

où  $\zeta = N \ell$  est la longueur de localisation.

*Un milieu quasi-unidimensionnel est donc toujours localisé, avec une longueur de localisation finie mais plus grande que le libre parcours moyen.*

- e) **Etat de l'art 2001.** Supposez que la relation ci-dessus s'applique également à un demi-espace 3D, en régime localisé ( $k\ell < 1$ ). Le profil angulaire de la rétrodiffusion cohérente est donné par  $I(\theta) \sim G(z=\ell, z'=\ell, \mathbf{Q})$  (voir TD 2).

1. Démontrez que les deux solutions  $f_{\pm}(z)$  de l'équation de diffusion homogène (TD 1) obéissent à la relation

$$-\partial_z^2 f_{\pm} + 1/\zeta \partial_z f_{\pm} - Q^2 f_{\pm} = 0$$

2. Démontrez que le profil angulaire est donné par

$$I(\theta) \sim [1 - z_0/2\zeta + z_0 \sqrt{(Q^2 + 1/4\zeta^2)}]^{-1}$$

*Le profil est donc arrondi.*

## Mésoscopie et Décohérence des Photons

TD nr. 4 : Décohérence des Photons

**Exercice 1.** Temps de Ehrenfest d'un objet macroscopique.

- a) Considérez la lune Hypérion de Saturne. Elle a une orbite chaotique avec un temps caractéristique  $\Delta t = 42$  jours. Calculez le temps de Ehrenfest, *i.e.* le temps caractéristique nécessaire pour que la lune devienne un objet quantique. (Masse  $m = 7 \cdot 10^{22}$  kg,  $G = 6.7 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>, distance de Saturne  $R = 120.000$  km ; masse de Saturne  $6 \cdot 10^{26}$  kg).
- b) Si l'on suppose que la décohérence s'effectue par des photons thermiques, le temps de décohérence est donné par

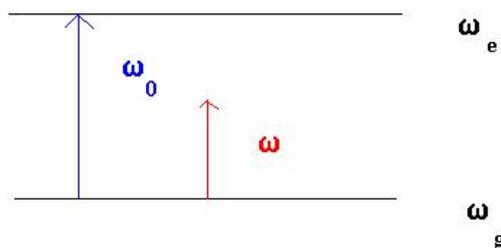
$$T_d = T_2 * \hbar^2 / mkTR^2$$

où  $T_2$  est un temps de dissipation. Montrez que  $T_d = T_2 \cdot 10^{-83}$ . Même si  $T_2$  était égal à l'âge de la terre ( $5 \cdot 10^9$  ans) on trouve  $T_d = 10^{-66}$  sec (En fait, la décohérence induite par des ondes gravitationnelles est supposée beaucoup plus rapide).

**Exercice 2 :** Equations de Bloch Optiques.

Considérez un système quantique à deux niveaux, couplé, par son moment dipolaire  $\mathbf{d}$ , à une seule mode électromagnétique  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t) \cos \omega t$ , qui sera traité classiquement (*i.e.* comme un nombre complexe). Son hamiltonien est donné par

$$H = \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t)$$



- a) La fonction d'onde du système s'écrit:

$$|\Psi\rangle = c_e(t) \exp(-i\omega_g t - i\omega t + 1/2 i \delta t) |e\rangle + c_g(t) \exp(-i\omega_e t + i\omega t - 1/2 i \delta t) |g\rangle$$

où  $\delta = \omega - \omega_0$  est le « detuning » du laser à la résonance  $\omega_0$ . Démontrez que l'équation de Schrödinger se réduit à

$$i\hbar \partial_t (\mathbf{c}_g, \mathbf{c}_e) = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{c}_g, \mathbf{c}_e)$$

avec  $H_{gg} = \frac{1}{2}\hbar\delta$ ,  $H_{ee} = -\frac{1}{2}\hbar\delta$ ,  $H_{ge} = H_{eg}^* = -\frac{1}{2}\hbar\Omega(t) \exp(-i\delta t) [1 + \exp(-2i\omega t)]$ , et où  $\hbar\Omega(t) = \langle g | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0(t) | e \rangle$  définit la fréquence de Rabi. La « *rotating wave approximation* » (RWA) néglige le terme  $\exp(-2i\omega t)$ .

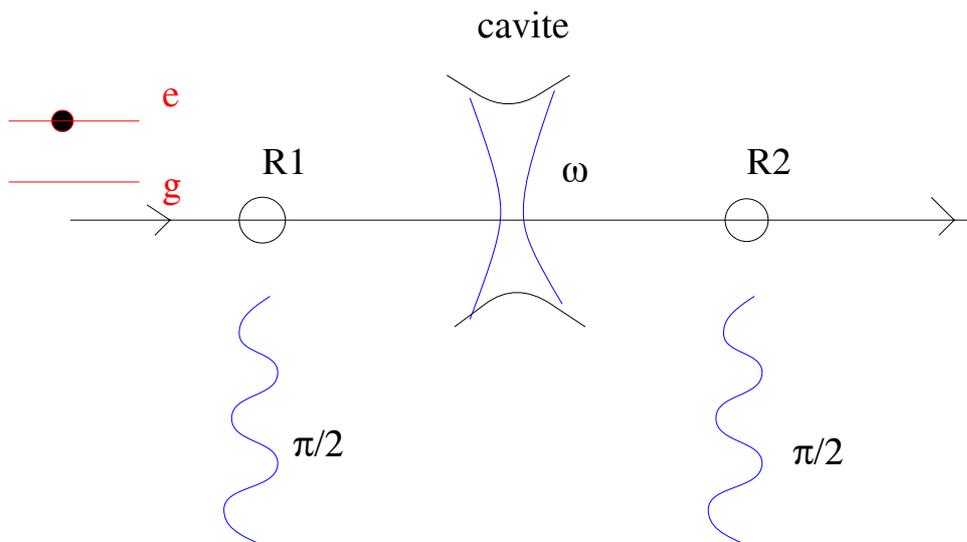
- b) Démontrez que, pour un champ  $\mathbf{E}_0$  constant, la solution est oscillante avec la fréquence  $\Omega_r = \frac{1}{2}\sqrt{|\Omega|^2 + \delta^2}$ . (*Oscillations de Rabi*).
- c) La matrice densité est définie comme  $\rho_{ij} = c_i c_j^*$ . Afin de tenir compte du couplage irréversible avec l'environnement (donc infiniment d'autres modes électromagnétiques), on ajoute à l'équation pour  $c_e(t)$  un terme supplémentaire phénoménologique  $-c_e(t)/T_2$ . Démontrez les *équations de Bloch optiques*

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{22} &= -\partial_t \rho_{11} = \frac{1}{2} i \Omega^* \rho_{12} - \frac{1}{2} i \Omega \rho_{21} - \frac{2}{T_2} \rho_{22} \\ \partial_t \rho_{12} &= -\frac{1}{2} i \delta \rho_{12} - \frac{1}{2} i \Omega [\rho_{22} - \rho_{11}] - \frac{1}{T_1} \rho_{12} \end{aligned}$$

avec  $T_1 = T_2/2$ .

**Exercice 3 :** Franges de Ramsey (M. Brune, S. Haroche, J.M. Raimond et al, Phys. Rev. Lett. **77**, 1996).

Dans les expériences au LKB on envoie un atome à deux niveaux sur une cavité mono-mode de faible perte, occupée par un état cohérent  $|\alpha\rangle$  de micro-onde, dont la fréquence  $\omega$  est largement inférieure à la fréquence de transition  $\omega_0$ . L'atome subit un flash laser  $\int dt \Omega(t) = \pi/2$  ( $R_1$ ) avant d'arriver à la cavité, ainsi qu'à sa sortie de la cavité ( $R_2$ ).



- 1) Montrez que, hors résonance et sans aucune perte dans la cavité, l'évolution temporelle de la fonction d'onde de l'atome (dans le référentiel tournant) est donnée par

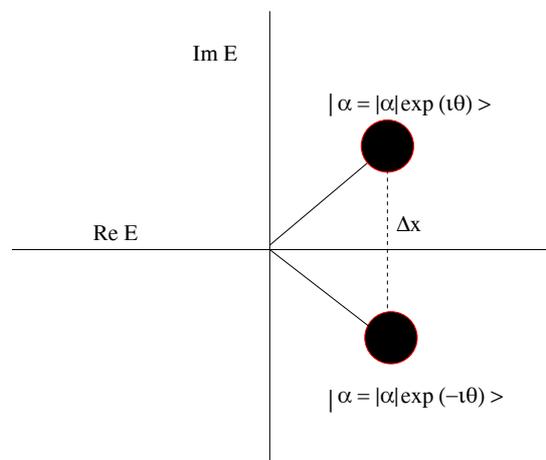
$$|\Psi(t)\rangle \approx \exp(-\frac{1}{2}i\Omega_r t) c_e(0)|e\rangle + \exp(\frac{1}{2}i\Omega_r t) c_g(0) |g\rangle$$

où  $\Omega_r \approx |\delta| + \Omega^2/2|\delta|$  et  $t$  est le temps de séjour dans la cavité.

- 2) La solution purement quantique est  $\Omega_r \approx |\delta| + \Omega_0^2 (n+1)/2|\delta|$  où  $n$  est le nombre de photons dans la cavité, le "+1" provient des fluctuations du vide, et  $\Omega_0$  est la fréquence de Rabi du vide. Trouvez l'effet de la cavité sur l'atome en supposant qu'elle contient un état cohérent (état de Glauber), donné par,

$$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

- 3) Calculez la probabilité de trouver l'atome dans son état excité après R2, et montrez que cette probabilité oscille en fonction du *detuning*  $\omega - \omega_0$  avec une amplitude  $P = \exp[-2\langle n \rangle \sin^2(\Omega_0^2/\delta)]$  (*Franges de Ramsey*).



- 4) **Décohérence photonique.** Lors de l'interaction de l'atome avec la cavité, supposez que l'atome n'interagit pas seulement avec le mode principal occupé par les 2 états cohérents  $|\alpha = |\alpha| \exp(\pm i\theta)\rangle$  (le chat de Schrödinger), mais aussi avec beaucoup d'autres modes de perte  $\beta_i$  qui sont, eux aussi, occupés par des états cohérents  $|\beta_i\rangle$ . Supposez que la perte ne modifie pas la phase de l'état cohérent. Démontrez que les éléments non diagonaux  $\rho_{ge, eg}$  de l'atome décroissent avec le temps caractéristique

$$\tau_d = T_2 / 2n_0 \sin^2 \theta$$

*La décohérence est inversement proportionnelle au carré de la distance  $\Delta x = 2 \sin \theta \sqrt{n_0}$  (voir figure) entre les deux états dans l'espace de Hilbert, et devient beaucoup plus rapide que la dissipation lorsque cette distance augmente.*

**Bart van Tiggelen**

**Août 2001**

*(merci à Alexis d'avoir corrigé mon Français)*