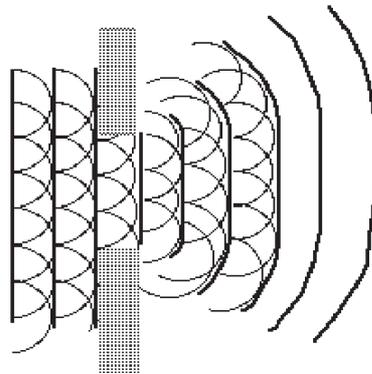


Ondes et Acoustique I

Notes de cours Master 2, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2004-2006



auteur: Bart van Tiggelen, LPMMC-Grenoble

<http://lpm2c.grenoble.cnrs.fr/Themes/tiggelen/courslyon.pdf>

Avant-propos

La vie quotidienne de chacun d'entre nous est remplie d'ondes. Le son et la lumière nous permettent de communiquer. Les ondes sont à notre service. Les micro-ondes ont trouvé une place familière dans nos cuisines et font fonctionner nos téléphones portables. On ne peut plus imaginer un monde sans lasers. Notre compréhension approfondie des rayons X, des ultrasons, et de la lumière infrarouge sert au diagnostic médical, et sauve des vies tous les jours. Des outils comme le radar, le sonar et le lidar, dont le principe est basé sur la physique des ondes, ont augmenté considérablement la capacité de l'homme de "télé-détecter", de prédire la météo, ou de se défendre. Hélas, les ondes interviennent aussi régulièrement de façon destructive. On peut citer les dégâts accomplis par des ondes sismiques émises par un tremblement de terre, les inondations mortelles provoquées par un Tsunami, ou encore l'effet désastreux des rayons ultraviolets sur la peau.

Le concept onde a toujours joué un rôle important en physique. Dans le passé, l'omniprésence des ondes a principalement motivé les scientifiques à comprendre "l'onde", quelle que soit sa nature. Ils ont développé des mathématiques sophistiquées afin de modéliser sa propagation. Les grands travaux de Christiaan Huygens, Sir Isaac Newton, Augustin Jean Fresnel, Lord Rayleigh et James Clerk Maxwell en ont résulté, et font maintenant partie des connaissances obligatoires d'un physicien professionnel. Les astrophysiciens sont obligés de se confier aux ondes électromagnétiques de toutes fréquences pour comprendre les structures et les processus à l'intérieur des étoiles. De même, la structure de la Terre, de la croûte jusqu'au noyau interne, a été déduite en se basant sur les ondes élastiques qui s'y propagent. Mais un niveau sans précédent fut atteint au 20^e siècle. La mécanique quantique nous révéla le comportement ondulatoire de toute matière, des électrons jusqu'aux systèmes macroscopiques. Il y a à peine 10 ans les condensats de Bose-Einstein se sont manifestés comme des ondes "presque banales", bien que non linéaires. Le mystère de la "fonction d'onde de l'Univers", créé par la mécanique quantique, ne sera pas réglé demain, mais la question est posée. Enfin, un de nos plus grands défis scientifiques à ce jour est la détection des ondes gravitationnelles. Elles ont été prédites par la relativité générale mais n'ont jamais été mesurées directement.

Le rôle déterminant que les ondes jouaient, jouent et joueront dans de nombreux domaines en science justifie largement une bonne formation de la jeune génération. Voilà pourquoi Jean-François Pinton et moi ont proposé le cours "Ondes et Acoustiques" en Master 2 à l'École normale supérieure de Lyon depuis 2004. Un grand merci à Vincent Rossetto pour la lecture des notes.

Bart VAN TIGGELEN, Grenoble, novembre 2006

Contents

1	Les Concepts	5
1.1	Définition	5
1.2	Mécanique ondulatoire	6
1.2.1	Équation de Schrödinger sans spin	6
1.2.2	Équation d'onde acoustique	7
1.2.3	Équation de Helmholtz	9
1.2.4	Equation d'onde élastique	12
2	Décomposition spectrale	19
2.1	Signal complexe analytique	20
2.2	Onde quasi-monochromatique	22
2.3	Échantillonnage du signal (<i>sampling</i>)	24
2.4	Moyenne sur les cycles (<i>Cycle averaging</i>)	25
3	Propagation et Dispersion	29
3.1	Vitesse de groupe	31
3.2	Ondes électromagnétiques	32
3.2.1	Absorption et dispersion	33
3.2.2	Milieu diélectrique anisotrope	37
3.3	Ondes élastiques	39
3.4	Ondes de surface	41
3.4.1	Plasmons de surface	41
3.4.2	Ondes de Rayleigh	42
3.4.3	Vagues de gravité	45
3.5	Ondes internes	48
4	Cohérence Ondulatoire	51
4.1	Principe de Huygens et zone de Fresnel	52

4.1.1	Diffraction cohérente par un disque	55
4.2	Corrélation temporelle	58
4.3	Cohérence Spatiale	61
4.4	Détection Hétérodyne	65
5	Diffraction et Diffusion	69
5.1	Fonction de Green	70
5.2	Matrice de diffraction	73
5.2.1	Section efficace	76
5.2.2	Diffraction du son par une bulle	79
5.2.3	Diffraction de la lumière par un oscillateur atomique	80
5.2.4	Radar	82
5.3	Approximation de Born	85
5.4	Milieu hétérogène	87
5.4.1	Théorème de Oseen-Ewald	87
5.4.2	Diffraction quasi-inélastique	90
5.4.3	Diffraction de Brillouin	92
5.4.4	Holographie	95

Chapter 1

Les Concepts

1.1 Définition

Une onde est représentée mathématiquement par un champ complexe $\{\psi_n\}$.

$$\psi_n = A_n \exp(i\phi_n)$$

$A_n \in \mathbb{R}^+$ est appelé amplitude

$\phi_n \in [0, 2\pi]$ est appelé phase

n est une indice d'une composante, souvent appelée "polarisation"

Un champ ondulatoire est une fonction complexe $\psi_n(\mathbf{r}, t)$ qui dépend de l'espace-temps. La mécanique ondulatoire cherche à décrire le comportement de l'onde en espace-temps.

Les observables sont définies comme les propriétés mesurables de l'onde (et donc souvent réelles)

1. Mesure du champ: $\text{Re } \psi$ et $\text{Im } \psi$.

Par exemple: Pour les ondes de De Broglie, la fonction d'onde représente l'amplitude complexe de probabilité. Elle est intrinsèquement complexe, mais rarement accessible directement. Pour les ondes acoustiques, $\text{Re } \psi$ peut être la pression. La partie imaginaire du champ ondulatoire s'obtient en utilisant la transformation de Hilbert (voir le chapitre 2). Le signal complexe analytique est construit selon $\text{Re } \psi + i \text{Im } \psi$.

2. Mesure de l'intensité: $\sum_{nm} \psi_n^* A_{nm} \psi_m$ ($\in \mathbb{R}$ si $A = A^\dagger$).

Par exemple: Selon la mécanique quantique le nombre réel $\langle \psi | A | \psi \rangle$ fournit l'espérance de l'observable A si le système est dans l'état ψ . Pour les ondes électromagnétiques, $\frac{1}{2} E_n \varepsilon_{nm} E_m$ représente la densité de l'énergie électrique de l'onde.

3. Mesure de corrélation: $\int dt \int d\mathbf{r} \psi_n(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{x}, t - \frac{1}{2}\tau) \psi_n(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{x}, t + \frac{1}{2}\tau)$

Cette mesure est omniprésente en matière condensée. La corrélation d'un champ (optique, acoustique, électronique) révèle la structure de la matière.

1.2 Mécanique ondulatoire

La mécanique ondulatoire commence par la formulation d'une équation d'onde, qui décrit le comportement de $\psi(\mathbf{r}, t)$ en espace-temps. Elle est caractérisée, avant tout, par une loi de conservation.

1.2.1 Équation de Schrödinger sans spin

Ce cours ne sera pas un cours de mécanique quantique. Cependant, l'équation de Schrödinger nous servira souvent de référence, puisque c'est l'équation d'onde la plus étudiée. On suppose que $\hbar/m = 1$. L'équation de Schrödinger sans spin (SSS) s'écrit comme

$$i\partial_t \psi = \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right]\psi := H\psi$$

Il en sort

$$\begin{aligned} \partial_t |\psi|^2 &= (\partial_t \psi) \psi^* + \psi \partial_t \psi^* \\ &= -i\psi^* H\psi + i(H\psi)^* \psi \\ &= -i\frac{1}{2}(\nabla^2 \psi) \psi^* + i\frac{1}{2}(\nabla^2 \psi)^* \psi \\ &= -\frac{i}{2} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \end{aligned}$$

On a donc démontré la loi de conservation de probabilité

$$\partial_t |\psi|^2 + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

avec $\mathbf{J} = \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$. La conséquence directe est la conservation de la probabilité. En utilisant le théorème de Gauss,

$$\partial_t \int_V d\mathbf{r} |\psi|^2 = - \oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$$

Dans la littérature on trouve souvent l'argument que loin des interactions, le champ ψ s'annule. Par conséquent, l'intégrale sur le bord à droite s'annule à tous les temps de façon triviale. Cependant, pour une onde incidente venant de loin, c'est à dire plus loin que la surface sur laquelle on effectue le bilan de flux, cette conclusion n'est pas aussi triviale que ça. On verra plus tard (section 5.2.1) que la conclusion est quand-même valable. On conclut que $\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} |\psi|^2$ est conservé.

Remarquons que la densité de courant s'exprime comme un gradient de la phase, $\mathbf{J} = A^2 \nabla \phi$. La "vitesse locale" de l'onde est $\mathbf{v} = \mathbf{J}/|\psi|^2 = \nabla \phi$. La phase apparaît comme un potentiel pour la vitesse locale, comme c'est le cas pour un liquide idéal et isentropique. Si la phase était une fonction continue en espace ("cohérence de phase") on aurait conclu que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Par conséquent, la vorticité s'annulerait partout. La subtilité de cette argumentation c'est que la phase de l'onde n'est définie que *modulo* 2π , et elle n'est même pas définie du tout dans un nœud de la fonction d'onde. Cette constatation est à la base de la quantification de la vorticité dans les superfluides.

1.2.2   quation d'onde acoustique

La propagation d'un pulse acoustique linéaire dans un liquide ou un gaz est gérée par deux équations. La première équation est la 2^e loi de Newton,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \partial_t \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$$

Dans cette équation d'Euler $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}$ est la vitesse de la perturbation, et ρ est la densité de masse locale; $p \in \mathbb{R}$ est la pression (force par unité)

de surface) induite par le passage du signal acoustique. La pression totale est donc $P + p(\mathbf{r}, t)$. Enfin, $\mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ est une densité de force venant d'une source externe. Nous allons considérer des petites fluctuations de vitesses et nous allons donc négliger la deuxième terme nonlinéaire. La deuxième équation établit un lien entre la pression qui est induite par un déplacement *inhomogène* $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Elle est équivalente à la loi de Hooke pour un ressort,

$$p = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$$

avec λ une constante élastique. On s'attend à ce que $p > 0$ pour un changement de volume $\delta V = \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \int d\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{u} < 0$. On a donc $\lambda > 0$.

Exercice 1.1:

1. Argumenter pourquoi la divergence du déplacement intervient dans la loi de Hooke, et non pas le déplacement lui-même.
2. Montrer que la variation de la pression suite au passage de l'onde obéit à l'équation "scalaire" suivante,

$$\partial_t^2 p - \lambda \nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla p = \lambda \nabla \cdot (\mathbf{f}_{\text{ext}}/\rho)$$

3. Argumenter que la vitesse du son est donnée par la formule $c \equiv \sqrt{\lambda/\rho}$. Démontrer à partir de la loi de Hooke que

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

et argumenter pourquoi la dérivée est évaluée à constante entropie.

4. Dans l'air, la pression obéit à la loi adiabatique $P \sim \rho^\gamma$, Démontrer que $\lambda = \gamma P$ et $c = \sqrt{\gamma P/\rho} = \sqrt{\gamma kT/M}$ (avec M la masse moyenne des particules).

Pour $P = 1$ atmosphère, $\gamma \approx 1,43$ et $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$ on trouve dans l'air $c = 328 \text{ m/s}$. Dans l'eau, la constante élastique de compression $\lambda = 2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ et $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, ce qui donne une vitesse $c_l = 1483 \text{ m/s}$. En utilisant l'Exercice 1.1 on montre facilement que $p/\lambda = \delta\rho/\rho$. Pour l'eau $\lambda \approx 10^4 P$ et les fluctuations de densité sont beaucoup plus petites que les fluctuations de pression. L'eau peut donc être considérée comme "assez" incompressible. Dans un langage optique, l'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air est de $m = 4.5$, beaucoup plus élevée par rapport à ce que l'on trouve typiquement en optique!

Exercice 1.2

1. Démontrer que le déplacement \mathbf{u} satisfait l'équation d'onde suivante,

$$\partial_t^2 \mathbf{u} - \frac{\lambda}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\mathbf{f}_{\text{ext}}}{\rho}$$

2. Démontrer, qu'en absence de source, la loi de conservation d'énergie est respectée,

$$\partial_t \mathcal{E} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

avec la densité d'énergie acoustique $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2$ et la densité de courant $\mathbf{J} = \mathbf{v}p$.

3. Démontrer que la pression obéit également à une loi de conservation, avec $\tilde{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} c^{-2} (\partial_t p)^2 + \frac{1}{2} (\nabla p)^2$ et $\tilde{\mathbf{J}} = -\partial_t p \nabla p$.

1.2.3 Équation de Helmholtz

Les ondes électromagnétiques classiques sont décrites par les quatre équations de Maxwell. Plusieurs conventions d'unités existent dont le standard *Gaussian* et le standard *MKSA rationalisé* sont les plus utilisés. Le dernier a l'avantage d'utiliser les unités de SI (*Système International*: mètre, seconde, kilogramme, supplémenté par l'ampère). Dans ce cas, les constantes ϵ_0 et μ_0 du vide apparaissent dans les équations ce qui n'est pas pratique pour la description des ondes électromagnétiques, pour lesquelles la seule constante d'importance est la vitesse de la lumière c . Pour cette raison on a choisi ici le standard *Gaussien* (voir le livre de Jackson *Classical Electrodynamics* pour connaître les transformations entre les différents standards). En présence de charges (densité de charge ρ_q et densité de courant \mathbf{J}_q), elles s'écrivent comme,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0} \partial_t \mathbf{B} &= -\nabla \times \mathbf{E} && \text{.....loi d'induction de Faraday} \\ \partial_t \mathbf{D} + 4\pi \mathbf{J}_q &= c_0 \nabla \times \mathbf{H} && \text{.....loi d'Ampère} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho_q && \text{.....loi de Gauss} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{.....loi de Thomson} \end{aligned}$$

Le champ électrique \mathbf{E} et l'induction magnétique \mathbf{B} sont les champs fondamentaux. Dans un milieu "macroscopique", le vecteur de déplacement \mathbf{D} et le champ magnétique \mathbf{H} auront des contributions dues aux polarisations (\mathbf{P}) et aux magnétisations (\mathbf{M}) induites. On écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \end{aligned}$$

Les deux champs macroscopiques \mathbf{P} et \mathbf{M} sont souvent proportionnels “linéairement” aux champs microscopiques. Les équations constitutives font appel à la perméabilité magnétique μ et la perméabilité diélectrique ε , tous les deux en principe tenseur d’ordre deux.

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= \mu(\mathbf{r})^{-1} \cdot \mathbf{B}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Exercice 1.3 Démontrer que le champ magnétique est un pseudo-vecteur, qui se transforme de façon paire sous parité ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) et de façon impaire sous renversement temporel ($t \rightarrow -t$). Une force proportionnelle à \mathbf{B} ou \mathbf{E} est-elle permise par les équations de Maxwell? Et une force proportionnelle à $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$?

Souvent, et surtout pour les hautes fréquences en optique, $\mu \approx 1$. En absence de charges libres ($\rho_q = 0$, et $\mathbf{J}_q = 0$) on peut donc écrire

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c_0} \nabla \times \partial_t \mathbf{H} = \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \mathbf{D} = \frac{1}{c_0^2} \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \partial_t^2 \mathbf{E}$$

avec la conclusion que,

$$\frac{1}{c_0^2} \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \partial_t^2 \mathbf{E} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

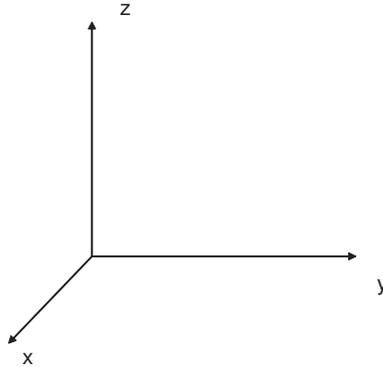
Cette équation est connue sous le nom de *d’équation de Helmholtz* (ou équation d’Alembert).

Intermezzo : tenseur de Lévi-Civita.

Le tenseur de Lévi-Civita est défini par le produit vectoriel de deux vecteurs en trois dimensions.

$$(a \times b)_i \equiv \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

Dans le référentiel “direct” ci-dessous on a $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$. Par conséquent, $\epsilon_{zxy} = 1$, $\epsilon_{zyx} = -1$ et $\epsilon_{xyz} = 1$, avec les autres composantes autres que les permutations de xyz égales à zéro. Le produit vectoriel montre que ϵ_{ijk} se comporte comme un vrai tenseur de l’ordre 3 sous changement de base. De plus il est le seul tenseur isotrope d’ordre trois, c’est à dire

Figure 1.1: Un référentiel xyz direct

sans avoir une préférence d'orientation. Il est purement antisymétrique sous permutation de deux indices.

Exercice 1.4 En observant que le tenseur ε_{ijk} est anti-symétrique et isotrope, démontrer la relation de contraction

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Démontrer que l'équation de Helmholtz s'écrit comme

$$\varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \partial_t^2 \mathbf{E} + \mathbf{p}^2 \mathbf{E} - \mathbf{p}\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = 0$$

avec $\mathbf{p} = -i\nabla$.

En utilisant le tenseur de Lévi-Civita on peut écrire $(\nabla \times \mathbf{H})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j H_k$. On trouve donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} &= E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j H_k \\ &= -\varepsilon_{jik} E_i \partial_j H_k \\ &= -\varepsilon_{jik} \{ \partial_j (E_i H_k) - (\partial_j E_i) H_k \} \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Exercice 1.5 On introduit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{8\pi} \mathbf{B} \cdot \mu^{-1}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}$$

Démontrer $4\pi\partial_t \mathcal{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$.

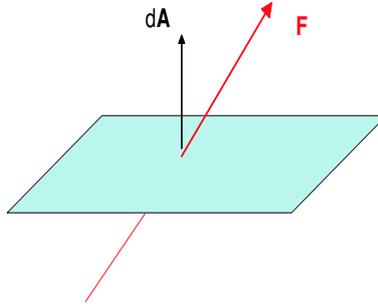
Les deux résultats dessus nous mènent donc à la loi de conservation suivante,

$$\partial_t \mathcal{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

On identifie \mathcal{E} comme la densité d'énergie électromagnétique, et le vecteur Poynting $\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi$ comme la densité de flux électromagnétique.

1.2.4 Equation d'onde élastique

Les ondes élastiques sont des ondes de déplacement - comme les ondes acoustiques - qui se propagent dans un solide. Les déplacements dits élastiques sont gerés par des force internes. Dans une solide la force interne n'est pas nécessairement isotrope comme on a vu pour les ondes acoustiques. La loi de Hooke - qui établit le lien entre les forces appliquées et les déformations qui en résultent - aura deux contributions, puisque deux types de déformations peuvent être identifiées: la compression (avec changement de volume) et le cisaillement (à volume constant).



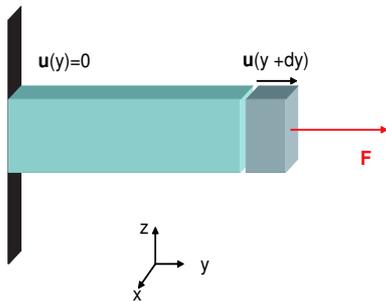
Soit $d\mathbf{A}$ une surface infinitésimale quelque part dans le solide avec une orientation quelconque. Par convention sa direction est déterminée par le vecteur normal de la surface ¹. En général, une force interne $d\mathbf{F}$ est exercée sur la surface $d\mathbf{A}$. On s'attend à ce que cette force soit proportionnelle à la surface dA .

¹Plus précisément, le vecteur normal d'une surface est orienté dans la direction impliquée par le mouvement d'un tire-bouchon dans le sens des aiguilles d'une montre le long du bord de dA

Définition: Le tenseur de contrainte (“*stress tensor*” en anglais) est défini par la relation,

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{A}$$

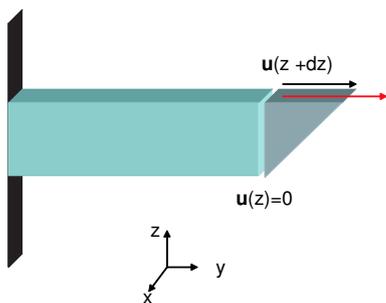
ou bien en notation tensorielle $dF_i = \tau_{ij} dA_j$.



La force accompagnée d’une dilatation dans la direction y est donnée par la relation $dF_y = K_1 \partial_y u_y dx dz = K_1 \partial_y u_y dA_y$. De même pour les dilatations dans les deux autres directions. L’*isotropie* du milieu impose la même constante élastique pour les trois directions. Les dilatations sont donc décrites par la loi de Hooke suivante

$$\tau_{ij} = K_1 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}$$

Exercice 1.6 : Démontrer que chaque déformation avec $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ conserve le volume.

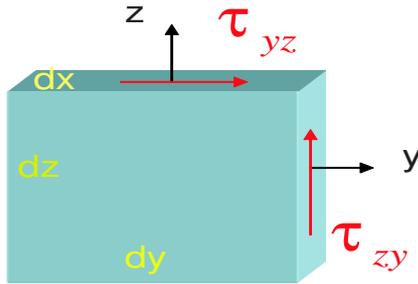


Considérons maintenant les déformations de cisaillement. La loi de Hooke que l’on peut écrire pour cette déformation prend la forme $dF_y = K_2 (\partial_z u_y) dx dy =$

$K_2(\partial_z u_y)dA_z$ et donc $\tau_{yz} = K_2\partial_z u_y$. Pour les autres composantes on fait appel au théorème suivant

Théorème: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

La démonstration commence par l'observation que le couple de force doit s'annuler pour qu'un volume infinitésimal $dx dy dz$ ne soit pas en rotation.



La composante z du couple $\sum_i \mathbf{r}_i \times d\mathbf{F}_i$ est égale à $\frac{1}{2}dz \times \tau_{yz}dxdy - \frac{1}{2}dy \times \tau_{zy}dxdz$. On conclut $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ \square .

On propose la loi de Hooke suivante pour le cisaillement dans un milieu isotrope

$$\tau_{ij} = K_2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

pour $i \neq j$. En général, on peut écrire,

$$\tau_{ij} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} + \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

Exercice 1.7

1. Démontrer que dans une expérience de compression on mesure $K_1 = \lambda + 2\mu$ et dans une expérience de cisaillement on mesure $K_2 = \mu$.
2. En appliquant une déformation parfaitement homogène (c'est à dire le tenseur des déformations est proportionnel à l'identité) on mesure la compressibilité $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$.

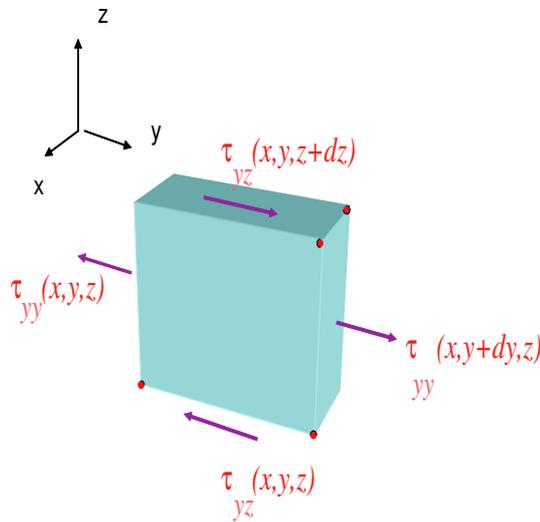
Il est donc difficile de mesurer λ directement.

Pour un gaz ou un liquide la constante élastique de cisaillement μ s'annule et la contrainte est isotrope, égale à $-P$. Dans un solide on pourrait aller

encore plus loin en imposant que chaque déformation soit accompagnée par la même force. Cela nous conduit à $\mu = \lambda$. Cette égalité est approximativement respectée dans la croûte terrestre.

Ce qui manque encore est l'équation d'onde élastique. On doit discriminer entre les forces internes et les forces externes. Comme pour les ondes acoustiques on l'obtient à partir de la deuxième loi de Newton, appliquée à un volume $dx dy dz$, selon laquelle

$$dm \partial_t^2 \mathbf{u}_i = \sum_i d\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) dV$$



Pour la composante y la somme de toutes les forces interne est égale à

$$\begin{aligned} \sum_i dF_{i,y} &= [\tau_{yy}(y + dy) - \tau_{yy}(y)] dx dz + [\tau_{yz}(z + dz) - \tau_{yz}(z)] dy dx \\ &\quad + [\tau_{yx}(x + dx) - \tau_{yx}(x)] dy dz = dx dy dz \partial_j \tau_{yj} \end{aligned}$$

Puisque la masse du volume est donnée par $dm = \rho dx dy dz$ on arrive à l'équation pilote,

$$\rho \partial_t^2 u_i = \partial_j \tau_{ij}$$

En utilisant la loi de Hooke pour la contrainte on obtient,

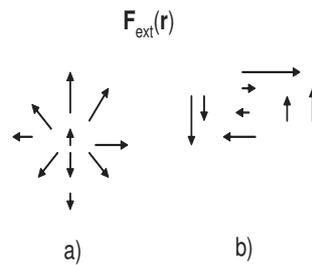
$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$$

En Chapitre 3 on parlera de la vitesse et de la polarisation des ondes élastiques.

Exercice 1.8 Démontrer la validité de cette équation d'onde élastique en supposant que les constantes élastiques sont homogènes en espace.

Exercice 1.9: Montrer pourquoi à une surface libre les trois composantes de la contrainte normale τ_{in} ($i = x, y, z$ and n la direction du vecteur normal de la surface) s'annulent. Formuler la condition de bord si le solide élastique est bornée par une couche d'air avec la pression P .

Est-t-il possible de décrire les tremblements de terre par l'équation d'élasticité ci-dessus? Ç'a été une question importante posée par les sismologues au vingtième siècle. On comprend maintenant que les ondes émises par les catastrophes naturelles obéissent parfaitement à cette équation. Par contre, la théorie continue d'élasticité ne s'applique pas à la source. Les tremblements de terre ont été identifiés comme des dislocations: sur la "faille" le déplacement \mathbf{u} est en fait *discontinu*. Mais les sismologues ont pu démontrer un théorème fondamental, appelé le *théorème d'équivalence*. Ce théorème montre que la source de dislocation est *équivalente* à une force externe de volume $\mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ à la condition que les lois de conservation de la quantité de mouvement et de la quantité de mouvement angulaire soient respectées.



Exercice 1.10: Les tremblements de terre et les éruptions volcaniques sont des événements avec des dimensions bien inférieures à la longueur d'onde des ondes sismiques (de l'ordre de

quelques kilomètres). Il est donc logique des les modéliser comme des sources ponctuelles. On propose pour une source ponctuelle le développement

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_0(t)\delta(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(t) \cdot \nabla\delta(\mathbf{r}) + \dots$$

On appelle \mathbf{M} le tenseur sismique. Contrairement aux éruptions volcaniques, les tremblements de terre et les explosions nucléaires sont isolés.

1. Montrer pourquoi la force de volume “monopolaire” $\mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_0(t)\delta(\mathbf{r})$ est une bonne description d’une éruption volcanique, mais ne peut pas servir pour modéliser un tremblement de terre ou une explosion nucléaire.
2. Démontrer que le couple total est donné par $G_i = \epsilon_{ijk}M_{kj}$. Dessiner les forces associées au couple présenté par l’élément M_{xy} du tenseur sismique.
3. Argumenter que $M_{ij} = M\delta_{ij}$ pour une explosion isotrope, le cas (a) dessus, alors que $M_{ij} = M_{ji}$ ($i \neq j$) et $M_{ii} = 0$ pour un tremblement de terre, le cas (b) dessus.

Chapter 2

Décomposition spectrale

La solution d'une équation d'onde est une fonction du temps t . Selon le théorème de Fourier il est possible de décomposer le signal temporel $\psi(t)$ en modes harmoniques avec une pulsation ω ,

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \psi(\omega) \exp(-i\omega t)$$

On parle de la décomposition spectrale du signal. Sauf exception, on ne fera plus la différence entre la pulsation ω et la fréquence $f = \omega/2\pi$. La décomposition est très utile puisque les différentes fréquences revèlent souvent une physique différente. On insiste sur le signe de moins dans l'exposant qui est une convention de nous et qui n'est pas suivie dans tous les livres. Considérons l'équation scalaire comme elle a été introduite dans le chapitre 1. Une hétérogénéité est caractérisée par une vitesse locale du son $c(\mathbf{r})$ qui est différente de celle de son environnement c_0 . En insérant la décomposition spectrale on obtient,

$$\frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} \psi(\omega) + \nabla^2 \psi(\omega) = 0$$

On peut réécrire cette équation comme,

$$[\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}, \omega)] \psi(\omega) = E(\omega) \psi(\omega)$$

avec l'opérateur $\mathbf{p} = -i\nabla$. Cette équation ressemble beaucoup à une équation de Schrödinger à énergie constante, c'est à dire en insérant $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-iEt)$. Cette équation a été beaucoup étudiée en mécanique quantique et l'analogie

peut donc être utile. Cependant, l'analogie n'est pas parfaite. Le "potentiel" $V(\mathbf{r}, \omega) \equiv [1/c_0^2 - 1/c^2(\mathbf{r})]\omega^2$ dépend de la fréquence, ainsi que "l'énergie" $E(\omega) = \omega^2/c_0^2$.

2.1 Signal complexe analytique

Pour une onde "classique" le champ $\psi(t)$ est forcément réel. Il n'est donc pas évident que l'on puisse l'écrire comme $A \exp(i\varphi)$ comme il a été indiqué dans la définition même de l'onde en chapitre 1. Pour un champ réel on trouve facilement la relation $\psi(-\omega) = \psi(\omega)^*$ pour les composantes de Fourier, et les fréquences négatives fournissent donc la même information que les fréquences positives. On pourrait proposer de jeter les fréquences négatives en définissant le champ suivant,

$$\phi(t) = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \psi(\omega) \exp(-i\omega t)$$

Remarquons d'abord que $\phi(t) \in \mathbb{C}$ et que $\text{Re } \phi(t) = \psi(t)$. Puisque les fréquences négatives ont disparu, le signal $\phi(t)$ est *analytique* pour tous les temps complexes ayant $\text{Im } t < 0$. En plus, le signal décroît rapidement pour $\text{Im } t \rightarrow -\infty$. Voilà pourquoi on appelle $\phi(t)$ le *signal complexe analytique*.

L'analyticité de $\phi(t)$ implique une propriété importante:

$$\text{Im} \phi(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\psi(t')}{t' - t}$$

L'opération effectuée dans cette équation est appelée *transformation de Hilbert*. Elle est souvent notée comme $\mathcal{H}\psi$. Comme la transformation de Fourier, elle est disponible dans la plupart de logiciels de traitement de signal, souvent en temps réel, comme par exemple dans MatLab[®]. L'intégrale diverge normalement à $t' = t$, mais le symbole \mathcal{P} indique que sa valeur principale est impliquée. Pour une singularité en b , la valeur principale est définie par

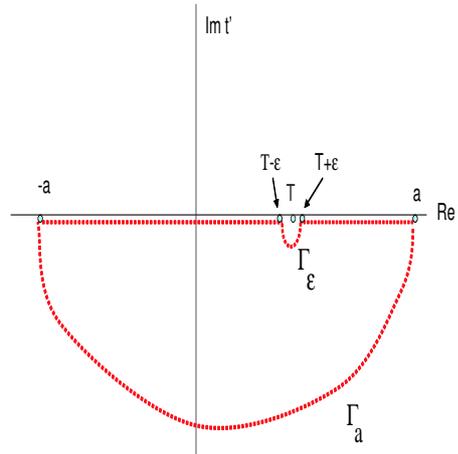
$$\mathcal{P} \int_a^c dx f(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_a^{b-\epsilon} dx f(x) + \int_{b+\epsilon}^c dx f(x) \right]$$

Exercice 2.1 Démontrer, pour $a > 0$

$$\mathcal{P} \int_0^a dx \frac{1}{x-1} = \log a$$

$$\mathcal{P} \int_{-a}^a dx \frac{1}{x} = 0$$

Démonstration de la transformation de Hilbert:



Prenons $\omega > 0$. On calcule l'intégrale

$$\int_{-a}^a dt' \frac{\phi(t')}{t' - t}$$

en se promenant dans le plan complexe avec $\text{Im } t' < 0$ comme il a été indiqué dans la figure ci-dessus. On prend la limite $\epsilon \downarrow 0$ et $a \rightarrow \infty$ après. Puisque $\phi(t)$ est analytique et borné partout en bas, l'application du théorème de Cauchy nous donne,

$$0 = \mathcal{P} \int_{-a}^a dt' \frac{\phi(t')}{t' - t} + \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\phi(t')}{t' - t} + \int_{\Gamma_a} \frac{\phi(t')}{t' - t}$$

L'intégrale sur Γ_a tend vers zéro rapidement lorsque $a \rightarrow \infty$ puisque $\psi(ia)$ tend vers zéro plus vite que $1/a$. En substituant $t' = t + \epsilon \exp(i\theta)$ ($-\pi < \theta < 0$), le deuxième intégrale tend vers $i\pi\phi(t)$ lorsque $\epsilon \downarrow 0$. On a donc,

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\phi(t')}{t' - t} = -i\pi\phi(t)$$

Puisque $\text{Re } \phi(t) = \psi(t)$ la partie réelle de cette équation nous mène à la transformation de Hilbert dessus.

□

Exercice 2.2 Démontrer avec $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}[\exp(-i\omega t)] = i\pi\theta(\omega)\exp(-i\omega t)$$

avec $\theta(x) \equiv (x/|x|)$ (et 0 pour $x = 0$) la fonction de Heavyside. Démontrer en suite, en utilisant la décomposition spectrale de $\phi(t)$, que

$$\mathcal{H}\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} i\pi\theta(\omega)\exp(-i\omega t)\psi(\omega)$$

Exercice 2.3 Démontrer que le signal analytique complexe associé à $\cos(\omega t)$ est égale à $\exp(-i\omega t)$.

La conclusion c'est que la transformation de Hilbert se calcule en utilisant la transformation de Fourier \mathcal{TF} et son inverse \mathcal{TF}^{-1} selon la procédure

$$\mathcal{H} = (\mathcal{TF}) i\pi\theta(\omega) (\mathcal{TF}^{-1})$$

Exercice 2.4

1. Démontrer que le signal complexe analytique $\phi(\mathbf{r}, t)$ obéit à la même équation d'onde que le signal physique $\psi(\mathbf{r}, t)$.
2. Démontrer que la loi de conservation d'énergie (voir Exercice 1.2) pour le signal acoustique complexe s'exprime comme

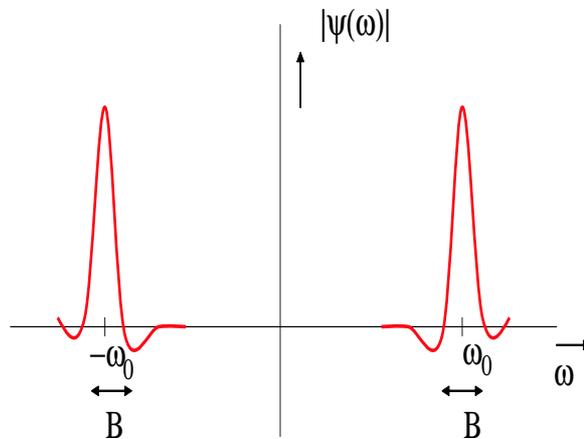
$$\partial_t \mathcal{E} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

avec la densité d'énergie acoustique $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2$ et la densité de courant $\mathbf{J} = \text{Re } \mathbf{v}^* p$.

2.2 Onde quasi-monochromatique

Pour un champ réel il est impossible de définir une phase et une amplitude de façon unique selon la relation $\psi(t) = A(t) \cos \varphi(t)$. Par contre, une fois que le signal complexe analytique est disponible, l'amplitude $A > 0$ et la phase $0 < \varphi < 2\pi$ seront fixées *uniquement*. Dans cette section nous allons nous intéresser à un paquet d'onde centré autour de la fréquence ω_0 , appelé onde quasi-monochromatique. On démontre que la phase du signal complexe

contient une variation très rapide accompagnée d'une variation "lente" qui peut servir pour transmettre des informations. C'est un cas très important dans la vie quotidienne. Par exemple les micro-ondes avec des fréquences de 1 GHz font fonctionner nos téléphones portables, alors que les fréquences typiques de nos voix (< 20 kHz) sont beaucoup plus lentes. De même pour le signal (100 MHz) qui fournit le signal vidéo de la télévision, alors que le taux d'échantillonnage de la télé (la fréquence avec laquelle les images se succèdent, autour de 1 kHz) est plus lente.



Considérons la figure dessous. La décomposition spectrale consiste en deux pics décrite par la fonction $F(\omega \pm \omega_0)$. On va supposer que $B \ll \omega_0$. On souhaite écrire pour le signal complexe analytique, $\phi(t) = A(t) \exp(i\varphi(t) - i\omega_0 t)$, avec la phase $\varphi(t)$ et l'amplitude $A(t)$ indépendantes de ω_0 . Est-ce possible, et quelle sera la variation de $A(t)$ et $\phi(t)$? Selon la définition on écrit,

$$\begin{aligned}
 A(t) \exp(i\varphi(t) - i\omega_0 t) &= 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \psi(\omega) \exp(-i\omega t) \\
 &= 2 \exp(-i\omega_0 t) \int_{-\omega_0}^\infty \frac{d\Delta}{2\pi} \psi(\Delta + \omega_0) \exp(-i\Delta t) \\
 &\approx 2 \exp(-i\omega_0 t) \int_{-\infty}^\infty \frac{d\Delta}{2\pi} F(\Delta) \exp(-i\Delta t)
 \end{aligned}$$

On en conclut que

$$A(t) \exp(i\varphi(t)) = 2\mathcal{TF}[F(\omega)]$$

Cette relation est effectivement indépendante de ω_0 . Elle montre que la variation de $\varphi(t)$ et $A(t)$ s'effectue typiquement avec la fréquence B , l'élargissement spectral de la décomposition F autour de la fréquence centrale. Il est donc possible de transporter l'onde à la fréquence ω_0 , et en calculant le signal complexe analytique, de remonter à la fonction lente (*slowly varying* en anglais) qui contient l'information désirée. Voilà l'essentiel de la communication ondulatoire. Par exemple, le GSM transmet l'information par voie de phase $\varphi(t)$. Pour la radio AM (*amplitude modulation*), c'est $A(t)$.

2.3 Échantillonnage du signal (*sampling*)

En réalité on mesure l'enveloppe du signal $A(t) \exp(i\varphi(t))$ à des temps discrets. Quel taux faut-il mesurer pour que l'on ne se trompe pas?

Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon (*Sampling theorem*)

Pour un signal $f(t)$ avec une décomposition spectrale $F(\omega)$ qui s'annule pour $|\omega| > B/2$ il suffit de échantillonner aux temps $t_n = 2\pi n/B$ enfin de remonter au signal.

Démonstration

La démonstration fait appel à un théorème de Fourier pour les séries discrètes: chaque fonction continue définie sur l'intervalle $[-B/2, B/2]$ est *uniquement* représentée par une série $F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(2\pi i n \omega / B)$. Selon la transformation de Fourier on a

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \exp(-i\omega t) = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \exp(-i\omega t)$$

puisque $F(\omega) = 0$ pour $|\omega| > B/2$. Pour un échantillonnage aux temps $2\pi n/B$ on trouve,

$$f(2\pi n/B) = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \exp(-2\pi i \omega n / B) = F_n$$

Parce que l'échantillonnage nous fournit les coefficients de Fourier F_n , le théorème est établi \square .

Exercice 2.5 Démontrer que la fonction $f(t)$ est obtenue à partir de son échantillonnage selon la formule

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2\pi n}{B}\right) \operatorname{sinc}\left(t - \frac{2\pi n}{B}\right)$$

Le théorème implique qu'un échantillonnage tous les T_0 est équivalent à un filtre basses fréquences $f = \omega/2\pi < 1/2T_0$.

Exercice 2.6 En utilisant le principe d'incertitude de la transformation de Fourier, montrer qu'un échantillonnage au temps $T_0, 3T_0, \dots, nT_0$ nous limite à une résolution spectrale $\Delta f > 1/nT_0$.

Exemple: Notre oreille perçoit les sons environ jusqu'à 20 kHz. On exige d'un générateur du son "parfait" donc une fréquence d'échantillonnage qui est au moins de l'ordre de 40 kHz pour obtenir une qualité satisfaisante. Un téléphone échantillonne à 8 kHz. Une radio échantillonne à 22 kHz. La qualité CD est obtenue en utilisant l'échantillonnage de 44 kHz. Les mesures $f(2\pi n/B)$ sont stockées numériquement en bits.

2.4 Moyenne sur les cycles (*Cycle averaging*)

Pour un signal quasi-monochromatique les cycles vont beaucoup plus vite que la variation du signal contenant l'information. On ne s'intéresse souvent même pas aux cycles, puisque c'est $A \exp(i\varphi)$ qui contient l'information désirée. En plus, les détecteurs ne sont pas capables de suivre les oscillations rapides, et ne sont sensibles qu'au flux moyen dans une fenêtre temporelle beaucoup plus large devant le temps caractéristique $T = 2\pi/\omega_0$ d'un cycle. Il est donc logique d'effectuer une moyenne sur un cycle, en supposant que le signal $A(t) \exp[i\varphi(t)]$ varie très peu.

Considérons $\psi(t)^2$. On trouve facilement

$$\begin{aligned} \langle \psi(t)^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \psi(t)^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt A(t)^2 \cos[\varphi(t) - \omega_0 t]^2 \\ &\approx \frac{1}{2} A(t)^2 = \frac{1}{2} |\phi(t)|^2 \end{aligned}$$

On a déjà vu (Exercice 2.5) que la densité d'énergie d'un signal acoustique complexe est donnée par $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2$. On peut maintenant conclure que cette quantité est interprétée comme deux fois la densité d'énergie $\langle \mathcal{E}(t) \rangle$, moyennée sur un cycle. Pour une onde quasi-monochromatique, on trouve

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \frac{1}{4}\omega_0^2\rho|\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{4}\lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2$$

Théorème d'équipartition: Pour un champ acoustique quasi-monochromatique et en absence d'absorption, les énergies cinétique et potentielle, moyennées sur les cycles, sont égales: $\langle E_{\text{cin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle$

Démonstration

Les densités d'énergie du signal complexe analytique sont données par $\mathcal{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ et $\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2$. On a la relation

$$\frac{1}{2}\lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 = \text{Re} \frac{\lambda}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}^* \nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\lambda}{4} [\mathbf{u}^* \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^*)]$$

En insérant l'équation d'onde pour le déplacement, on trouve

$$\mathcal{E}_{\text{cin}} - \mathcal{E}_{\text{pot}} = -\text{Re} \nabla \cdot \frac{\lambda}{2} (\mathbf{u}^* \nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{4}\rho [\mathbf{u}^* \cdot \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{v}^*]$$

ce qui se simplifie à

$$\mathcal{E}_{\text{cin}} - \mathcal{E}_{\text{pot}} = -\text{Re} \nabla \cdot \frac{\lambda}{2} (\mathbf{u}^* \nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{4}\rho \partial_t^2 |\mathbf{u}|^2$$

Le deuxième terme est négligeable pour une onde quasi-monochromatique. Plus précisément, il s'annule pour une onde monochromatique $\exp(-i\omega_0 t)$ et il est un facteur B^2/ω_0^2 plus faible que la densité d'énergie cinétique $\rho\omega_0^2|\mathbf{u}|^2$, moyennée sur les cycles. Une application du théorème de Gauss nous mène à

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle - \langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{\lambda}{4} \text{Re} \oint d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}^* \nabla \cdot \mathbf{u})$$

La partie *imaginaire* de cet intégrale de surface fournit le flux sortant qui est constante quelque soit la surface. La partie réelle décroît encore plus vite

(typiquement $\mathbf{u} \sim \hat{\mathbf{r}} \exp(i\omega r/c_0)/r$ donc la partie réelle décroît comme $1/r^3$ alors que la partie imaginaire varie comme $1/r^2$). L'intégrale tend donc vers zéro lorsque le volume tend vers l'infini \square .

Le théorème d'équipartition se généralise facilement pour les ondes électromagnétiques. On peut ainsi démontrer que l'énergie électrique est égale à l'énergie magnétique. Notons que le théorème ne se prononce que sur l'énergie *totale*. Rien n'a été établi pour l'énergie locale.

Chapter 3

Propagation et Dispersion

Dans un milieu homogène, les paramètres qui gèrent la propagation des ondes sont constantes en espace. Par conséquent les solutions sont décrites par les *ondes planes*, dont le signal complexe est proportionnel à $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. Les ondes sont appelées “planes” car les surfaces à phase constante sont planes, avec comme vecteur normal le *vecteur d’onde* \mathbf{k} . La longueur d’une onde plane est $\lambda = 2\pi/k$.

Pour les ondes acoustiques on suppose que la densité de masse et la constante élastique sont constantes. Alors, l’équation d’onde pour la composante de Fourier $p(\omega)$ se réduit à

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) p(\omega) = 0$$

Cette équation impose une relation entre la fréquence et le vecteur d’onde: $|\omega|/c = k$. On parle de la *loi de dispersion*. En vue de la discussion du chapitre 2 on “oublie” les fréquences négatives en considérant le signal complexe analytique. Pour ce cas simple la loi de dispersion est isotrope, c’est à dire elle est pareille pour toutes les directions de \mathbf{k} . Pour les ondes acoustiques la vitesse c dépend en général très peu de la fréquence. Dans ce cas la décomposition de Fourier pour une solution arbitraire de l’équation d’onde prend la forme simple

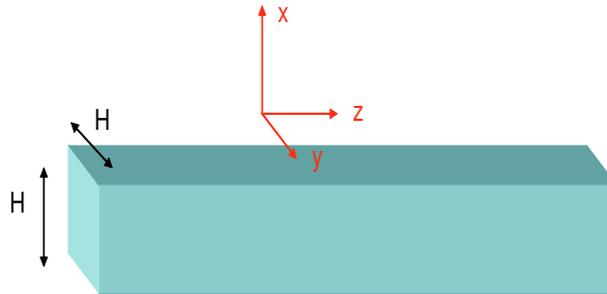
$$p(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} p(\mathbf{k}) \exp[-ikct + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$$

avec $p(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$. Si $p(\mathbf{k})$ est centré autour de \mathbf{k}_0 , le paquet d’onde est

quasi-monochromatique et se déplace à la vitesse c dans la direction de \mathbf{k}_0 . On verra dans la section suivante que cette conclusion n'est pas valable en général.

Exercice 3.1 Guide d'onde

Considérer un guide d'onde infini $0 < x, y < H$ dans lequel des ondes acoustiques se propagent avec la vitesse locale c . Sur les bords on impose que le déplacement normal u_n s'annule.



1. Démontrer que sur les bords la dérivée normale de la pression $\partial_n p$ s'annule.
2. Démontrer que les solutions à la fréquence ω sont

$$p_{nm}(x, y, z) = \exp(-i\omega_{nm}t) \exp(\pm ikz) \cos(n\pi x/H) \cos(m\pi y/H)$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$. Déterminer et dessiner la loi de dispersion $\omega_{nm}(k)$.

3. La solution dessus peut servir pour comprendre la propagation des ondes électromagnétiques dans un tunnel, en négligeant la polarisation. Argumenter que la solution avec $n = m = 0$ est exclue pour les ondes électromagnétiques. et démontrer qu'aucune fréquence $f < c/2H$ ne se propage dans le guide d'onde.
4. Calculer la fréquence de coupure pour un tunnel d'une dimension de $H = 5$ m. Les stations de radio FM émettent sur les fréquences de la bande 87,5-107,9 MHz (AM émet encore à plus basse fréquence). Conclusion? Et le téléphone portable, qui utilise la fréquence 900 MHz, fonctionne-t-il toujours dans le tunnel?

Exercice 3.2

1. Démontrer en utilisant le théorème de Gauss, que $\nabla^2 \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(\mathbf{r})$.
2. Démontrer que les ondes sphériques $P(r, t) = -\exp[-i\omega t \pm kr]/4\pi r$ sont solution de l'équation acoustique homogène, avec comme source $S(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$, pourvue que $k = \omega/c_0$. Discuter la différence entre les deux solutions.

3.1 Vitesse de groupe

L'exercice 3.1 établit une relation nonlinéaire entre la fréquence et le vecteur d'onde. À quelle vitesse se propage un paquet d'onde quasi-monochromatique lorsque les différentes composantes se propagent à une vitesse différente?

Considérons la superposition de deux ondes planes scalaires,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A [\cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})]$$

L'onde complexe s'écrit

$$\phi(\mathbf{r}, t) = A [\exp(-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + \exp(-i\omega_2 t + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})]$$

L'énergie moyennée sur les cycles est donc donnée par

$$(1/2)|\phi|^2 = \frac{1}{2}A^2 [1 + \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r})]$$

Pour une onde quasi-monochromatique $\omega_1 - \omega_2$ est très petit devant la fréquence centrale $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Alors on conclut que l'énergie ne se propage pas avec la vitesse de phase $\mathbf{v}_p = (\omega/k)\hat{\mathbf{k}}$ mais plutôt avec la *vitesse de groupe* \mathbf{v}_g .

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$$

Si la loi de dispersion est linéaire, $\omega = kc$, on trouve $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_g$. Si la loi de dispersion est isotrope, $\omega(\mathbf{k}) = \omega(k)$, les deux vitesses ont la même direction $\hat{\mathbf{k}}$.

Exercice 3.3 On reprend l'exercice 3.1. Démontrer que la vitesse de groupe s'annule pour les longueurs d'onde $\lambda \gg H$, alors que la vitesse de phase diverge. On trouve la relation $v_g v_p = c^2$.

Il a enfin une propriété de la vitesse de groupe qui est très utile. En espace de phase (k_x, k_y, k_z) une surface à fréquence constante est définie par la relation $\omega(\mathbf{k}) = \omega$. Des petites variations du vecteur d'onde le long de la surface doivent obéir la relation,

$$0 = \delta\omega = \delta k_x \frac{d\omega}{dk_x} + \delta k_y \frac{d\omega}{dk_y} + \delta k_z \frac{d\omega}{dk_z} \Rightarrow \delta\mathbf{k} \cdot \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = 0$$

On peut conclure que *la vitesse de groupe est un vecteur normal à la surface à fréquence constante*.

3.2 Ondes électromagnétiques

En insérant $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, l'équation de Helmholtz se réduit à

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0$$

Puisque l'on cherche des solutions $\mathbf{E}(\omega) \neq 0$ la loi de dispersion est donnée par (rappeler l'exercice 1.4),

$$\det \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} \varepsilon - \mathbf{k}^2 + \mathbf{k}\mathbf{k} \right) = 0$$

Cette équation est connue sous le nom de *l'équation de Fresnel*. Si la constante diélectrique est isotrope, $\varepsilon_{ij} = m^2 \delta_{ij}$, avec m l'indice de réfraction, le déterminant de Fresnel se simplifie à $\det = m^2 \omega^2 (m^2 \omega^2 / c_0^2 - k^2)^2$. La solution $\omega = c_0 k / m$ est accompagnée d'une polarisation transverse: $\mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{k} = 0$. La troisième solution n'existe que pour les champs statiques ($\omega = 0$). Sa polarisation est longitudinale, c'est à dire parallèle au vecteur d'onde. C'est une solution qui n'a pas beaucoup d'importance pour les ondes électromagnétiques. C'est plutôt *l'absence* de la propagation longitudinale qui se remarque le plus.

Le théorème suivant est fondamentale, bien que intuitivement logique.

Théorème: Dans un milieu homogène avec $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\omega)^\dagger$ et $\mu(\omega) = \mu(\omega)^\dagger$ le vecteur Poynting $\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) / 4\pi$ et la vitesse de groupe sont parallèles ou anti-parallèles.

On a déjà démontré que le même critère nous garantit la conservation d'énergie.

Démonstration:

Point de départ sont les équations

$$\omega \varepsilon \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{k} \times \mu^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad ; \quad \omega \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

Nous allons considérer une variation à ω constante de ces équations.

$$\omega \varepsilon \cdot \delta \mathbf{E} = -\delta \mathbf{k} \times \mu^{-1} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{k} \times \mu^{-1} \cdot \delta \mathbf{B}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \omega \mathbf{E}^* \cdot \varepsilon \cdot \delta \mathbf{E} &= -\mathbf{E}^* \cdot (\delta \mathbf{k} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E}^* \cdot (\mathbf{k} \times (\mu^{-1} \delta \mathbf{B})) \\
 &= \delta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) - (\mathbf{E}^* \times \mathbf{k}) \cdot (\mu^{-1} \cdot \delta \mathbf{B}) \\
 &= \delta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) + \omega \mathbf{B}^* \cdot \mu^{-1} \cdot \delta \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

Puis on a

$$\omega \delta \mathbf{B} = \delta \mathbf{k} \times \mathbf{E} + \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
 \omega \mathbf{B}^* \cdot \mu^{-1} \cdot \delta \mathbf{B} &= \mathbf{B}^* \cdot \mu^{-1} \cdot (\delta \mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \mathbf{B}^* \cdot \mu^{-1} \cdot (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}) \\
 &= ((\mu^{-1})^\dagger \cdot \mathbf{B})^* \cdot (\delta \mathbf{k} \times \mathbf{E}) + ((\mu^{-1})^\dagger \cdot \mathbf{B})^* \cdot (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}) \\
 &= \mathbf{H}^* \cdot (\delta \mathbf{k} \times \mathbf{E}) - (\mathbf{k} \times \mu^{-1} \mathbf{B})^* \cdot (\delta \mathbf{E}) \\
 &= \delta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) + \omega \mathbf{E}^* \cdot \varepsilon^\dagger \cdot \delta \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

En sommant les deux résultats on obtient,

$$\delta \mathbf{k} \cdot 2\text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = 0$$

On trouve le vecteur Poynting perpendiculaire à la surface à constante densité d'énergie. Puisque la densité d'énergie totale de l'onde plane $\hat{\mathbf{g}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ est proportionnelle à $\omega^2/2$, les notions "constante densité d'énergie" et "constante fréquence" sont équivalentes pour les ondes planes. On avait déjà constaté que la vitesse de groupe est perpendiculaire à la surface à constante fréquence. On conclut que les deux vecteurs sont tous les deux vecteur normal de la surface à fréquence constante \square .

Exercice 3.4: Les matériaux à "main gauche" sont décrits par les constantes $\mu = -1$ et $\varepsilon = -1$. Démontrer que le vecteur de Poynting est dirigé opposé au vecteur d'onde. Pourquoi on appelle ces matériaux "à main gauche"?

3.2.1 Absorption et dispersion

Même dans un milieu isotrope la propagation se complique par la présence de l'absorption et de la dispersion. La dispersion implique que les propriétés

optiques du milieu dépendent de la fréquence. L'absorption implique que l'énergie du signal n'est plus conservée mais convertie en chaleur ou d'autres formes d'énergie.

L'absorption est décrite par un tenseur diélectrique qui n'est plus hermétique. Dans le cas le plus simple d'un milieu isotrope on a $\varepsilon_{kl} = (m_r + im_i)^2 \delta_{kl}$ avec $m_i > 0$. Pour un milieu homogène les solutions sont forcément des ondes planes $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ et on trouve la loi de dispersion

$$(m_r + im_i)^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} = \mathbf{k}^2$$

Plusieurs approches existent à partir de cette équation. On pourrait supposer que le paquet d'onde $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est déterminé par les conditions initiales à $t = 0$ et que l'on cherche à décrire son évolution temporelle. La composante $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ évoluera avec une fréquence complexe donnée par

$$\omega = kc_0/(m_r + im_i) \approx kc_0/m_r - im_i kc_0/m_r^2$$

Le paquet d'onde évolue donc comme,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{E}(\mathbf{k}) \exp[-ikc_0 t/m_r + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \times \exp[-kc_0(m_i/m_r^2)t]$$

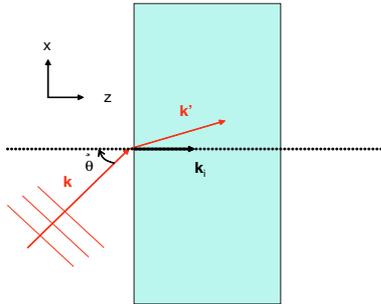
On constate clairement l'amortissement provoqué par la présence de m_i .

Une deuxième approche consiste à fixer la fréquence. Ceci est notamment le cas à l'interface de deux milieux homogènes où la fréquence est forcément la même de deux côtés de l'interface. Sinon l'évolution temporelle sera différente de deux côtés, et on ne pourra jamais respecter les conditions de bord pour tous les temps. Pour la même raison, la composante \mathbf{k}_{\parallel} doit être continue (loi de Descartes/Snell). Cela implique que le vecteur d'onde normal change afin de obéir la loi de dispersion. On écrit maintenant $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i$. La loi de dispersion devient

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_r^2 - \mathbf{k}_i^2 &= (m_r^2 - m_i^2) \frac{\omega^2}{c_0^2} \Rightarrow \mathbf{k}_r \approx m_r \frac{\omega}{c_0} \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i &= m_r m_i \frac{\omega^2}{c_0^2} \end{aligned}$$

En général les directions de \mathbf{k}_r et \mathbf{k}_i ne sont pas identiques. Cela implique que les surfaces à phase constante et celle à amplitude constante ne sont pas les mêmes. On parle d'une *onde plane inhomogène*.

Exercice 3.5 Considérer une interface plane-parallèle entre un milieu homogène sans absorption ($m_r = 1$ et $m_i = 0$) et un milieu homogène dissipatif ($m_r = m$ et $m_i > 0$). Une onde électromagnétique arrive sous un angle θ avec une longueur d'onde λ .



1. Expliquer pourquoi le vecteur d'amortissement \mathbf{k}_i est forcément orienté perpendiculairement à l'interface, quelle que soit l'angle d'incidence θ .
2. Démontrer que l'amplitude du signal transmis décroît comme $\exp(-z/\xi)$ dans le milieu absorbant, avec $\xi(\theta) = \lambda\sqrt{m^2 - \sin^2\theta}/(2\pi m m_i)$.

On arrive maintenant à un théorème fondamental qui établit une relation entre l'absorption et la dispersion. Pour les ondes électromagnétiques la dispersion se manifeste comme un tenseur diélectrique qui dépend de la fréquence. La susceptibilité diélectrique $\chi(\omega) = (\varepsilon(\omega) - 1)/4\pi$ décrit la densité de polarisation \mathbf{P} induite dans le milieu par un champ électrique.

Exercice 3.6 Pour les très hautes fréquences on s'attend à ce que la polarisation induite par la radiation est dominée par les oscillations libres des électrons, sans être empêchée par les forces atomiques, qui ont une fréquence de résonance plus basse. Soit un nombre n électrons par unité de volume, avec masse m_e et charge $-e$.

1. En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que le déplacement $\mathbf{r}(t)$ d'un électron se décompose selon $\mathbf{r}(\omega) = (e/m_e\omega^2)\mathbf{E}(\omega)$ pour les hautes fréquences.
2. Démontrer que pour les hautes fréquences $\chi(\omega) \rightarrow -\omega_p^2/\omega^2$, avec $\omega_p \equiv \sqrt{n e^2/m_e}$ la fréquence de plasma. Expliquer pourquoi les métaux qui ont une fréquence de plasma très élevée. Par conséquent, pour $\omega < \omega_p$ leur constante diélectrique est négative.

La relation $\mathbf{P}(\omega) = \chi(\omega)\mathbf{E}(\omega)$ est équivalente à une convolution en espace temporelle, c'est à dire,

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t-t')\mathbf{E}(t')$$

La causalité nous impose qu'aucune polarisation ne soit produite avant l'arrivée du champ \mathbf{E} . Il en résulte que $\chi(t-t') = 0$ pour $t < t'$. Par conséquent

$$\chi(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi(t) \exp(i\omega t) = \int_0^{\infty} dt \chi(t) \exp(i\omega t)$$

est une fonction analytique pour toutes les fréquences avec $\text{Im } \omega > 0$.¹ Cette analyticité implique le théorème suivant,

Théorème (Kramers-Kronig)

$$\begin{aligned} \text{Re } \chi(\omega) &= \mathcal{H}\text{Im } \chi(\omega) \\ \text{Im } \chi(\omega) &= -\mathcal{H}\text{Re } \chi(\omega) \end{aligned}$$

La transformation de Hilbert \mathcal{H} a été déjà introduite dans le chapitre 2. Le théorème montre que la dispersion, exprimée par $\text{Re } \chi(\omega)$, est liée à l'absorption optique $\text{Im } \chi(\omega)$ par la causalité.

Exercice 3.7

1. En utilisant le résultat obtenu dans la section 2.1 et la conclusion de l'exercice 3.6, démontrer le théorème de Kramers-Kronig.
2. Démontrer la relation $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon(\omega)^*$.
3. Démontrer

$$\text{Re } \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \text{Im } \varepsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}$$

4. Démontrer la règle de somme pour l'absorption optique,

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \text{Im } \varepsilon(\omega) = \frac{\pi}{2} \omega_p^2$$

¹Le signe *positif* dans l'exposant $\exp(i\omega t)$ est imposé par la transformation de Fourier et notre convention de mettre un signe *néгатif* dans la décomposition spectrale (voir le chapitre 2)

3.2.2 Milieu diélectrique anisotrope

Les ondes électromagnétiques se propagent souvent dans un milieu anisotrope. Pour un milieu uni-axiale le tenseur diélectrique est donné par à

$$\varepsilon_{ij} = m^2 \delta_{ij} + \varepsilon_a n_i n_j$$

où \mathbf{n} est un vecteur d'unité appelé *axe optique* et $\varepsilon_a \in \mathbb{R}$ l'anisotropie diélectrique. On cherche les solutions de l'équation de Helmholtz. On s'attend à ce que la loi de dispersion $\omega(\mathbf{k})$ soit anisotrope et dépendante de l'angle entre le vecteur d'onde et l'axe optique. On peut donc adopter $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, et $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ en sachant que les solutions avec $k_z \neq 0$ se construisent par rotation sur l'axe optique. Le déterminant de Fresnel devient,

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c_0^2}(m^2 + \varepsilon_a) - k^2 + k_x^2 & k_x k_y & 0 \\ k_x k_y & \frac{\omega^2}{c_0^2}m^2 - k^2 + k_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c_0^2}m^2 - k^2 \end{vmatrix} = 0$$

Puisque $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ on obtient facilement,

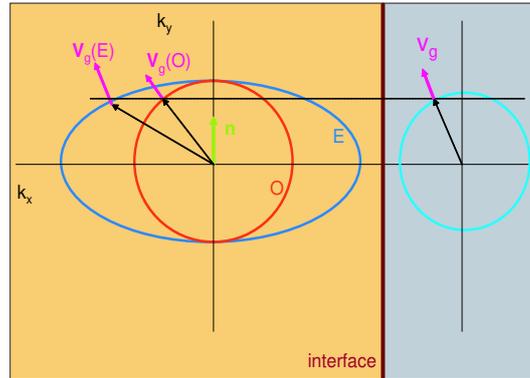
$$\frac{\omega^2}{c_0^2} \left(m^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 \right) \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} m^2 (m^2 + \varepsilon_a) - k_x^2 (m^2 + \varepsilon_a) - k_y^2 m^2 \right) = 0$$

Pour $\omega = 0$ on retrouve la solution longitudinale qui ne se propage pas. Le deuxième facteur produit un mode isotrope $\omega = m k c_0$. Il est facile à vérifier que la polarisation de ce mode dit "*ordinaire*" est à la fois perpendiculaire au vecteur d'onde et à l'axe optique. Le troisième facteur produit une loi de dispersion du mode dit "*extraordinaire*" qui s'exprime comme,

$$\boxed{\frac{\omega^2(\mathbf{k})}{c_0^2} = \frac{k_x^2}{m^2} + \frac{k_y^2}{m^2 + \varepsilon_a}}$$

La surface à constante fréquence est une ellipsoïde avec un axe $m\omega/c_0$ le long de l'axe optique et deux axes $\omega\sqrt{m^2 + \varepsilon_a}/c_0$ dans le plan perpendiculaire. Les deux lois de dispersion se rejoignent le long de l'axe optique.

Que se passe-t-il lorsque une onde électromagnétique entre un milieu uni-axiale (voir Figure)? Rappelons que la vitesse de groupe $d\omega/d\mathbf{k}$ est un



vecteur qui est normal à la surface à fréquence constante, et qui n'a pas toujours la même direction que le vecteur d'onde \mathbf{k} . La loi de Descartes impose que la composante de \mathbf{k} parallèle à l'interface soit continue. Dans le milieu anisotrope cette condition permet deux solutions, avec une vitesse de groupe différente à la fois en direction et en module, avec en plus une polarisation linéaire différente. Si l'onde incidente est dépolarisée, les deux modes seront activés: on parle de la *biréfringence linéaire*.

La *biréfringence circulaire* induite par un champ magnétique externe \mathbf{B} (*l'effet de Faraday*) est représentée par le tenseur diélectrique

$$\varepsilon_{jl} = \delta_{jl} + 2i \frac{V c_0}{\omega} \varepsilon_{jln} B_n$$

Dans cette équation, $V \in \mathbb{R}$ est la constante de Verdet. On rappelle le tenseur de Lévi-Civita évoqué en Chapitre 1. A nouveau on anticipe une loi de dispersion anisotrope qui ne dépend que de l'angle entre le vecteur \mathbf{B} et le vecteur d'onde \mathbf{k} . On choisit \mathbf{B} parallèle à l'axe \mathbf{y} , et $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ dans le plan xy . Le tenseur $\varepsilon_{jln} B_n$ aura une contribution B à la composante zx et $-B$ à xz . L'équation de Fresnel devient,

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_y^2 & k_x k_y & 2iVB \frac{\omega}{c_0} \\ k_x k_y & \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_x^2 & 0 \\ -2iVB \frac{\omega}{c_0} & 0 & \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui nous donne

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} \left[\left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 \right)^2 - 4V^2 B^2 \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_x^2 \right) \right] = 0$$

On retrouve la solution $\omega = 0$. Les deux autres solutions sont données par

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} \approx k^2 \pm 2VBk_y \approx (\mathbf{k} \pm V\mathbf{B})^2$$

On a supposé que $|VB/k| \ll 1$, ce qui est largement obéi dans tous les matériaux (typiquement $V = 100$ degrés /mm/Tesla donc $|V/k| \approx 0,002$ par Tesla). La loi de dispersion consiste en deux sphères, dont les centres se sont déplacés le long des vecteurs $\pm V\mathbf{B}$.

Exercice 3.8

1. Démontrer que la polarisation associée aux deux modes est caractérisée par un vecteur de déplacement complexe $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}$ qui est orthogonal au vecteur d'onde, qui à son tour est dirigé vers $\hat{\mathbf{z}}$. Les courageux sont invités à montrer que $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{B}} / \sin \theta$ et $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{k}}$; θ est l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{B} .
2. Démontrer que le signal physique associée à la solution $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}$ possède une polarisation circulaire, qui effectue une rotation complète sur 2π durant un cycle $T = 2\pi/\omega$ autour du vecteur d'onde, dans le sens ou dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
3. Calculer la vitesse de groupe des deux modes. Les ondes électromagnétiques sont-elles défléchies par un champ magnétique?
4. Discuter comment peut servir l'effet Faraday pour deduire les champs magnétiques intergalactiques?

3.3 Ondes élastiques

On étudie l'équation élastique obtenue en Chapitre 1,

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

dans un milieu homogène. On effectue la décomposition spectrale en proposant la solution harmonique

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t) \left(A \hat{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}_P \cdot \mathbf{r}) + B \hat{\mathbf{g}} \exp(i\mathbf{k}_S \cdot \mathbf{r}) \right)$$

La première composante est purement longitudinale, caractérisée par une divergence non-nulle, et une rotation égale à zéro. Elle est associée à une onde de compression. La deuxième composante est identifiée comme une onde transversale de cisaillement, pour laquelle la divergence s'annule.

Pour l'onde de compression on trouve facilement $\nabla \cdot \mathbf{u} = ik_P \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_P \cdot \mathbf{r})$ et $\nabla^2 \mathbf{u} = -k_P^2 \hat{\mathbf{k}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_P \cdot \mathbf{r})$. En insérant on obtient,

$$-\rho\omega^2 = -(\lambda + 2\mu)k_P^2$$

et donc

$$\frac{\omega}{k_P} = \alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Les ondes de compression se propagent selon une loi de dispersion linéaire, avec la vitesse α . Pour les ondes de cisaillement la polarisation $\hat{\mathbf{g}}$ est orthogonale au vecteur d'onde. On obtient facilement,

$$\frac{\omega}{k_S} = \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

On constate que les ondes de cisaillement ne se propagent pas à la même vitesse que les ondes de compression. Si les deux constantes sont égales, ce qui est une très bonne approximation pour la croûte Terrestre, on trouve $\alpha = \beta\sqrt{3}$. Les ondes de compression arrivent donc au premier. Voilà pourquoi on appelle les ondes de compression souvent P (*Primary* en anglais) alors que les ondes de cisaillement sont notées S (*Secondary* en anglais). Pour la croûte terrestre on a $\alpha \approx 6 \text{ km/s}$ et $\beta \approx \alpha/\sqrt{3} = 3,5 \text{ km/s}$.

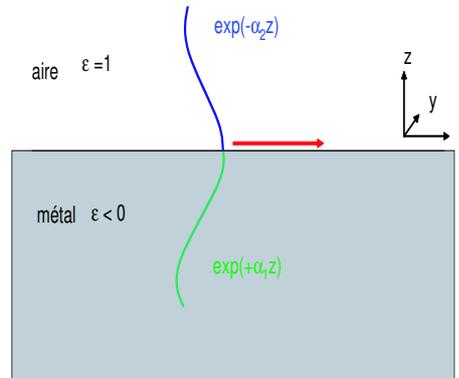
Exercice 3.9 Une onde P est incidente à une surface libre sous un angle θ . Discuter pourquoi les conditions de bords (rappeler l'Exercice 1.8) exigent qu'une onde SV soit créée, avec une polarisation dans le plan xz . Dessiner les modes réfléchies.

Exercice 3.10 Argumenter pourquoi les explosions émettent surtout des ondes P , alors que les tremblements de terre sont plutôt source des ondes S .

3.4 Ondes de surface

3.4.1 Plasmons de surface

Est-ce que les équations de Maxwell permettent une solution qui ne se propage que à l'interface de deux matériaux? Considérons la figure. On cherche une solution qui est propagative dans le plan x, y , et évanescence dans les *deux* directions $\pm z$. Une onde évanescence est une onde dont le vecteur d'onde est imaginaire pure.



On commence par un champ magnétique transversal, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{y}} f(z) \exp(-i\omega t/c_0 + ikx)$. Le vecteur d'onde k est à déterminer. Pour la fonction $f(z)$ on propose $f(z < 0) = \exp(\alpha_1 z)$ et $f(z > 0) = \exp(-\alpha_2 z)$. Selon la loi de Ampère,

$$\frac{1}{c_0} \varepsilon \partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

On a donc $\mathbf{E} = (\partial_z f(z), 0, -ik f(z)) \exp(-i\omega/c_0 t + ikx) c_0 / i\omega \varepsilon(+, -)$. Puisque E_x doit être continue à l'interface $z = 0$ on trouve $\alpha_1 = -\varepsilon \alpha_2$. Par conséquent $\varepsilon < 0$ est imposé afin de trouver une solution qui est évanescence dans les deux directions. Les métaux ont typiquement une constante diélectrique négative en dessous de la fréquence plasma (rappeler l'Exercice 3.6). On négligera ici leur absorption optique, provoquée par une conductivité finie. Pour que les ondes puissent se propager il faut obéir la loi de dispersion dans les deux milieux. Notons que les deux vecteurs d'onde sont donnés par $\hat{\mathbf{k}}_i = k\hat{\mathbf{x}} + i\alpha_i\hat{\mathbf{z}}$. Par conséquent,

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} = k^2 - \alpha_2^2$$

$$\varepsilon \frac{\omega^2}{c_0^2} = k^2 - \alpha_1^2$$

Les deux équations montrent facilement que

$$\alpha_1^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{\varepsilon^2}{-(\varepsilon + 1)}$$

$$\alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{-(\varepsilon + 1)}$$

On observe que le plasmon est solution à la condition que

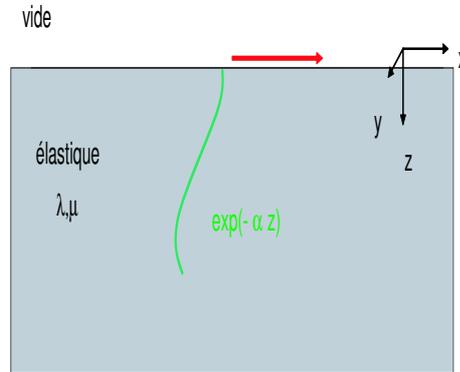
$$\boxed{\varepsilon < -1}$$

La fonction d'onde décroît plus vite dans le métal. Il est facile à démontrer que la dispersion du plasmon est linéaire avec une vitesse $c = c_0 \sqrt{(|\varepsilon| - 1)/|\varepsilon|}$, et donc $c < c_0$.

Exercice 3.11 Expliquer pourquoi il est impossible d'exciter un plasmon en envoyant une onde plane depuis l'air, quelque soit sa polarisation et quelque soit son angle d'incidence. Et en utilisant une onde évanescente ?

3.4.2 Ondes de Rayleigh

Ça fut en 1890 que Lord Rayleigh démontra l'existence d'une onde élastique de surface. Cette onde de Rayleigh se propage le long d'une surface libre, comme par exemple la surface de la Terre. Ce sont bien les ondes de Rayleigh qui sont à l'origine de tous les dégâts provoqués par les tremblements de terre. Dans la suite on va considérer une surface libre qui sépare un milieu élastique et un vide parfait. Dans le vide il n'y a aucun signal possible, même pas acoustique (évidemment, le vide une approximation de la réalité puisque sur Terre il y a toujours de l'air). Les 3 conditions de bords à respecter sont les contraintes $\tau_{iz}(z = 0) = 0$. Cela nous mène à



$$\begin{aligned}\partial_x u_y + \partial_y u_x &= 0 \\ \partial_y u_z + \partial_z u_y &= 0 \\ \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu\partial_z u_z &= 0\end{aligned}$$

Exercice 3.12 Démontrer qu'une onde longitudinale P qui est évanescence en fonction de $z > 0$ et qui est propagative en fonction de x ne peut pas obéir aux conditions de bords. Démontrer la même chose pour une onde SH (avec une composante le long de la surface libre)

On propose comme solution la superposition d'une onde P et une onde SV , avec un vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}} + i\kappa_{S,P}\hat{\mathbf{z}}$. Les composantes le long de la surface sont forcément identiques puisque les deux modes se propagent ensemble.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_P(\mathbf{r}, t) &= A(k\hat{\mathbf{x}} + i\kappa_{S,P}\hat{\mathbf{z}}) \exp(-i\omega t) \exp(ikx - \kappa_P z) \\ \mathbf{u}_S(\mathbf{r}, t) &= B(-k\hat{\mathbf{z}} + i\kappa_{S,P}\hat{\mathbf{x}}) \exp(-i\omega t) \exp(ikx - \kappa_S z)\end{aligned}$$

Pour qu'elles obéissent à l'équation d'élasticité, les lois de dispersions imposent,

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{\alpha^2} &= k^2 - \kappa_P^2 \\ \frac{\omega^2}{\beta^2} &= k^2 - \kappa_S^2\end{aligned}$$

La première condition de bord implique,

$$2\kappa_P k A + iB(k^2 + \kappa_S^2) = 0$$

La deuxième condition de bord est satisfaite par notre proposition. Après un calcul léger, la troisième nous donne

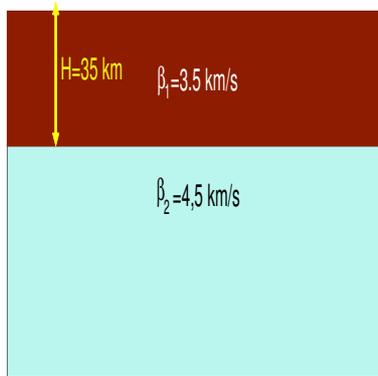
$$iA [\lambda(k^2 - i\kappa_P^2) - 2\mu\kappa_P^2] + B 2\mu k \kappa_S = 0$$

En utilisant les relations pour les vitesses, $\mu = \rho\beta^2$ et $\lambda = (\alpha^2 - \beta^2)\rho$, et les deux lois de dispersions pour sortir $\kappa_{P,S}$ de l'équation, on peut réécrire les deux équations comme,

$$\begin{aligned} A 2k \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}} + iB \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) &= 0 \\ iA (\omega^2 - 2\beta^2 k^2) + B 2\beta^2 k \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2}} &= 0 \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait une solution $A \neq 0$ et $B \neq 0$ on doit imposer,

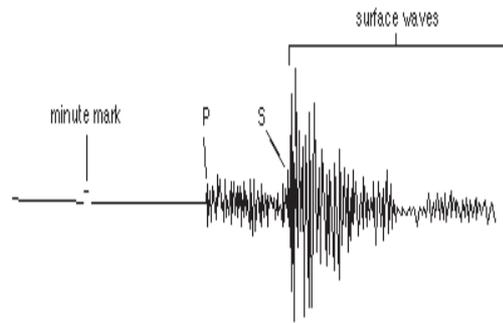
$$\begin{vmatrix} 2k \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}} & i \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) \\ i(\omega^2 - 2\beta^2 k^2) & 2\beta^2 k \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2}} \end{vmatrix} = 0$$



On introduit la vitesse de phase $c_R = \omega/k$ de l'onde de surface. Elle doit obéir à l'équation suivante,

$$4c_R^2 \left(1 - \frac{c_R^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)^{1/2} - \left(2 - \frac{c_R^2}{\beta^2}\right)^2 = 0$$

Cette équation transcendante est facilement résolue à un calculatrice programmable. Remarquons que le calcul prédit une onde surface qui se propage sans dispersion. Pour le cas spécial que $\lambda = \mu$ on trouve $c_R = (0.92 \dots)\beta$. Les ondes de Rayleigh arrivent donc un peu après les ondes de compression et les ondes de cisaillement.



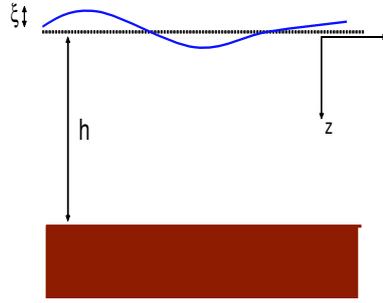
Exercice 3.13 Démontrer que l'onde SV décroît comme $\exp(-z/\xi_S)$ avec $\xi = \lambda_S/2.4$. Si $\beta = 3,5$ km/s, quelle longueur de pénétration ça fait à 0.1 Hz?

Exercice 3.14 Considérer une géométrie qui est typique pour la croûte et le manteau supérieur. La croûte a une profondeur de $H = 35$ km environ, et les ondes S s'y propagent plus lentement que dans le manteau. Supposer $\lambda = \mu$ partout.

1. Discuter à quelle vitesse on s'attend pour les ondes de Rayleigh de petite longueur d'onde $\lambda \ll H$ et de grande longueur d'onde $\lambda \gg H$. Dessiner la courbe $c(\omega)$.
2. Démontrer que les ondes de Rayleigh se propagent avec une vitesse de groupe $v_G < c(\omega)$.
3. Quelle information est fournie par la mesure de la dispersion des ondes de Rayleigh?

3.4.3 Vagues de gravité

Les ondes qui se propagent à la surface de l'eau sous l'influence de la force gravitationnelle sont appelées *vagues de gravité* (et ne sont pas à confondre avec les ondes de gravité prédites par la théorie de Einstein).



Considérons une fluide idéale, sans viscosité et dissipation, mais en présence de gravité. Dans ce cas, l'équation d'Euler se simplifie à

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \partial_t \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{g}$$

On va supposer que l'amplitude de \mathbf{v} est faible, et que la densité de masse est incompressible: $\rho = \text{constante}$. On vérifie que $\partial_t \nabla \times \mathbf{v} = 0$. C'est un cas spécial où le champ de vitesse est décrit par le potentiel $v = \nabla \phi$. La conservation de masse nous impose $\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$, et puisque ρ a été supposée incompressible on a $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Par conséquent, le potentiel obéit à

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = 0$$

La surface est perturbée par une variation $\xi(x, t)$ lorsque l'onde se propage dans la direction x . L'équation de Euler nous donne un cas simplifié de la loi de Bernoulli,

$$\rho \partial_t \phi + P + \rho g z = P(0) + f(t) = 0$$

Puisque la gravité est vers le bas on écrit $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$. On remet $f(t) = 0$ car il est possible de modifier $\phi(t)$ sans affecter son gradient spatiale. En équilibre $\mathbf{v} = 0$, et on trouve une pression qui croît linéairement avec la profondeur. En présence d'une perturbation la pression P fluctue mais à l'interface air-eau elle est toujours égale à la pression de l'atmosphère $P(0)$. Donc à la surface $z = \xi$ on trouve,

$$\rho \partial_t \phi(\xi, t) + \rho g \xi = 0$$

et puisque $\partial_t \xi = v_z = \partial_z \phi$ on arrive à l'équation d'onde

$$g\partial_z\phi(z=0, t) + \partial_t^2\phi(z=0, t) = 0$$

La solution générale de l'équation $\nabla^2\phi = 0$ ayant la fréquence ω est donnée par

$$\phi(\mathbf{r}, t) = [A \exp(kz) + B \exp(-kz)] \exp(ikx - i\omega t)$$

Sur le fond $z = -h$ on exige $v_z = \partial_z\phi = 0$, donc $B = A \exp(2kh)$. Il en résulte que

$$\phi(\mathbf{r}, t) \propto \cos(kx - \omega t) \cosh k(z + h) \exp(-kh)$$

L'équation pour $\phi(z=0, t)$ nous impose la loi de dispersion,

$$\omega^2 = gk \tanh kh$$

On arrive à la conclusion que la dispersion des vagues est fortement gouvernée par la profondeur de l'eau. Pour une mer plus profonde que la longueur d'onde ($kh \gg 1$) la loi de dispersion est parabolique, $\omega = \sqrt{gk}$. On a une véritable onde de surface qui est dispersive et évanescence dans la direction verticale. Ceci est typiquement le cas pendant un orage sur mer, et les vagues ont une fréquence de 10 s, et une longueur d'onde de 150 m. Par contre, si la longueur d'onde est grande devant la profondeur de l'eau, on trouve une onde guidée par l'eau, qui se propage sans dispersion avec la vitesse $c = \sqrt{gh}$. Dans ce régime de grande longueur d'onde, plus l'eau est profonde, plus les vagues vont vites.

Puisque $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ il est facile de démontrer la loi de conservation

$$\partial_t \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \partial_t \phi = 0$$

On identifie la densité de flux $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \partial_t \phi$. La densité d'énergie \mathcal{E}_c dans ce bilan est purement cinétique.

Exercice 3.15 Démontrer que notre solution obéit à la relation

$$\langle \mathbf{J} \rangle = 2\mathbf{v}_g \langle \mathcal{E}_c \rangle$$

où v_g est la vitesse de groupe de la vague, qui est dirigée le long de la surface et $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne sur les cycles temporelles et sur la profondeur $-h < z < 0$.

Exemple: Le *Tsunami* est un catastrophe naturel crée par un tremblement de terre sous mer, qui produit des fréquences suffisamment basses (1 cycle par heure, soit 0,3 mHz) pour que $\lambda \approx 100 \text{ km} \gg h$. En mer profonde, $h \approx 4 \text{ km}$, on trouve donc une vitesse de groupe $v_g = 700 \text{ km/h}$. La vitesse d'un avion!

Exercice 3.16 La fréquence est conservée lorsque la profondeur de la mer change graduellement. Argumenter que $J_x h$ est également conservé. Argumenter que, en arrivant sur les côtes, la hauteur du Tsunami croît en amplitude comme $\xi \sim 1/h$. Étant donnée l'amplitude en mer (1 m) la vague gagne un facteur 10 en amplitude (Elle finit par devenir nonlinéaire et la théorie abordée ici ne s'appliquera plus).

3.5 Ondes internes

Dans cette section on introduit brièvement les ondes internes. Comme les vagues, elles sont gerées par la gravitation dans un liquide incompressible. Les vagues de gravitation sont créés par des fluctuations mécaniques d'un liquide incompressible. Par contre, les ondes internes sont créés par des fluctuations de nature *thermodynamiques* de la densité. La densité augmente avec la profondeur à cause de la gravitation. En descendant à pression constante, un petit volume se retrouve alors dans une environnement où il pèse légèrement moins et subit la poussée d'Archimède. On verra dans la suite que se processus crée une onde transverse avec une loi de dispersion qui est tout à fait spéciale.

On commence à nouveau par le bilan des forces,

$$\partial_t \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}$$

En équilibre hydrostatique on a $\nabla P_0 = \rho_0 \mathbf{g}$. La perturbation est caractérisée par une vitesse \mathbf{v} et des fluctuations $\delta\rho$ et p suite à à entropie constante. On linéarize l'équation,

$$\partial_t \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0^2} \delta\rho = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \mathbf{g} \frac{\delta\rho}{\rho_0}$$

Pour une expansion à constante pression, les variations de densité et d'entropie sont liées par,

$$\delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial s} \right)_P \delta s$$

de sorte que,

$$\partial_t \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} \left(\frac{\partial\rho}{\partial s} \right)_P \delta s$$

De même, la conservation de l'entropie s'écrit comme,

$$0 = \frac{ds}{dt} = \partial_t \delta s + \mathbf{v} \cdot \nabla s_0 = \partial_t \delta s + v_z \frac{ds_0}{dz}$$

Une troisième équation est imposée par la conservation de masse. En première approximation les fluctuations de densité peuvent être négligées et le champ de vitesse obéit la condition d'incompressibilité,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Comme d'habitude on cherche des solutions $\mathbf{v}, p, \delta\rho \sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$. L'équation pour $\partial_t \mathbf{v}$ se transforme en

$$-i\omega \mathbf{v} = -g \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\rho_0} \left(\frac{\partial\rho}{\partial s} \right)_P \delta s - i\mathbf{k}p$$

L'incompressibilité impose une vitesse transversale, soit $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$. Avec la conservation de flux on arrive à l'équation d'onde,

$$\omega^2 \mathbf{v} = \omega_0^2 v_z \left(\hat{\mathbf{z}} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}}}{k^2} \right)$$

avec la fréquence

$$\omega_0^2 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial\rho}{\partial s} \right)_P \frac{ds}{dz}$$

On en conclut que la fréquence et le vecteur d'onde sont liés par la loi de dispersion,

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sin^2 \theta$$

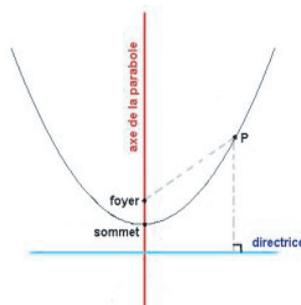
avec θ l'angle entre \mathbf{k} et l'axe z . Il est remarquable que la fréquence dépend seulement de la direction du vecteur d'onde et non pas de son module. Aucune fréquence au delà de ω_0 ne peut se propager. Les ondes internes sont cruciales pour comprendre le bilan d'énergie dans les océans. Elles peuvent également exister dans l'atmosphère.

Exercice 3.17 Démontrer que la vitesse de groupe des ondes internes est donnée par $v_g = (\omega_0/k) \cos \theta$ et qu'elle est dirigée perpendiculairement à la vitesse de phase.

Chapter 4

Cohérence Ondulatoire

Jusqu'à là nous avons considéré des ondes "parfaites", avec une cohérence totale, c'est à dire avec une phase et une amplitude qui sont parfaitement bien définies. En réalité, les champs émis par des sources sont stochastiques, et fluctuent en espace-temps. Au bout d'un certain temps, appelé temps de cohérence τ_c , le champs se décorrèle, c'est à dire $\langle \psi(t+\tau_c)\psi(t) \rangle \approx 0$, alors que pour un signal idéal monochromatique on s'attend à ce que $\langle \psi(t+\tau)\psi(t) \rangle = \cos \omega\tau$. Ceci est une très bonne approximation pour un laser qui, en mode continu, peut atteindre un temps de cohérence jusqu'à quelques dixièmes de secondes, soit plus de 10^{13} cycles.

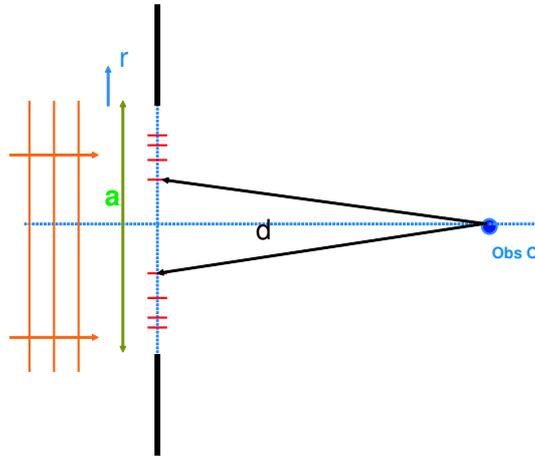


En espace l'onde idéale est une onde plane $\exp(ikx)$. Pour qu'elle puisse être excitée il faut une source qui est "cohérente" et synchronisée partout dans le plan yz . En réalité, la source consiste en différentes petites sources (atomes pour les ondes électromagnétiques) qui ne sont pas forcément corrélées entre elles. On verra plus tard, en démontrant le théorème célèbre de Van Cittert-Zernike, ce que cela impliquera pour la cohérence du champ loin de la source.

Exercice 4.1 Expliquer pourquoi le mot “*parabole*” est très justifié pour une émetteur d’onde plane.

4.1 Principe de Huygens et zone de Fresnel

Considérons un disque S de dimension a illuminé par une radiation homogène et cohérente. Un observateur mesure le champ émis à une distance d . La question suivante se pose: A quelle distance d de l’observateur l’objet ressemble-t-il à une source ponctuelle, dont on ne voit plus la dimension? Ou équivalent: à quelle distance de l’objet on est en “champ lointain”.



L’observateur pourrait diviser l’objet en plusieurs morceaux selon la phase accumulée par les ondes depuis leur départ à la source. Selon le principe de Huygens chaque point de la source émet une onde sphérique, proportionnelle à $\exp(ikr)/4\pi r$. La phase accumulée est donc égale à kr et à kd pour les ondes venant du centre du disque. La N^e zone de Fresnel est définie par une phase

$$kd + N\pi < \phi = kr < kd + (N + 1)\pi$$

Les zones sont bornées par des cercles avec un rayon r_N donné par $\sqrt{d^2 + r_N^2} = d + N\pi$. Puisque $d \gg a > r_N$ on trouve

$$r_N = \sqrt{N\lambda d}$$

Attribuons un amplitude complexe $s_H(\omega)\psi_{\text{in}}$ aux sources secondaires sphériques créées dans le disque selon le principe de Huygens. La contribution de la N^{e} zone au champ observé est égale à

$$\begin{aligned}\psi_N(O) &\approx \psi_{\text{in}} \exp(ikd) 2\pi \int_{r_{N-1}}^{r_N} dr r s_H(\omega) \frac{\exp(i\frac{1}{2}kr^2/d)}{4\pi d} \\ &= \psi_{\text{in}} s_H(\omega) \frac{i(-1)^{N-1}}{k} \exp(ikd)\end{aligned}$$

A la phase kd près, qui a été accumulée pendant la propagation du centre vers O , le résultat ne dépend pas de la distance de l'observateur. La contribution change de signe pour les zones de Fresnel successives.



Exercice 4.2

1. Démontrer que lorsque $a \rightarrow \infty$, $\psi(O) = \psi_{\text{in}} i s_H(\omega) \exp(ikd)/2k$. Expliquer pourquoi Huygens était obligé d'attribuer une avance de un quart de cycle aux ondes secondaires sphériques, et une amplitude $s_H = 4\pi/\lambda$.
2. Une petite bagarre entre Fresnel et Poisson à l'Académie des Sciences en 1818: Montrer que Fresnel a eu raison et en bloquant la première zone de Fresnel du disque, la même intensité est observée en O .
3. Argumenter qu'en bloquant les zones impaires dans le disque, l'intensité observé par O est égale à $I_{\text{inc}} N_a^2$ avec N_a le nombre de zones ouvertes dans le disque. C'est le principe de la plaque de Fresnel.

On finit par répondre à la question de départ. Si l'objet est plus petit que la première zone de Fresnel vue depuis O , la phase des ondes émises vers O varie très peu, comme si c'était un objet de taille ponctuelle.

L'observateur se trouve en "champ lointain" si l'objet émetteur se trouve dans la première zone de Fresnel vue par l'observateur: dimension $a < 2\sqrt{\lambda d}$, avec d la distance.

On doit remarquer ici que la notion du "champ proche" est souvent, et notamment en microscopie, défini comme $d < \lambda$. Ce critère ne dépend pas de la dimension de l'objet. En champ proche il est possible de détecter des ondes évanescentes qui ne peuvent se propager. Les deux concepts ne sont donc pas forcément complémentaires.

Exemple: Pour les ondes visibles, le régime du champ lointain d'un objet d'une dimension de 1 cm commence à 50 m. C'est loin! Pour les rayons X ($\lambda = 5\text{nm}$) ce sera encore plus loin: 5 km. Pour le son à 3 kHz émis par le même objet, $d > 0.25\text{ mm}$ est déjà en champ lointain. Quant aux ondes sismiques, un tremblement de terre sur une faille de 200 m est en champ lointain pour des fréquences autour de 10 Hz dès que l'observateur se trouve à 20 m. C'est proche!

Exercice 4.3 Lentille

Une lentille placée dans le disque S ajoute une phase $\phi(r)$ aux ondes, qui décroît avec la distance r au centre du disque puisque la distance L parcourue par les ondes dans la lentille décroît. En optique géométrique la phase est proportionnelle à kL . Une lentille quadratique est décrite par $\phi(r) = \phi_0 - \frac{1}{2}kr^2/d$.

1. Montrer que la première zone de Fresnel sur le disque vue de la distance d s'élargit par un facteur $\sqrt[4]{4d/\lambda} \gg 1$.
2. Argumenter que la bonne performance de la lentille exige que son ouverture S soit petite devant la première zone de Fresnel et que d devient la distance focale.
3. En utilisant le principe de Huygens, démontrer dans ce cas que l'amplitude de l'image est amplifiée par un facteur $S/\lambda d \gg 1$ par rapport à l'onde incidente.

Exercice 4.4 Un calcul historique.

La loi de Descartes-Snellius stipule que l'angle de réfraction à l'interface de 2 milieux homogènes et isotropes obéit à

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

avec θ_i l'angle de propagation de l'onde dans le milieu i par rapport au vecteur normal à l'interface. Pour Christiaan Huygens (1629-1695), faisant partie de la génération juste après Descartes (1596-1650) et Snellius (1591-1626), cette loi a joué un rôle *crucial* dans ses efforts de justifier le principe d'ondes sphériques secondaires. Hélas, il n'avait pas encore à sa disposition la transformation de Fourier, proposée par Joseph Fourier (1768-1830) un siècle plus tard.

1. Démontrer que selon le principe de Huygens l'onde réfractée à l'interface ($\mathbf{r}_I, z = 0$) est donnée par un intégral sur l'interface,

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \int d^2\mathbf{r}_I s_H(\omega) \exp(i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_I) G(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}_I, z\omega)$$

avec $G(r, \omega) = \exp(i\omega r/c_2)/4\pi r$ l'onde sphérique dans le milieu 2.

2. Démontrer que la transformée de Fourier de l'onde sphérique $\exp[i(\omega + i\epsilon)r/c]/4\pi r$ est donnée par $G(\mathbf{k}, \omega) = [\mathbf{k}^2 - (\omega + i\epsilon)^2/c_2^2]^{-1}$. Le paramètre $\epsilon > 0$ rassure que la transformation existe.
3. En utilisant la transformation de Fourier, démontrer que la réfraction obéit à la loi de Descartes-Snellius, et qu'elle est consistante avec la conservation de la composante *parallel* du vecteur d'onde parallèle à l'interface.

4.1.1 Diffraction cohérente par un disque

Un disque D de surface A - pour l'instant pas forcément circulaire, est excitée par une onde plane ψ_i se propageant dans la direction \mathbf{k}_{in} . On voudrait savoir comment l'onde plane est diffractée par le disque.

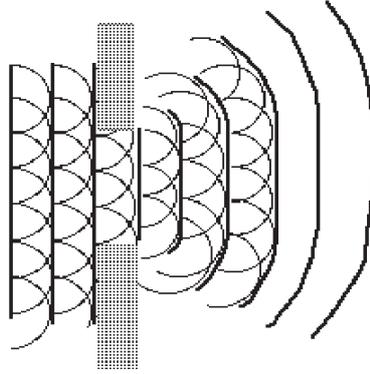
Selon le principe de Huygens, le champ diffracté est donné par

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \int_D d^2\mathbf{r}_S \frac{2k}{i} \psi_i(\mathbf{r}_S) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|}$$

En champ lointain ($r > A/\lambda$), $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S| \approx r - \mathbf{r}_S \cdot \hat{\mathbf{r}}$, et cela se traduit par

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{2kA \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{4\pi i r} \int_D \frac{d^2\mathbf{r}_S}{A} \psi_i(\mathbf{r}_S) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_S)$$

avec $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{r}}$. On voit d'abord que le profil angulaire est déterminée par la transforme de Fourier de la surface du disque. Le flux qui passe à travers une petite surface dA loin du disque est $\mathbf{J} \cdot \mathbf{dA} = c_0 |\psi_s|^2 dA$. L'énergie incidente est égale à $\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{A} = c_0 A |\psi_i|^2$. Puisque $dA/r^2 = d\Omega$ est l'angle solide, on trouve facilement pour l'intensité diffracté,



$$\frac{1}{I_i} \frac{dI_s}{d\Omega} = \frac{4k^2 A}{(4\pi)^2} |F(\mathbf{k}, \mathbf{k}_{in})|^2$$

avec

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{k}_{in}) \equiv \int_D \frac{d^2 \mathbf{r}_S}{A} \exp(-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{in}) \cdot \mathbf{r}_S)$$

Remarquons que vers l'avant $F(0, 0) = 1$ et donc $I_i^{-1} dI_s/d\Omega = 4k^2 A/(4\pi)^2 = A/\lambda^2$. Ce résultat est *indépendant de la géométrie du disque*. Pour $\lambda^2 \ll A \ll 2R\lambda$ le signal transmis est très dirigé vers l'avant. Cette constatation a de nombreuses applications comme par exemple le radar (chapitre 5).

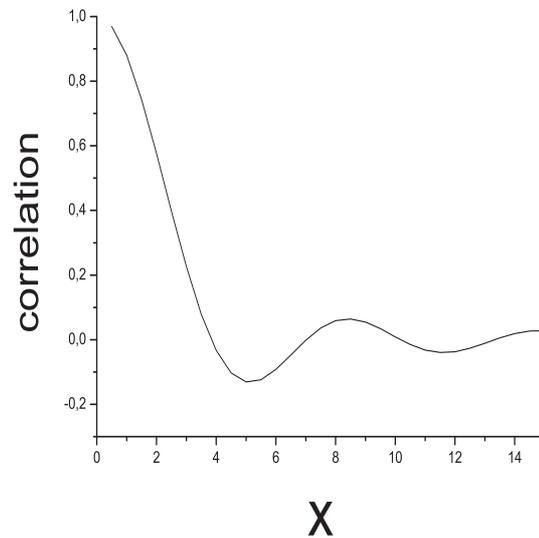
Un cas spécifique est un disque circulaire avec une surface $A = \pi a^2$ et incidence normale. On trouve

$$F(\theta, \phi) = \frac{1}{\pi a^2} \int d\mathbf{r}_S \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_S] = \frac{2}{a^2} \int_0^a dr r J_0(k_{\parallel} r)$$

avec $J_n(x)$ la fonction de Bessel de l'ordre n . Puisque $y^{-1} d/dy(yJ_1(y)) = J_0(y)$ on trouve,

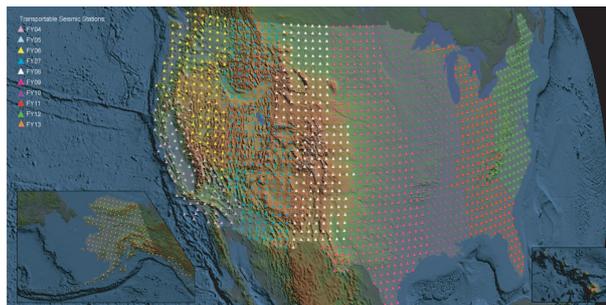
$$\boxed{\frac{1}{I_i} \frac{dI_s}{d\Omega} = \frac{\pi a^2}{\lambda^2} \left| \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right|^2}$$

avec θ l'angle de diffraction par rapport au vecteur normal du disque. Le premier zéro dans la diffraction est à $ak \sin \theta = 3.83$.



Exercice 4.5 Interférométrie

1. Montrer que la résolution angulaire d'un télescope avec une aperture d est égale à $\Delta\theta = 1,22\lambda/d$ (la *limite théorique de Rayleigh*).
2. La radio-interférométrie synthétique se sert de la rotation de la terre pour remplir une aperture fictive en utilisant un réseau de radio télescopes rectiligne. Une transformation discrète est performée numériquement sur le signal $\psi(\mathbf{r}_n)$ capté par le réseau. Si le rayon fictif est de 3 km, quelle est la résolution angulaire du réseau à une longueur d'onde de 21 cm (une longueur qui correspond à une transition interdite de l'hydrogène atomaire)?



3. Le réseau *Bigfoot* aux Etats-Unis (photo) est un réseau sismique mobile qui fait partie du grand projet *USArray*. Il consiste en 400 sismomètres avec une sensibilité entre 0.05 Hz et 20 Hz, séparés d'une distance de 70 km. Le réseau a une aperture

de 1400 km. Les ondes P se propagent avec une vitesse de 6 km/s dans la croûte, jusqu'à 12 km/s dans le manteau intérieur (5500 km). Estimer la résolution spatiale de *Bigfoot* à une profondeur de 5500 km dans la bande autour de 0,1 Hz. Estimer la dimension du zone de Fresnel sur la surface de la Terre vue depuis cette profondeur et discuter pour quelles fréquences le réseau se trouve en champ lointain.

Exercice 4.6 *L'œil*

La prunelle de l'œil gère la luminosité incidente sur la rétine. Selon la luminosité elle a une dimension de 1.5 mm jusqu'à 7 mm dans le noir. Une image est projetée à une distance $a = 2,5$ cm sur la rétine.

1. Calculer la résolution angulaire de l'œil, prévue théoriquement. Jusqu'à quelle distance on arrive à discriminer deux objets séparés de 1 m?
2. Montrer que la prunelle dépasserait largement la première zone de Fresnel vue depuis la rétine, si la lentille n'existait pas. Supposer que la lentille est quadratique (Exercice 4.3) et montrer que la première zone de Fresnel s'élève à $d \approx 5$ mm. Conclusion?

4.2 Corrélation temporelle

Nous allons considérer la fameuse *double fente de Young*: deux fentes ayant une dimension qui est beaucoup plus petite que la longueur d'onde. Est incidente sur les deux fentes une onde qui est *parfaitement* plane mais qui est d'une nature stochastique en temps,

$$\langle \psi(t) \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \psi(t - \tau/2) \psi(t + \tau/2) \rangle = I \cos \omega_0 \tau C(\tau)$$

$C(\tau)$ est une fonction réelle paire qui décroît après une temps $\tau_c \gg 1/\omega_0$, appelé temps de cohérence. On a supposé que le signal est *stationnaire*, c'est à dire $\langle \psi(t - \tau/2) \psi(t + \tau/2) \rangle$ est indépendant du temps t et ne dépend que de l'écart temporel τ . La nature probabiliste que l'on a attribuée au champ est pour l'instant purement formel. Plus concrètement, si le signal est *ergodique* la moyenne d'ensemble peut être mesurée à partir de la moyenne temporelle

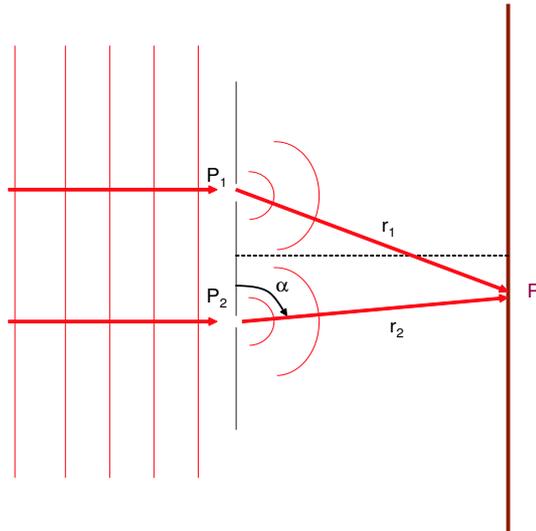
$$\langle \psi(t - \tau/2) \psi(t + \tau/2) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \psi(t - \tau/2) \psi(t + \tau/2)$$

La question fondamentale est la suivante: Y a-t-il des fringes visibles en déplaçant P sur l'écran? Avant de répondre à cette question on étudiera d'abord la décomposition spectrale du signal stochastique $\psi(\omega)$. Pour un

signal stationnaire on vérifie facilement que deux fréquences différentes sont forcément décorrelées: $\langle \psi(\omega)\psi^*(\omega') \rangle \sim \delta(\omega - \omega')$.

Définition: La puissance spectrale $S(\omega)$ d'un signal stationnaire $\psi(t)$ est définie par la relation

$$\langle \psi(\omega)\psi^*(\omega') \rangle = 2\pi S(\omega)\delta(\omega - \omega')$$



Théorème: $\mathcal{TF}[S(\omega)] = I \cos \omega_0 \tau C(\tau)$

Le théorème montre que le signal a une puissance spectrale qui est élargie autour de la fréquence centrale ω_0 , avec un élargissement typique $\Delta\omega \approx 1/\tau_c$. Par conséquent,

un signal stochastique stationnaire avec une longueur de cohérence $\tau_c \gg 1/\omega_0$ est équivalent à une succession de paquets d'ondes quasi-monochromatiques d'une durée τ_c , qui sont décorrelés les uns aux autres.

L'autre cas extrême est $\tau_c \ll 1/\omega_0$. Le théorème montre que le spectre devient plat, c'est à dire il est très peu dépendant de la fréquence. Dans la limite $\tau_c \rightarrow 0$, le signal stochastique converge vers un *bruit blanc*.

Démonstration:

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}[S(\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \psi(\omega)\psi^*(\omega') \rangle \exp(-i\omega t + i\omega' t) \exp(-i\omega\tau/2 - i\omega'\tau/2) \\ &= \langle \psi(t + \tau/2)\psi(t - \tau/2) \rangle = I \cos \omega_0\tau C(\tau) \end{aligned}$$

□

On calcule le flux moyen récupéré en P. Selon le principe de Huygens discuté dans la section précédente, les 2 fentes - séparées d'une distance a - se comportent comme des sources ponctuelles secondaires qui émettent des ondes sphériques suite à l'arrivée de l'onde plane $-\psi(P_{1,2}\omega) \exp(-i\omega t/c + kr)/4\pi r$. Puisque le flux est proportionnel à $|\psi(t)|^2$, le flux moyen est donné par,

$$\begin{aligned} \langle J_P \rangle &= \langle \psi(P, t)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \psi(P, \omega)\psi^*(P, \omega') \rangle \exp(-i\omega t + i\omega' t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \left| \frac{-\exp(ikr_1)}{4\pi r_1} + \frac{-\exp(ikr_2)}{4\pi r_2} \right|^2 \end{aligned}$$

On a $r_1^2 = r_2^2 + a^2 - 2ar_2 \cos \alpha$. On va supposer que l'écran est suffisamment loin tel que $ka^2/r_i \ll 1$: Les deux fentes se trouvent dans la première zone de Fresnel. La différence de phase entre les deux termes est approximativement égale à $kr_2 - kr_1 \approx ka \cos \alpha$,

$$\begin{aligned} \langle J_P \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2S(\omega)}{(4\pi r)^2} \left[1 + \cos \left(a \frac{\omega}{c_0} \cos \alpha \right) \right] \\ &= \frac{2I}{(4\pi r)^2} [1 + \cos(\omega_0\tau_f)C(\tau_f)] \end{aligned}$$

avec $\tau_f = a \cos \alpha / c$ la différence entre les temps de trajets des deux arrivées à P. Dans cette équation le premier terme décrit un fond qui ne dépend pas de la position de P à l'écran. Le deuxième terme contient un facteur oscillant en fonction de la position de P, et soulève donc la présence des fringes. Les fringes sont amortis par la décohérence temporelle $C(\tau)$. Dès que $\tau_f > \tau_c$ les fringes ne seront plus visibles.

Exercice 4.7 Soit λ la longueur d'onde et $\ell_c = c\tau_c \gg \lambda$ la longueur de cohérence du signal incident sur les fentes. On augmente la séparation entre les fentes de fur et à mesure. Vérifier les phrases suivantes.

1. Pour $\lambda > a$ il n'y a qu'un seul frange au centre de l'écran.
2. Pour $\lambda < a < \ell_c$ le nombre de fringes à l'écran est de l'ordre $1 + 2a/\lambda$.
3. Pour $\lambda < \ell_c < a$ le nombre de fringes à l'écran ne dépend plus de a et est de l'ordre $1 + 2\ell_c/\lambda$.

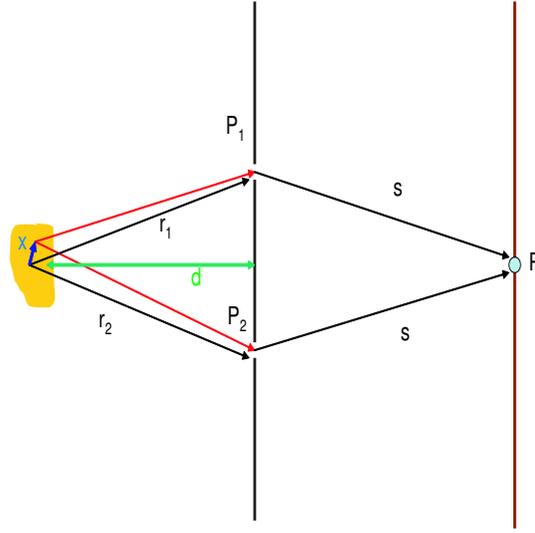
Exemple: Pour une décharge de gaz, l'élargissement spectrale est de l'ordre de 100 MHz, ce qui donne une longueur de cohérence autour de 3 m. Un laser à CO₂ bien stabilisé est caractérisé par une longueur d'onde autour de 10 μm et une élargissement spectrale de l'ordre de 10 kHz. La longueur de cohérence est donc 30 km. Le laser He-Ne, actif sur 633 nm et donc très souvent utilisé en optique, a une élargissement spectrale de 0,1 GHz, soit $\ell_c = 3$ m. Pour le laser le plus cohérent actuellement, le laser diode en état solide, l'élargissement spectrale est au dessous de 1 Hz. Il est donc cohérent sur une longueur de 300.000 km, soit la distance de la Terre à la Lune. Il est donc possible de déterminer par corrélation la distance Terre-Lune à une longueur d'onde près, soit une précision relative qui s'élève à 10^{15} !

4.3 Cohérence Spatiale

Dans cette section nous allons considérer une source monochromatique mais *étendue*. En principe les différentes parties de la source sont incohérentes entre elles, c'est à dire aucune relation de phase n'existe entre les champs émis par les différentes parties car les ondes ont été générées indépendamment les unes aux autres. En optique les sources élémentaires sont des atomes, donc de toute petite taille, et la radiation venant de différents atomes est indépendante. Par conséquent l'intensité moyenne mesurée à un point dans l'espace est simplement égale à la somme de toutes les intensités émises par les sources élémentaires qui varie très peu en espace.¹

On s'intéresse maintenant à la corrélation spatiale du champ loin de la source. La corrélation spatiale peut être mesurée en utilisant deux fentes P_1 et P_2 , séparée d'une distance a à une distance d de la source (voir la figure). Le signal mesuré en P sur l'écran contient une information sur la corrélation $\langle \psi(P_1)\psi^*(P_2) \rangle$. On trouve facilement que $\langle I(P_1) \rangle = \langle I(P_2) \rangle \equiv \langle I \rangle$ et

¹La terminologie "intensité" n'a pas encore été précisée. Elle fait appel à une mesure de l'énergie ondulatoire locale. L'intensité peut être définie comme $c_0 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$, avec la dimension Joules par m^2 par seconde



$$\langle I(P) \rangle \sim \frac{2\langle I \rangle}{s^2} \left(1 + \frac{\langle \psi(P_1)\psi^*(P_2) \rangle}{\langle I \rangle} \right)$$

On décrit la source $s(\mathbf{x})$ par une collection de sources ponctuelles, aléatoires et indépendantes et avec une luminosité $I(\mathbf{x})$, soit

$$\langle s(\mathbf{x})s^*(\mathbf{x}') \rangle = I(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Théorème (Van Cittert-Zernike): La corrélation angulaire du champ émis par une source étendue et lointaine est proportionnelle à la transformation de Fourier de la luminosité de la source:

$$\frac{\langle \psi(\mathbf{k}_1)\psi^*(\mathbf{k}_2) \rangle}{\langle I \rangle} = \mathcal{TF}[I(x)]$$

avec $\mathbf{k}_i = \omega\hat{\mathbf{r}}_i/c_0$.

Démonstration:

Le champ reçu à P_1 par une source élémentaire à la position x est proportionnelle à $-s(\mathbf{x})\exp(-i\omega t + ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}|)/r_1$. Une source de dimension x est lointaine si elle se trouve dans la première zone de Fresnel: $kx^2/2d \ll \pi$. Par conséquent, $\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{x}|) \approx \exp(ikr_1 - i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x})$. Puisque $r_1 = r_2$ la corrélation totale s'obtient en intégrant sur la source,

$$\begin{aligned}\langle \psi(\mathbf{r}_1)\psi^*(\mathbf{r}_2) \rangle &\propto \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \langle s(\mathbf{x})s^*(\mathbf{x}') \rangle \exp(-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}) \\ &= \int d\mathbf{x} I(\mathbf{x}) \exp[-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x}]\end{aligned}$$

□

Le théorème ouvre la possibilité de remonter à la luminosité de la source en mesurant la corrélation. On remarque que le théorème ne s'exprime pas sur la luminosité de la source perpendiculaire au champ de vue $\Delta\mathbf{k}$. La dimension angulaire du Soleil est de 0.16 degrés. La cohérence spatiale du Soleil sur Terre (0,1 mm) a été mesurée pour la première fois par Emile Verdet en 1869.

Exercice 4.8 La Terre se trouve-t-elle en champ lointain du Soleil pour les ondes visibles?

Un cas spécifique est un disque avec une luminosité uniforme I et une surface πa^2 . On trouve

$$\langle \psi(\mathbf{r}_1)\psi^*(\mathbf{r}_2) \rangle \propto \int d\mathbf{x}_S I \exp[-i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] = 2\pi I \int_0^a dx x J_0(\Delta k x)$$

avec $J_n(x)$ la fonction de Bessel de l'ordre n . Puisque $y^{-1}d/dy(yJ_1(y)) = J_0(y)$ on trouve,

$$\langle \psi(\mathbf{r}_1)\psi^*(\mathbf{r}_2) \rangle \propto \frac{J_1(\Delta k a)}{\Delta k a}$$

avec $\Delta k = 2k \sin(\Delta\theta/2) \approx k\Delta\theta$. Notons la ressemblance de ce résultat à ce qu'on a obtenue dans la section 4.1.1 pour le profil diffracté par un disque. Pourtant une différence importante existe entre les deux cas: en section 4.1.1 on parlait de l'illumination *cohérente* du disque. Ici l'onde incidente provient d'une source qui est *spatialement incohérente*.

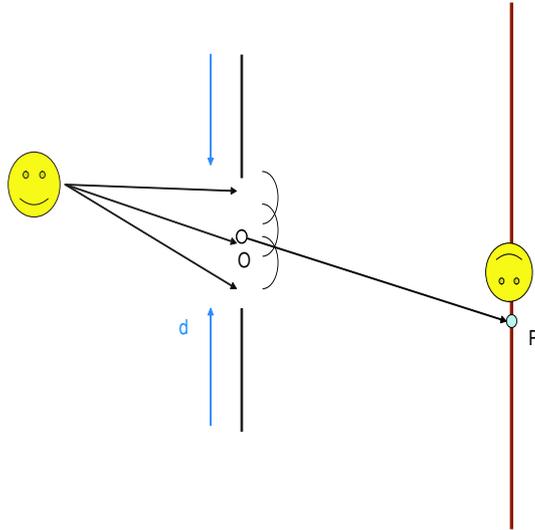
La corrélation oscille en fonction de $\Delta\theta$ (le profil d'Airy). Le premier zéro dans la corrélation est à $ak\Delta\theta = 3.83$. Cela correspond à une séparation des deux détecteurs P_1, P_2 ,

$$\Delta x = 0.61 \frac{\lambda}{\Delta\theta}$$

Exercice 4.9 Calculer Δx du premier zéro dans la corrélation du champ venant de l'étoile Betelgeuze, qui a une dimension angulaire $2 \cdot 10^{-4}$ mrad depuis la Terre. Discuter comment l'interférométrie stellaire peut servir afin de déterminer les dimensions des étoiles ou d'autres objets.

Exercice 4.10 *Camera Obscura*

Considérer une source incohérente et lointaine, d'une dimension angulaire $\Delta\Omega$ et d'une intensité $I(\mathbf{x})$. Elle illumine un disque S avec un diamètre d . Une image est obtenue sur l'écran à une distance a du centre O du disque, en déplaçant le détecteur P verticalement.



1. Démontrer que l'intensité mesurée en P s'obtient à partir d'un double intégrale sur le disque D , à la condition que S se trouve dans la première zone de Fresnel de P .

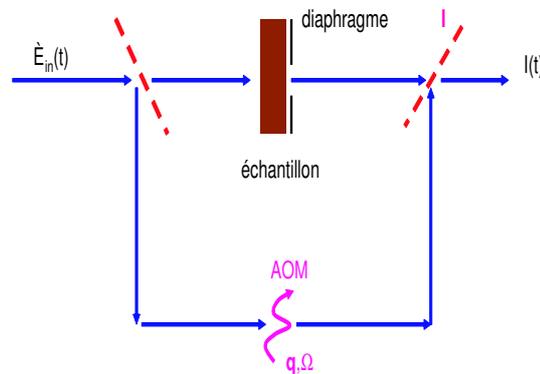
$$\langle |\psi(\mathbf{r}_P)|^2 \rangle \sim \frac{1}{a^2 \lambda^2} \int_D d^2 \mathbf{x} \int_D d^2 \mathbf{y} \langle \psi(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{y}) \rangle \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]$$

avec $\mathbf{k} = \omega \hat{\mathbf{r}}_P / c_0$

2. Pour $1, 22\lambda/\delta\theta \ll d \ll 2\sqrt{\lambda a}$ montrer que $\langle I(\mathbf{r}_P) \rangle$ fournit une image de la source $I(\mathbf{x})$, avec une luminosité proportionnelle à $(\Delta\Omega_D/\Delta\Omega)$, avec $\Delta\Omega_D = d^2/a^2$ l'ouverture angulaire du disque vue depuis l'écran.
3. Pour $d \ll 1, 22\lambda/\delta\theta$ montrer que $\langle I(\mathbf{r}_P) \rangle$ ne dépend plus de la source, et devient $|J_1(kd\theta_P/2)/(kd\theta_P/2)|^2$, avec θ_P l'angle de P vue depuis le disque S (section 4.1.1).

4.4 Détection Hétérodyne

En optique, avec des fréquences autour de 10^{14} Hz, il est difficile de mesurer l'amplitude directement. Le détecteur est incapable de suivre les oscillations des cycles et il nous fournira forcément une mesure de l'intensité moyennée sur les cycles. La détection hétérodyne consiste en faire interférer le signal désiré avec un signal de référence. Pour que la méthode hétérodyne fonctionne, le signal de référence doit provenir de la même source, qui à son tour a une cohérence temporelle très élevée.



Dans la figure une source continue $\psi(t)$ est incidente sur un échantillon. Elle a une puissance spectrale $S(\omega)$ centrée autour de la pulsation centrale ω_0 . En espace fréquence le signal transmis par l'échantillon est donné par $\psi_S(\omega) = \psi(\omega)T(\omega) \exp(-i\omega_0 t)$, avec $T(\omega)$ le coefficient complexe de transmission. Le signal incident est dévié par un *beamsplitter* et est ensuite soumis à un modulateur acousto-optique, qui sera discuté dans la section 5.4.3. Le signal sortant sera $\psi_{AOM}(\omega) = \exp(-i(\omega + \Omega)t)$, avec $\Omega \ll \omega$ typiquement dans les MHz. Les deux signaux interfèrent au point I . Un filtre spectral enlève toute fréquence plus petite que Ω . Soit τ le retard subis par le faisceau dévié. Le champ transmis acquiert une phase

$$\phi(\omega) \approx \phi_0 + \phi'_0(\omega - \omega_0)$$

Le temps ϕ'_0 pourrait être interprété comme *le temps de retard* subis par l'onde dans l'échantillon.

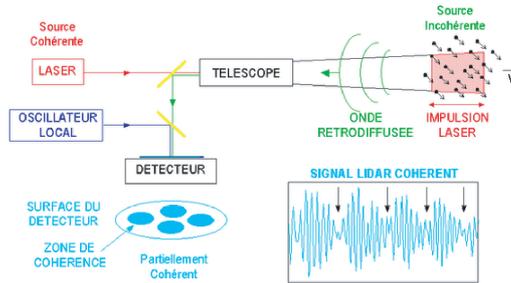
Exercice 4.11: Démontrer que la mesure hétérodyne est décrite par l'expression,

$$I(t) \sim |T(\omega_0)| \cos(\phi_0 + \omega_0\tau + \Omega t) C(\tau + \phi'_0)$$

avec $C(\tau)$ la fonction d'auto-corrélation temporelle de la source.

L'exercice 4.11 montre que, pour que l'oscillation ultrasonore soit mesurable, $|\tau + \phi'_0| \ll \tau_c$. On exige donc une cohérence temporelle élevée de la source pour que la méthode hétérodyne fonctionne. Cela ne pose aucun problème avec la génération actuelle des lasers. En plus, on peut s'arranger expérimentalement pour qu'il n'y ait pas de retard entre les faisceaux, autre que celui produit par l'échantillon. L'expression montre également que la cohérence temporelle de $I(t)$ est gouvernée par la qualité du modulateur, ici supposée "parfaitement" harmonique. La qualité de l'*oscillateur locale*, ici l'onde ultrasonore, est donc cruciale. Puisque le signal oscille à la fréquence Ω il suffit échantillonner $I(t)$ à un taux $T_0 < \pi/\Omega$ pour remonter au signal complexe transmis. Si l'échantillonnage s'effectue durant un temps $T \gg T_0$ la résolution spectrale sera de l'ordre $\Delta\omega \simeq 2\pi/T$ (rappeler l'Exercice 2.6).

Exercice 4.12: LIDAR hétérodyne

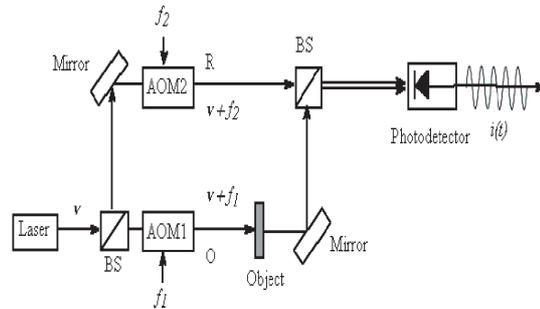


Source: SIRTA (Site Instrumental de Recherche par Télédétection Atmosphérique).

Le LIDAR (*light detection and ranging*) permet d'étudier l'atmosphère depuis la Terre en utilisant un faisceau laser, souvent un laser CO_2 avec une longueur d'onde $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$ et une élargissement spectral de 10 kHz. Dans sa version "Doppler hétérodyne" le champ réfléchi est mélangé avec un oscillateur local à $\Omega/2\pi = 30 \text{ MHz}$. Montrer que le signal réfléchi d'un vent de vitesse radiale v oscille comme $\cos[\phi_0 + (\Delta\omega + \Omega)t]$, avec $\Delta f = -2v/\lambda$ le décalage de Doppler. En échantillonnant sur 60 MHz pendant 100 μs , quelles sont les vitesses v mesurables, et avec quelle précision? Quelle est la portée maximale de la télé-détection?

Exercice 4.13: Souvent deux oscillateurs acoustiques sont employées pour réaliser la détection hétérodyne.

1. Expliquer l'avantage des deux oscillateurs avec des fréquences f_1 et f_2 qui sont légèrement différentes.



2. Expliquer l'avantage si l'un des oscillateurs locaux est branché sur une partie de l'échantillon même (on parle des *photons marqués*).

Chapter 5

Diffraction et Diffusion

Dans ce chapitre on discute comment la propagation d'une onde est affectée par la présence d'un ou plusieurs obstacles. Il est évident que cette étude aura de nombreuses applications et quelques unes seront discutées, comme le radar, la diffusion quasi-élastique, et la holographie. Si l'obstacle est d'une taille plus petite que la longueur d'onde, le principe de Huygens nous informe déjà que l'obstacle agira comme source secondaire et une onde sphérique sera émise.

Nous allons préciser cette prédiction en utilisant l'équation d'onde. Pour simplifier la discussion on fera souvent appel à l'équation scalaire, valable pour la pression acoustique à constante densité.

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \partial_t^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

Pour faciliter l'analyse, il convient de formuler l'équation d'onde plus formellement, en utilisant l'opérateur différentiel $\mathbf{p} = -i\nabla$ et l'opérateur de multiplication \mathbf{r} . On introduit la notation de Dirac $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$, avec $|\psi\rangle$ un élément dans un espace de Hilbert à définir. L'espace de Hilbert doit être équipé d'un produit scalaire. On le définit par la relation,

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int d^3\mathbf{r} \psi(\mathbf{r})^* \phi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \psi(\mathbf{k})^* \phi(\mathbf{k})$$

La deuxième égalité fait appel à la relation de Parseval pour les coefficients de Fourier. L'avantage de la notation de Dirac est surtout l'élégance de la transformation de Fourier, qui se révèle comme un changement de base dans

l'espace de Hilbert. Le produit scalaire montre que $|\mathbf{r}\rangle$ est en fait la notation de Dirac pour un pic de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Soit $|\mathbf{k}\rangle$ la notation de Dirac pour une onde plane avec vecteur d'onde \mathbf{k} , et donc $\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. Par conséquent, $\langle \mathbf{k}|\psi\rangle$ représente le coefficient de Fourier de $\psi(\mathbf{r})$, et on a

$$\langle \mathbf{r}|\psi\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}|\psi\rangle$$

Cette transformation pourrait être considérée comme une manifestation de la relation de clôture pour la base $|\mathbf{k}\rangle$,

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = 1$$

L'orthonormalité de cette base s'exprime comme

$$\langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Dans l'espace de Hilbert, l'équation scalaire prend donc la forme

$$\left[\frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \partial_t^2 + \mathbf{p}^2 \right] |\psi(t)\rangle = 0$$

Exercice 5.1 Trouver une expression dans l'espace de Hilbert pour l'énergie totale (cinétique + potentielle) de l'onde scalaire.

5.1 Fonction de Green

On définit l'opérateur de Green $G(t, t')$ comme la solution de l'équation d'onde pour une source au temps t . La dérivée seconde par rapport aux temps exige une précision supplémentaire pour que la solution soit unique.

Définition: L'opérateur de Green causale $G^+(t, t')$ (anti-causale $G^-(t, t')$) est défini par

$$\left[\frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right] G^\pm(t, t') = \delta(t - t')$$

avec $G^+(t, t') = 0$ et $\partial_t G^+(t, t') = 0$ pour $t < t'$; de même: $G^-(t, t') = 0$ et $\partial_t G^-(t, t') = 0$ pour $t > t'$.

On s'attend à ce que $G^\pm(t, t') = G^\pm(t - t')$. On montre facilement que, pour $\epsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp[i\omega\tau - \epsilon\tau] \partial_\tau^2 G^+(\tau) = -(\omega + i\epsilon)^2 G^+(\tau)$$

Donc, on trouve la formulation suivante pour la transformation de Fourier de l'opérateur de Green causale,

$$G^+(\omega) = \frac{1}{(\omega + i\epsilon)^2 / c(\mathbf{r})^2 - \mathbf{p}^2}$$

Quelques propriétés utiles sont faciles à vérifier

- Les deux opérateurs de Green sont liés par la relation $G^+(\omega) = G^-(-\omega)$.
- Puisque \mathbf{p}^2 est un opérateur réel (les valeurs propres sont réelles), on constate que $G^+(\omega)$ est analytique pour toutes les fréquences complexes ayant $\text{Im } \omega > 0$. De même, $G^-(\omega)$ est analytique partout dans le plan $\text{Im } \omega < 0$.
- Les singularités de l'opérateur de Green $G^\pm(\omega)$ sont associées aux modes propres du milieu à la fréquence ω . En particulier, dans un milieu homogène la loi de dispersion est déterminée par les singularités de l'opérateur de Green.

La *fonction de Green* est définie comme l'opérateur de Green évalué en espace réelle, soit

$$G^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \langle \mathbf{r} | G^\pm(\omega) | \mathbf{r}' \rangle$$

Théorème (de la réciprocité spatiale) Soit $c(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})/\xi$, avec $f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^+$ et ξ une constante avec $\text{Im } \xi \geq 0$. Alors

$$G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = G^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega)$$

Il existe de nombreuses autres formulations de la réciprocité spatiale, parfois plus fortes, et souvent en incluant les composantes de la polarisation. Notons que dans les conditions ci-dessus, l'absorption est autorisée, à la condition qu'elle suive la même dépendance spatiale que la vitesse locale.

Démonstration

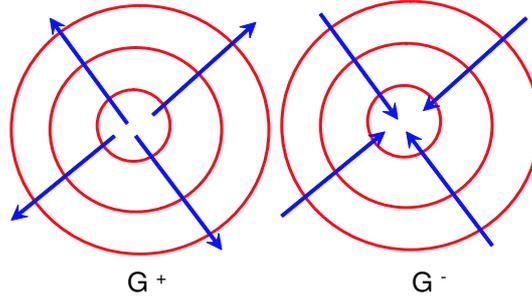
Puisque l'opérateur $f(\mathbf{r})\mathbf{p}^2 f(\mathbf{r})$ est hermétique et positive, il permet une décomposition spectrale de ses fonction propres $|U_\alpha\rangle$ associées aux valeurs propres ω_α^2 . En plus, l'opérateur est réel en espace \mathbf{r} , et on a donc la liberté de choisir $U_\alpha(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$. L'opérateur de Green se décompose comme,

$$\begin{aligned} G^+(\omega) &= f(\mathbf{r}) [(\omega + i\epsilon)^2 \xi^2 - f(\mathbf{r})\mathbf{p}^2 f(\mathbf{r})]^{-1} f(\mathbf{r}) \\ &= \int_\alpha f(\mathbf{r}) |U_\alpha\rangle [(\omega + i\epsilon)^2 \xi^2 - \omega_\alpha^2]^{-1} \langle U_\alpha | f(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Puisque $f(\mathbf{r})$ et $U_\alpha(\mathbf{r})$ sont réels, on obtient pour la fonction de Green,

$$G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\omega) = \int_\alpha f(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}') U_\alpha(\mathbf{r}) U_\alpha(\mathbf{r}') [(\omega + i\epsilon)^2 \xi^2 - \omega_\alpha^2]^{-1}$$

Cette expression est manifestement réciproque. \square



On obtient la fonction de Green dans une espace homogène et isotrope avec vitesse c . Grâce à l'homogénéité de l'espace, on a $\langle \mathbf{k} | G^\pm(\omega) | \mathbf{k}' \rangle = G^\pm(\omega, k) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | G^\pm(\omega) | \mathbf{r}' \rangle &= G^\pm(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{(\omega \pm i\epsilon)^2/c^2 - k^2} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\sin k\Delta r}{k\Delta r} \frac{1}{(\omega \pm i\epsilon)^2/c^2 - k^2} \end{aligned}$$

Exercice 5.2 Appliquer le théorème de Cauchy pour obtenir

$$G_0^\pm(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(\pm i\omega r/c)$$

En rajoutant l'harmonique $\exp(-i\omega t)$ on constate que G^+ représente une *onde sphérique divergente*, alors que G^- représente une *onde sphérique convergente*.

Exercice 5.3 Montrer que le flux total émis par G^\pm est égal à $J^\pm = \pm\omega^2/4\pi c_0$ et ne dépend pas de la distance r .

Exercice 5.4

1. Formuler l'équation à laquelle doit obéir la fonction de Green de Helmholtz.
2. Démontrer que pour le vide

$$\mathbf{G}_0^+(\omega, \mathbf{k}) = \frac{c_0^2 \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}}{(\omega + i\epsilon)^2} + \frac{1 - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}}{(\omega + i\epsilon)^2/c_0^2 - k^2}$$

3. Argumenter que la fonction de Green $\mathbf{G}^+(\omega, \mathbf{r})$ aura une contribution $\frac{1}{3\omega^2} \delta(\mathbf{r})$, appelée le terme de contact de Lorentz.
4. (pour les courageux) Démontrer que pour $x \gg \lambda$ la fonction de Green causale est donnée par l'expression

$$\mathbf{G}_0^+(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1 - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r} \exp(i\omega r/c)$$

5.2 Matrice de diffraction

On reprend l'équation établie en Chapitre 2 pour la les ondes scalaires,

$$[\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}, \omega)] |\psi(\omega)\rangle = E(\omega) |\psi(\omega)\rangle$$

avec "l'interaction" $V(\mathbf{r}, \omega) \equiv [1/c_0^2 - 1/c^2(\mathbf{r})]\omega^2$ et "l'énergie" $E(\omega) = \omega^2/c_0^2$. La ressemblance de cette équation à l'équation de Schrödinger nous permettra à développer une théorie de diffraction comme on peut la trouver dans les livres de la mécanique quantique.

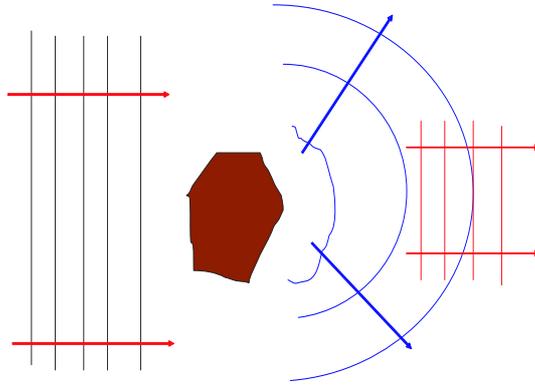
Considérons une onde scalaire monochromatique $|\phi_{\text{inc}}(\omega)\rangle$, incidente sur un obstacle avec un potentiel $V(\mathbf{r}, \omega)$. Suffisamment loin de l'obstacle, on s'attend à ce que le champ sera décrit par une onde sphérique divergente depuis le

centre de l'obstacle, superposée par ce qu'il reste de l'onde incidente. On écrit,

$$|\psi(\omega)\rangle = |\psi_{\text{inc}}(\omega)\rangle + |\psi_S(\omega)\rangle$$

$|\psi(\omega)_{\text{inc}}\rangle$ est solution de l'équation sans interaction, $[E - p^2]|\psi_{\text{inc}}\rangle = 0$. Il est facile à montrer que,

$$|\psi_S(\omega)\rangle = [E - \mathbf{p}^2 - V(\mathbf{r})]^{-1}V(\mathbf{r})|\psi_{\text{inc}}(\omega)\rangle = G(\omega)V(\mathbf{r})|\psi_{\text{inc}}(\omega)\rangle$$



On avait vu que deux opérateurs de Green existent, le causale, et l'anti-causale. Lequel des deux s'applique ici? C'est une question délicate avec une réponse "formelle" et une réponse "informelle". Les deux arrivent à la même conclusion. La réponse "formelle" fait appel à la propagation d'un paquet d'onde en espace-temps. A la fin on prend la limite (délicate) où ce paquet d'onde tend vers une onde plan avec une énergie infinie, mais avec une fréquence précise. Cette procédure montre que la fonction de Green $G^+(\omega + i\epsilon)$ apparaît dans l'expression dessus. La réponse "formelle" se sert du résultat obtenu dans la section précédente: en espace réelle $G^+(\omega + i\epsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ représente une onde divergente, à laquelle on s'attend ici. Le choix de $G^-(\omega - i\epsilon)$ serait absurde...

On peut développer l'opérateur de Green $G^+(\omega + i\epsilon)$ en fonction de $G_0^+(\omega + i\epsilon)$, l'opérateur de Green causale sans interaction. On a,

$$G^+(\omega + i\epsilon) = [G_0^+(\omega + i\epsilon)^{-1} - V(\mathbf{r}, \omega)]^{-1} = G_0^+(\omega + i\epsilon) [1 - V(\mathbf{r}, \omega)G_0^+(\omega + i\epsilon)]^{-1}$$

Ce résultat nous mène à la définition suivante,

Définition: Opérateur de diffraction $T(\omega)$

$$T(\omega) \equiv [1 - V(\mathbf{r}, \omega)G_0^+(\omega + i\epsilon)]^{-1} V(\mathbf{r}, \omega)$$

On pourrait formellement développer cette expression en série de Taylor comme $T = V + VG_0V + \dots$. Dans de nombreux cas cette série ne converge pas. Cependant, cette expansion nous fournit une interprétation physique de la matrice de diffraction: diffraction simple de l'objet, diffraction - propagation dans l'objet - diffraction, etc ... On parle de la *série de Born*.

Le champ diffracté s'écrit comme $|\psi(\omega)_S\rangle = G_0^+(\omega)T(\omega)|\psi_{\text{inc}}(\omega)\rangle$. En espace réelle,

$$\psi_S(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{x} \langle \mathbf{r} | G_0^+(\omega) | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | T(\omega) | \mathbf{k}_{\text{in}} \rangle$$

Pour un observateur en champ lointain, i.e. si l'obstacle se trouve dans la première zone de Fresnel de l'observateur, on a le droit d'approximer $|\mathbf{r} - \mathbf{x}| \approx r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}$. On introduit le vecteur d'onde sortant $\mathbf{k}_{\text{out}} = \omega \hat{\mathbf{r}} / c_0$ avec le résultat que,

$$\begin{aligned} \psi_S(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{x} \frac{-\exp(i\omega r / c_0)}{4\pi r} \exp(-i\mathbf{k}_{\text{out}} \cdot \mathbf{x}) \langle \mathbf{x} | T(\omega) | \mathbf{k}_{\text{in}} \rangle \\ &= \frac{-\exp(i\omega r / c_0)}{4\pi r} \langle \mathbf{k}_{\text{out}} | T(\omega) | \mathbf{k}_{\text{in}} \rangle \end{aligned}$$

On introduit l'amplitude de diffraction comme,

$$T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega) \equiv \langle \mathbf{k} | T(\omega) | \mathbf{k}' \rangle$$

de sorte que

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\exp(i\mathbf{k}_{\text{out}} \cdot \mathbf{r})}{4\pi r} T_{\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{k}_{\text{in}}}(\omega)$$

Cette expression confirme notre hypothèse que l'onde est composée d'une superposition de l'onde incidente et une onde sphérique divergente. Notons que l'amplitude de transition a été défini pour des vecteurs d'onde arbitraires, alors que pour la description du champ diffracté seulement les vecteurs avec $|\mathbf{k}_{\text{out}}| = |\mathbf{k}_{\text{in}}| = \omega/c_0$ interviennent. Dans ce cas, on appelle la matrice T *sur couche* (en anglais: "*on-shell*"), c'est à dire k se trouve sur la couche à constante fréquence dans l'espace de phase (k_x, k_y, k_z) .

Exercice 5.5 Pour les ondes de matière ("Schrödinger sans spin") l'interaction $V(\mathbf{r})$ ne dépend pas de l'énergie E . On introduit le vecteur

$$|\psi_{\mathbf{k}}^+\rangle = [1 + G_0^+(E)T(E)] |\mathbf{k}\rangle$$

avec $E = k^2$.

1. Démontrer que $|\psi_{\mathbf{k}}^+\rangle$ est une fonction propre de l'opérateur $\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r})$, avec la valeur propre E .
2. Argumenter que pour les ondes de matière, les fonctions $|\psi_{\mathbf{k}}^+\rangle$ fournissent une base orthogonale de l'espace de Hilbert correspondant au spectre continue de l'opérateur $p^2 + V$. Pourquoi cette conclusion n'est-elle pas valable pour les ondes scalaires? Soit $|\psi_{\mathbf{k}}^+(\omega')\rangle$ la fonction propre de $\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}, \omega')$, avec ω' fixée et pas forcément égale à kc_0 . Qu'est qu'on peut dire sur les vecteurs $|\psi_{\mathbf{k}}^+(\omega')\rangle$ des ondes scalaires?
3. Etablir l'identité $\langle \mathbf{k}' | V(\mathbf{r}, \omega) | \psi_{\mathbf{k}}^+(\omega) \rangle = T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(\omega)$, avec \mathbf{k} sur couche .
4. Démontrer que la polarisation totale d'un objet diélectrique induite par une onde plane électromagnétique $\mathbf{g} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ est reliée à l'amplitude de diffraction *hors couche* selon $\mathbf{P}(\omega) = -(4\pi k^2)^{-1} T_{\mathbf{0}\mathbf{k}}(\omega) \cdot \mathbf{g}$.

5.2.1 Section efficace

La propriété la plus importante et sans aucune doute la mieux connue de la diffraction d'une onde par un obstacle est la section efficace. Elle décrit la surface vue par les ondes. On rappelle du Chapitre 1 que le courant d'énergie par unité de surface est donnée par $\mathbf{J} = -\text{Re } \partial_t \psi \nabla \psi^*$. En champ lointain de l'obstacle et pour $\mathbf{k}_{\text{in}} \neq \mathbf{k}_{\text{out}}$, le courant est donc donné par

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \omega (\mathbf{k}_{\text{out}} \cdot d\mathbf{A}) \frac{T_{\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{k}_{\text{in}}}(\omega)}{(4\pi r)^2}$$

$d\mathbf{A}$ est une surface infinitésimal avec \mathbf{k}_{out} comme vecteur normal. Puisque l'angle solide créée par cette surface est $d\Omega = dA/r^2$, le flux diffracté dans l'angle solide $d\Omega$ est

$$dI_S = d\Omega \omega k_{\text{out}} \frac{T_{\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{k}_{\text{in}}}(\omega)}{(4\pi)^2}$$

et ne dépend pas de la distance d'observation. La densité de flux incident est donnée par $J_{\text{in}} = \omega k_{\text{in}}$. La conclusion est que le flux diffusé et la densité de flux incident sont liés par

$$\frac{dI_S}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}_{\text{in}} \rightarrow \mathbf{k}_{\text{out}}) J_{\text{in}}$$

avec la section efficace différentielle

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}_{\text{in}} \rightarrow \mathbf{k}_{\text{out}}) = \frac{|T_{\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{k}_{\text{in}}}(\omega)|^2}{(4\pi)^2}}$$

Sa dimension est m^2 par steradian. La section efficace totale est obtenue en intégrant sur les angles de l'angle sortante, soit

$$\sigma(\mathbf{k}_{\text{in}}) = \int d\Omega \frac{|T_{\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{k}_{\text{in}}}(\omega)|^2}{(4\pi)^2}$$

Théorème Optique: Soit $c(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r})^\dagger$. Alors

$$\boxed{\int d\Omega \frac{|T_{\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{k}_{\text{in}}}(\omega)|^2}{(4\pi)^2} = -\frac{c_0}{\omega} \text{Im} T_{\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{k}_{\text{in}}}(\omega)}$$

Démonstration

On commence par l'observation que les fonctions propres $|\psi_{\mathbf{k}}^+(\omega')\rangle$ sont vecteurs propres de l'opérateur $\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}, \omega')$, avec la valeur propre $\omega^2 = k^2 c_0^2$ (voir exercice 5.5). On a donc la décomposition spectrale de l'opérateur de Green,

$$G^+(\omega) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\psi_{\mathbf{k}}^+(\omega')\rangle \langle \psi_{\mathbf{k}}^+(\omega')|}{(\omega + i\epsilon)^2 / c_0^2 - k^2}$$

et puisque $(x + i\epsilon)^{-1} - (x - i\epsilon)^{-1} = -2\pi i \delta(x)$ lorsque $\epsilon \downarrow 0$,

$$G^+(\omega) - G^+(\omega)^\dagger = -2\pi i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_{\mathbf{k}}^+(\omega')\rangle \langle \psi_{\mathbf{k}}^+(\omega')| \delta(\omega^2 / c_0^2 - k^2)$$

Cette expression se limite à la couche $\omega^2/c_0^2 = k^2$, et on peut choisir $\omega = \omega'$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int d\Omega_{\mathbf{k}'} |T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)|^2 &= \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \delta(\omega^2/c_0^2 - k'^2) (2\pi)^3 \frac{2k'}{k'^2} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \bar{T}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{16\pi^3}{k'} \delta(\omega^2/c_0^2 - k'^2) \langle \mathbf{k} | V(\omega) | \psi_{\mathbf{k}'}^+(\omega) \rangle \langle \psi_{\mathbf{k}'}^+(\omega) | V^\dagger(\omega) | \mathbf{k} \rangle \\
&= \frac{16\pi^3 c_0}{\omega} \frac{1}{-2\pi i} \langle \mathbf{k} | V(\omega) [G^+(\omega) - G^+(\omega)^\dagger] V(\omega) | \mathbf{k} \rangle \\
&= (4\pi)^2 \frac{c_0}{-2i\omega} (T_{\mathbf{k}\mathbf{k}} - \bar{T}_{\mathbf{k}\mathbf{k}})
\end{aligned}$$

□

Exercice 5.6 Modèle de Fermi.

Supposer que la diffraction soit isotrope.

1. Démontrer que la section efficace totale ne peut dépasser la *limite unitaire* λ^2/π , avec λ la longueur d'onde.
2. Démontrer que l'amplitude de diffraction prend la forme,

$$T(\omega) = \frac{4\pi}{a(\omega)^{-1} + i\omega/c_0}$$

avec $a(\omega) \in \mathbb{R}$ la longueur de diffraction. Ce modèle s'applique pour les ondes de matière à basse énergie (par exemple les atomes froids).

Le théorème optique exprime la conservation de flux en absence d'absorption. Le flux total diffracté est enlevé de l'onde incidente. C'est facile à démontrer pour le modèle de Fermi. Dans ce cas la diffraction est isotrope et le champ est donnée par $\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - t(\omega) \exp(i(k+i\epsilon)r)/4\pi r$. Par conséquent, lorsque $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \text{Im}(\psi^* \nabla \psi) \\
&= \mathbf{k} + \frac{|t|^2 k \hat{\mathbf{r}}}{(4\pi r)^2} - \text{Im} \frac{itk \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r} \exp(ikr - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \text{Im} \frac{it^* \mathbf{k}}{4\pi r} \exp(-ikr + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})
\end{aligned}$$

Le flux total transmis à travers la surface $4\pi r^2$ loin du diffuseur devient,

$$\oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = r^2 \int_{4\pi} d\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J} \rightarrow \frac{|t|^2 k}{4\pi} + \text{Im } t$$

Pour obtenir cette expression on a utilisé $\int_{4\pi} d\hat{\mathbf{r}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 4\pi \sin(kr)/kr$. En plus dans la limite $r \rightarrow \infty$ les termes oscillantes $\exp(2ikr)$ disparaissent formellement. Le théorème optique nous montre donc effectivement que,

$$\oint d\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} = 0$$

5.2.2 Diffraction du son par une bulle

L'oscillation d'une bulle d'air dans un liquide est un problème fondamentale avec de nombreuses applications à la fois en physique fondamentale (la sonoluminescence, l'émission des photons par une bulle oscillante) et en physique appliquée (l'industrie alimentaire).

Nous allons considérer ici un cas simplifié de la diffraction d'une onde plane acoustique $p_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ par une bulle d'air située à $\mathbf{r} = 0$. Nous allons supposer que la longueur d'onde est grande devant le rayon a de la bulle. Dans ce cas la pression dans la bulle est uniforme et égale à $P + p(0)$, avec P la pression hydrostatique et $p(0)$ le changement de pression suite au passage de l'onde. On néglige la viscosité du liquide, et le son n'est donc pas absorbé. Enfin, on négligera la tension élastique à l'interface air-liquide, ce qui implique que la pression est continue à l'interface. On s'attend à ce que le champ diffracté soit isotrope. Donc pour $r > a$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_{\text{in}} \exp(-i\omega t) \left[\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} t(\omega) \right]$$

$k = \omega/c$ avec c la vitesse du son dans le liquide. A l'intérieur de la bulle l'onde incidente $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \approx 1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots$. Le deuxième terme modifie la surface à constante pression légèrement, mais en moyenne elle reste sphérique. On met donc $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \approx 1$. La continuité de la pression à l'interface nous mène à

$$p(0) = p_{\text{in}} \left[1 - t \left(\frac{1}{4\pi a} + \frac{ik}{4\pi} \right) \right]$$

Puisque les oscillations de la bulle sont supposées adiabatiques, la pression à l'intérieur de la bulle obéit à $[P + p(0)](V + \delta V)^\gamma = \text{constante}$, soit

$$\frac{p(0)}{P} = -\gamma \frac{\delta V}{V} = -\frac{3\gamma x}{a}$$

avec x la variation du rayon de la bulle. L'oscillation du liquide à l'interface obéit à la deuxième loi de Newton,

$$-\omega^2 \rho x(\omega) = -\partial_r p(r)|_{r=a} = -\left(\frac{1 + \mathcal{O}(ka)^2}{4\pi a^2}\right) t(\omega) p_{\text{in}}$$

En éliminant x et $p(0)$ on obtient pour l'amplitude de diffraction,

$$t(\omega) = \frac{4\pi a}{\omega_0^2/\omega^2 - 1 + i\omega a/c_l}$$

On a introduit la fréquence de résonance $\omega_0 \equiv a^{-1} \sqrt{3\gamma P/\rho}$; ρ est la densité de masse du liquide. Rappelons (exercice 1.1) que $c = \sqrt{\gamma P/\rho_g}$ est la vitesse du son dans la bulle. On trouve donc $k_g a = \sqrt{3\rho_g/\rho}$ sur la résonance. A température ambiante on a $\rho_g = 1,3 \text{ kg/m}^3$, et $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, et donc $k_g a = 0.062$. Puisque $0.062 \ll 1$ la bulle est petite devant la longueur d'onde, même bien au delà de la fréquence de résonance.

Il est facile à montrer que l'amplitude t satisfait le théorème optique discuté dans la section précédente. La conservation d'énergie est donc garantie. Pour les très basses fréquences $\omega \ll \omega_0$ la section efficace varie comme ω^4 . On verra dans la section suivante que cette expression s'applique aussi aux ondes électromagnétiques diffractées par un dipole atomique. Sur la résonance, la section efficace atteint la limite unitaire, $\sigma = \lambda^2/\pi$, qui est *beaucoup plus élevée* (par un facteur 20.000!) que la surface géométrique πa^2 de la bulle.

5.2.3 Diffraction de la lumière par un oscillateur atomique

La dimension d'un atome est petite devant la longueur d'onde visible. Il est excité par une onde plane électromagnétique incidente. Une simplification consiste à négliger le fait que la polarisation longitudinale du champ électromagnétique se comporte différemment que les deux composantes transverses. Ce modèle nous fournira une description classique de la diffraction d'un photon par un atome avec une transition optique à la fréquence ω_0 .

Considérons un électron avec charge $-e$ et masse m_e , tenue par une force atomique. L'électron se met à osciller dès que l'onde plane \mathbf{E}_{in} arrive. Pour des petites amplitudes x l'oscillation est harmonique avec la fréquence propre ω_0 . Une charge oscillante émet de l'énergie électromagnétique. On s'attend donc à ce que l'oscillation soit amortie afin de garantir la conservation d'énergie. On propose l'équation pilote

$$m_e \partial_t^2 \mathbf{x} + \gamma \partial_t \mathbf{x} + m_e \omega_0^2 \mathbf{x} = -e \mathbf{E}_{\text{in}} \exp(-i\omega t)$$

avec $\gamma > 0$ un coefficient qui décrit une friction phénoménologique, proportionnelle à la vitesse de l'électron. La solution stationnaire est évidemment,

$$\mathbf{x}(t) = \frac{e/m_e}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega/m} \mathbf{E}_{\text{in}} \exp(-i\omega t)$$

Puisque le moment dipolaire est $\mathbf{p} = -e\mathbf{x}$, la densité de polarisation est $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = -e\mathbf{x}(\omega)\delta(\mathbf{r})$. En négligeant le champ longitudinal, l'équation de Helmholtz est,

$$-\frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \mathbf{E} - \mathbf{p}^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c_0^2} \partial_t^2 \mathbf{P}$$

La quantité $4\pi \partial_t^2 \mathbf{P}(\mathbf{r})/c_0^2 = 4\pi\omega^2 e\mathbf{x}(\omega)\delta(\mathbf{r})$ apparaît comme source ponctuelle. Par conséquent elle produit une onde sphérique, avec une amplitude de diffraction,

$$t(\omega) = \frac{4\pi r_e \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega/m_e}$$

où $r_e \equiv e^2/m_e c_0^2 = 2,8 \cdot 10^{-6}$ nm est le rayon classique d'un électron. Pour les fréquences $\omega > \omega_0$ la section $\sigma = |t|^2/4\pi$ converge vers $\sigma_T = 4\pi r_e^2$, appelée *la section efficace de Thomson*¹.

Exercice 5.7 *The run-away problem d'Abraham-Lorentz*

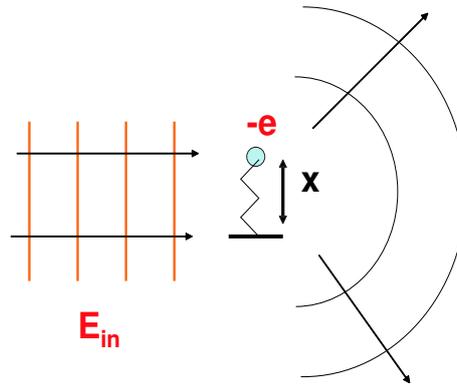
1. En insistant sur la conservation d'énergie sur la fréquence propre, établir la relation $\gamma = m_e \omega_0^2 r_e^2 / c_0$ pour le coefficient de friction phénoménologique. Démontrer ensuite que le facteur de qualité de l'oscillateur atomique est donnée par la relation

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx 2 \frac{\lambda_0}{r_e} \approx 10^8$$

¹En réalité la polarisation longitudinale n'est pas active dans la diffraction et on a un facteur 2/3 supplémentaire. Dans ce cas $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$.

C'est grand!

2. Démontrer que le théorème optique est violé pour les fréquences autre que la fréquence propre de l'oscillateur. Abraham et Lorentz ont donc argumenté que la friction sentie par l'électron n'est pas proportionnelle à $-\gamma\partial_t x$ mais serait plutôt proportionnelle à $+\gamma\partial_t^3 x$. Quelle serait la conclusion dans ce cas? Démontrer que l'amplitude de diffraction aura un pôle $\omega = ic_0/r_e$ dans le plan complexe. Pourquoi ce pôle posera-t-il un problème?
3. En général une transition atomique satisfait $Q < 10^8$. Pourquoi?



5.2.4 Radar

Le radar est un système qui utilise les ondes de grande longueur d'onde pour détecter et déterminer la distance et/ou la vitesse d'objets tels que les avions, bateaux, ou encore la pluie. Un émetteur envoie des ondes, qui sont réfléchies par la cible et détectées par un récepteur, souvent situé au même endroit que l'émetteur. La position est estimée grâce au temps de retour du signal et la vitesse est mesurée à partir du changement de fréquence du signal par effet Doppler. Évidemment on souhaite une portée aussi longue que possible, et une probabilité élevée de détection. On s'intéresse à une variété de propriétés de l'objet, telles que sa position, sa taille ou sa vitesse. D'habitude on utilise des micro-ondes avec des fréquences $f = 0,1 - 100$ GHz ($\lambda = 3 \text{ m} - 3 \text{ mm}$). Pour le radar MESTA 210, trouvé partout sur les autoroutes et les routes nationales, la fréquence centrale est de 24,125 GHz ($\lambda \approx 1 \text{ cm}$), avec une portée autour de 50 m. Ce radar est capable - par l'effet Doppler - de mesurer des vitesses avec une précision de 1 km/h.



Le principe de fonctionnement d'un radar est le suivant: émission - propagation - réflexion de l'objet - propagation - détection. Cette opération est répétée chaque intervalle τ_r appelé PRI (*pulse repetition interval*). La fréquence de répétition $f_R = 1/PRI$ est appelée PRF (*Pulse repetition frequency*) et qui varie entre 100 Hz à 100 kHz selon l'application. La durée de l'émission τ est normalement négligeable devant le temps d'aller-retour $2r/c_0$ du signal.

Exercice 5.8

1. Montrer que la portée maximale théorique du radar est donnée par $r < c_0/2f_R$, soit $r < 150$ km pour une PRF $f_R = 1$ kHz, et $r < 1,5$ km pour $f_R = 100$ kHz.
2. Le décalage Doppler est donnée par l'équation $\Delta f = -2v/c_0$ Montrer que la vitesse maximale qu'on peut mesurer sans ambiguïté est égale à $v = f_R\lambda/2$.
3. Conclure sur le choix de la PRF du radar.

Pendant l'émission un disque D de surface A est excitée par une taux d'énergie P_T . En absence de pertes, une puissance $P_T d\Omega(\theta, \phi)/4\pi$ est radiée en moyenne par unité d'angle solide $d\Omega(\theta, \phi)$. On s'attend à ce que l'onde générée soit fortement focalisée vers l'avant lorsque $A \gg \lambda^2$. Le *gain radar* $G(\Omega)$ est défini comme le rapport entre la puissance émise dans une certaine direction la puissance moyenne par angle solide,

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{P_T} \frac{dP_D}{d\Omega}$$

Selon le principe de Huygens discuté en section 4.1.1, l'intensité diffractée par le disque en champ lointain est donné par

$$\frac{dP_D}{d\Omega} = P_T \frac{4k^2 A}{(4\pi)^2} |F(\theta, \phi)|^2$$

Puisque $F(0, 0) = 1$ on trouve pour le gain radar dans la direction principale d'observation,

$$G(0, 0) = \frac{4\pi A}{\lambda^2}$$

Cette formule est fondamentale pour comprendre le fonctionnement du radar. Elle est valable à une distance d'observation $r > A/\lambda$, et elle confirme que $G \gg 1$ lorsque $A \gg \lambda^2$. Pour un disque circulaire l'élargissement angulaire autour du lobe principal est $\Delta\theta \sim 1, 22\lambda/a$. L'intensité diffracté vers l'avant est donc très focalisé, ce qui augmente la performance du radar, car cela permet de détecter plus loin, avec un résolution angulaire plus précise.

On s'intéresse maintenant au signal réfléchi par l'objet et détecté par le même radar. La réflexion $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ est décrit par l'amplitude de diffraction $T_{\mathbf{k}-\mathbf{k}}(\omega)$ a été évalué en réflexion. En ingénierie radar on introduit la *section efficace radar* (*Radar Cross-Section* RCS) la quantité

$$\sigma(RCS) \equiv \frac{|T_{\mathbf{k}-\mathbf{k}}(\omega)|^2}{(4\pi)}$$

La section efficace en réflexion est donnée par $\sigma(RCS)/4\pi$. La section efficace radar est égale à la section efficace totale si l'objet diffracte de façon isotrope. On trouve pour le flux réfléchi par l'objet,

$$\frac{dI_S}{d\Omega} = \frac{\sigma(RCS)}{4\pi} S_{\text{in}}$$

avec S_{in} la densité de flux incident sur l'objet. On a $S_{\text{in}} = J_{\text{in}}/dA = (dP_S/d\Omega)d\Omega/dA$. Puisque $dA = r^2 d\Omega$ on trouve

$$S_{\text{in}} = G \frac{P_{\text{in}}}{4\pi r^2}$$

En supposant que le même antenne est utilisée pour la réception, l'énergie réfléchie P_{rec} devient

$$P_{\text{rec}} = \frac{dI_S}{d\Omega} \frac{A}{r^2} = \frac{dI_S}{d\Omega} \frac{G\lambda^2}{4\pi r^2}$$

On obtient donc une deuxième formule fondamentale, appelée *l'équation du radar*,

$$P_{\text{rec}} = \frac{G^2 \lambda^2 \sigma(RCS)}{(4\pi)^3 r^4} P_T$$

En réalité des corrections apparaissent pour tenir compte des pertes, dans le radar même, ou lors de la propagation dans l'atmosphère.

A 100 GHz les micro-ondes pénètrent les nuages de glace quasiment sans atténuation. La longueur d'onde (3 mm) est plus élevée que la taille a des particules. C'est le régime de Born que sera discuté dans la section suivante. Le signal radar est sensible à la taille des particules à la puissance 6 : il ne verra donc pas les aérosols, et sera plus sensible aux nuages de glace qu'aux nuages d'eau liquide.

Exemple: Un radar est équipé d'une puissance $P_T = 1$ kW. Il émet à une fréquence de 6 GHz, ce qui correspond à une longueur d'onde de 20 m. Avec un rayon de $R = 56$ m (possible si le radar est en réalité composé d'un réseau d'émetteurs en phase), le gain est égal à $G = 4\pi^2 R^2 / \lambda^2 = 1000$, soit 30 Decibel (dB). Un avion de chasse a typiquement une RCS de l'ordre de 0,2 - 10 m² selon l'orientation. On mesure $P \approx 0,1$ mW en réception si l'obstacle est à 10 km. Si cela suffit pour être mesurable dépend du bruit. Le champ lointain du radar commence à $r > G\lambda/4\pi = 1,6$ km.

5.3 Approximation de Born

La théorie de diffraction est technique et compliquée. Ce n'est que exceptionnellement que l'on arrive à trouver une solution analytique, par exemple pour la diffraction de la lumière d'une sphère diélectrique (le problème de Mie). Pour un cristal de glace déjà, un cas très relevant pour la télédétection (LIDAR), le calcul est lourd, manque de symétrie.

L'approximation de Born est une simplification qui est souvent employée. Elle consiste à négliger la multiple diffraction de l'onde par le même obstacle. Dans ce cas,

$$T(\omega) \approx V(\omega)$$

Pour que l'approximation de Born soit valable il faut que les termes suivants soient négligeables. On faut donc que $|VG_0(\omega)V| \ll |V|$. Considérons une

onde scalaire diffractée par une sphère avec V constante dans le volume $\mu = 4\pi a^3/3$ et zéro ailleurs. Pour que $\langle \mathbf{k} | V G_0 V | \mathbf{k} \rangle \ll \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k} \rangle = \mu V$ il faut que,

$$\mu V \gg \int_S d\mathbf{r} \int_S d\mathbf{r}' V^2 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \approx \mu V^2 \int_S d\mathbf{x} G_0(\mathbf{x}) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}]$$

L'intégrale n'est pas difficile à évaluer et on trouve la condition,

$$2\pi |V| a^2 F(ka) \ll 1$$

avec la fonction $F(x) = |x - \sin x \exp(ix)|/x^2$. La fonction est oscillante, bornée, et $F(0) = 1$. Asymptotiquement $F(x) \sim 1/x$.

Pour les ondes de matière l'interaction V ne dépend pas de l'énergie. Comme on avait anticipée la condition est respectée pour une faible interaction, plus précisément $V \ll 1/a^2$. Elle est également valable lorsque $k \gg |V|a$. Puisque $E = k^2$, la condition pour que l'approximation de Born soit valable est donc respectée à suffisamment haute énergie. Dans ce cas important l'onde se déplace suffisamment vite pour que l'interaction avec l'obstacle - bien que forte - soit de courte durée, et donc faible.

Pour les ondes scalaires la situation est un peu différente. On écrit $k = \omega/c_0$ et $V = (1 - \varepsilon)k^2$, avec ε le rapport des vitesses à l'intérieur et à l'extérieur de l'obstacle. On constate toute de suite que la condition n'est plus forcément respectée pour ka grand. Dans ce régime la théorie des rais s'applique, qui est loin d'être trivial. La condition est respectée pour $ka \ll 1$. Dans ce régime on parle de la *diffraction de Rayleigh*. La section efficace d'un diffuseur de Rayleigh est proportionnelle à $a^6 \omega^4$. Les petites longueurs d'onde sont donc beaucoup moins diffractées, ce qui explique par exemple la couleur bleu du ciel et la couleur rouge du soleil couchant. Le *régime de Rayleigh-Gans* est caractérisé par $1 \ll ka \ll 1/|1 - \varepsilon|$. Si le rapport des vitesses est proche d'unité, l'approximation de Born s'applique même pour des valeurs $ka \gg 1$.

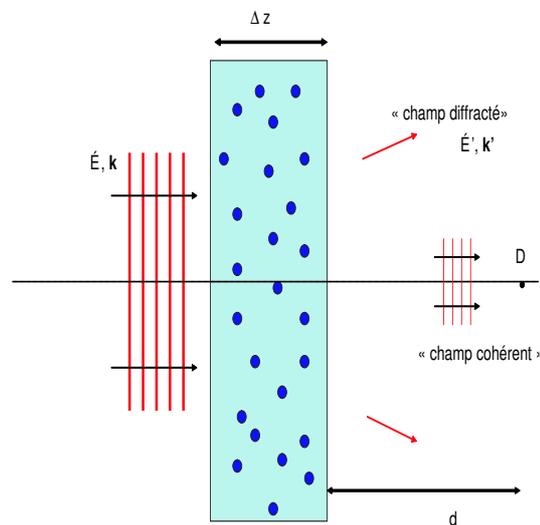
Exercice 5.8 Démontrer que dans le régime de Rayleigh-Gans, l'amplitude de diffraction est donnée par

$$T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{4\pi a^3 k^2}{3} (1 - \varepsilon) G(2ka \sin \theta)$$

avec θ l'angle de diffraction et la fonction $G(x) = 3(\sin x - x \cos x)/x^3$. Discuter le profil de diffraction et argumenter que la section efficace totale varie comme $a^4 k^2$ pour $ka \gg 1$.

5.4 Milieu hétérogène

Une onde plane scalaire avec une cohérence infinie en espace-temps est incidente sur une couche contenant des diffuseurs avec des positions aléatoires. Quel sera le champ transmis? Puisque le champ transmis dépend en détail de toutes les positions des diffuseurs, lui aussi sera aléatoire. Le *champ cohérent* est le champ moyenné sur les positions des diffuseurs. On montrera un théorème fondamentale, celui de Oseen-Ewald, qui révèle l'existence d'un milieu effectif, dont les paramètres dépendent de la densité et la matrice de diffraction des diffuseurs. Ensuite nous considérons la corrélation du champ. La méthode de diffraction quasi-inélastique contient beaucoup d'information sur les interactions entre les diffuseurs.



5.4.1 Théorème de Oseen-Ewald

Théorème de Oseen-Ewald: En milieu hétérogène, les champs partiels émis par les hétérogénéités sont - *en moyen* - équivalents à une onde plane. Le milieu effectif est caractérisé par une vitesse de phase et une atténuation qui dépendent de l'amplitude $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}(\omega)$ des diffuseurs, évaluée vers l'avant.

Démonstration:

Nous allons considérer le champ mesuré en D loin d'une couche mince. Le champ incident sur la couche est $\exp(ikz - i\omega t)$. En champ lointain le champ diffracté par les diffuseurs est donnée par

$$\psi(\mathbf{r}_D) = \exp[ik(z + d) - i\omega t] - \sum_i \frac{\exp[ik|\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_D|]}{-4\pi|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_D|} T_{k\hat{\mathbf{z}}, k\hat{\mathbf{f}}_{iD}} \exp[ikz - i\omega t]$$

On écrit $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_D| = \sqrt{d^2 + r^2}$. Une peut attribuer une densité moyenne au milieu selon $\sum_i = \Delta z \rho \int 2\pi r dr$, et donc,

$$\langle \psi(\mathbf{r}_D) \rangle = \exp[ikz - i\omega t] \left[\exp(ikd) - \frac{\Delta z \rho}{2} \int_0^\infty dr r T_{k\hat{\mathbf{z}}, k\hat{\mathbf{z}}} \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2}} \exp\left(ik\sqrt{d^2 + r^2}\right) \right]$$

On a mis $\mathbf{k}_{\text{out}} = \mathbf{k}_{\text{in}}$ pour tous les champs car D se trouve en champ lointain. L'intégrale de Fresnel,

$$\int_0^\infty dr \frac{r}{\sqrt{d^2 + r^2}} \exp\left(ik\sqrt{d^2 + r^2}\right) = \frac{-id}{k} \exp(ikd)$$

et on obtient pour le champ diffracté,

$$\langle \psi(\mathbf{r}_D) \rangle = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}_D) \left[1 + i \frac{\rho \Delta z T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}}{2k} \right] \approx \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}_D) \exp \left[i \frac{\rho T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}}{2k} \Delta z \right]$$

L'amplitude $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}$ contient une partie réelle et une partie imaginaire qui est négative selon le théorème optique. A l'intérieure de la couche l'onde s'est donc propagée comme une onde plane avec une vecteur d'onde et une atténuation modifiées par la densité des diffuseurs et leur matrice de diffraction $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}$ vers l'avant selon

$$k = \frac{\omega}{c_0} + \frac{i\rho T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}(\omega)}{2k}$$

□

Cette formule révèle deux choses.

- *L'indice de réfraction* dans la couche, définie comme le rapport c_0/c de la vitesse du vide et sa vitesse de phase c , est directement reliée à la partie réelle de la matrice $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}(\omega)$:

$$m(\omega) \approx 1 + \frac{\rho \operatorname{Re} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}(\omega)}{2k^2}$$

- L'énergie du champ décroît exponentiellement comme $\exp(-z/\ell)$, avec la longueur d'extinction ℓ ,

$$\ell(\omega) = \frac{k}{-\rho \operatorname{Im} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}}(\omega)}$$

Exercice 5.9

1. En utilisant le théorème optique, démontrer la relation célèbre $\ell = 1/\rho\sigma(\omega)$ pour la longueur d'extinction. Pourquoi le champ moyen décroît exponentiellement?
2. Pour un gaz des atomes identiques, démontrer que la constante diélectrique est donnée par la formule

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi\rho r_e c_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega/m_e}$$

Comparer à l'Exercice 3.6.

Exemple: Un électron dans un fil de cuivre est - à basse température - diffracté par des impuretés, et typiquement $\ell \approx 10\text{\AA}$. Cette longueur est plus grand que la dimension d'une cellule cristalline et la structure de bande n'est donc pas détruite par la présence des impuretés. Elle décroît encore plus avec la température car les électrons sont diffractés aussi par des phonons. La "nanophysique" est imposée par la condition que la phase complexe d'un électron soit déterministe partout dans l'échantillon.

En optique on rencontre toutes les longueurs possible: Pour le lait $\ell = 1$ mm. Cette longueur varie un peu avec la fréquence, mais elle est toujours petite devant la dimension de votre verre. Les photons ont donc du mal à traverser et seront réfléchis avec une phase aléatoire quelque soit la longueur d'onde: le lait est blanc. Dans le brouillard sur le piste de ski $\ell \approx 10$ m. Des poudres sémi-conductrices (avec la bande interdite dans le visible pour éviter l'absorption) existent actuellement pour lesquelles $\ell = 300\ \mu\text{m}$, soit plus petite que la longueur d'onde! Pour les ondes sismiques en France autour de 1 Hz, $\ell \approx 70$ km.

5.4.2 Diffraction quasi-inélastique

Le champ cohérent a été définie comme le champ moyen à la fréquence ω . Il est intuitivement clair que le champ ne peut changer de fréquence quelque soit les positions des diffuseurs, à la condition qu'ils ne bougent pas. *En moyenne*, le milieu est symétrique par translation verticale et le champ ne peut donc jamais acquérir une composante verticale du vecteur d'onde. Il en suit que le champ diffracté est en moyenne égale à zéro sauf vers l'avant: $\langle \psi_S(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_{\text{in}}, \omega) \rangle = 0$. Par conséquent, on s'attend à ce que le flux moyen transmis, proportionnel à $c_0 \langle |\psi(\mathbf{k}')|^2 \rangle$ s'écrive comme,

$$I(\mathbf{k}', \omega') = [I_c(\omega)(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + F(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega)] \delta(\omega - \omega')$$

$I_c(\omega)$ est le flux du champ cohérent qui s'annule pour toutes les directions autre que le celle vers l'avant. La deuxième contribution F est le flux diffracté.

En réalité les diffuseurs bougent et la corrélation de la densité contient une contribution dynamique,

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t') \rangle = \rho^2 + S(\Delta \mathbf{r}, \Delta t)$$

On appelle *la fonction de structure dynamique* (FSD) la transformée de Fourier de la corrélation de densité, soit

$$S(\mathbf{q}, \Omega) = \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\Omega t) S(\mathbf{x}, \tau)$$

Puisque les diffuseurs bougent le champ diffracté fluctue en temps. La théorie de la cohérence temporelle du Chapitre 2 s'applique, et le signal aura une longueur de cohérence finie et déterminée par la dynamique des diffuseurs. Les diffuseurs sont supposés petits devant la longueur d'onde et caractérisés par une interaction V avec les ondes. Dans l'approximation de Born, l'interaction totale est $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = V \sum_i \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i)$, avec $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ le vecteur de diffraction. Dans la limite continue on a

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = V \int d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}, t)$$

La corrélation temporelle du champ diffracté à une distance r est donnée par,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_S(\mathbf{k}', t) \psi(\mathbf{k}', t') \rangle &= \frac{|V|^2}{(4\pi r)^2} \exp[-i\omega(t-t')] \\
&\times \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t') \rangle \exp[-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \\
&= \frac{|V|^2}{(4\pi r)^2} \exp[-i\omega(t-t')] \mu [\rho^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}) + S(\Delta\mathbf{q}, t-t')]
\end{aligned}$$

avec μ le volume de l'échantillon. Selon le théorème de la cohérence temporelle démontrée en Chapitre 4, la puissance spectrale du champ transmis est obtenue par transformation de Fourier,

$$\begin{aligned}
I(\Omega, \mathbf{k}') &\propto \mathcal{TF} \langle \psi_S(\mathbf{k}', t) \psi(\mathbf{k}', t') \rangle \\
&= \frac{\mu |V|^2}{(4\pi r)^2} [\rho^2 (2\pi)^4 \delta(\Omega - \omega) \delta(\mathbf{q}) + S(\mathbf{q}, \Omega - \omega)]
\end{aligned}$$

La deuxième contribution, la FSD, révèle des contributions *inélastiques*, c'est à dire avec $\Omega \neq \omega$. La mesure de cette contribution nous fournit une information sur la dynamique des diffuseurs.

Application: Diffraction de la lumière par des cristaux liquides en phase nématique (P.G. De Gennes, 1967; Prix Nobel 1991).

La phase nématique d'un cristal liquide est décrite par une direction privilégiée \mathbf{n} des molécules. Le milieu effectif est donc uni-axiale:

$$\varepsilon_{ij} = m^2 \delta_{ij} + \varepsilon_a n_i n_j$$

Selon la théorie de De Gennes, le directeur subit des fluctuations thermiques $\delta\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ qui sont gérées par les forces élastiques (constante élastique K) et amorties par la viscosité η . Le résultat est une fonction de corrélation $\langle n_i(\mathbf{r}, 0) n_j(\mathbf{r}', t) \rangle$ dont la transformée de Fourier est

$$S_{ij}(\mathbf{q}, t) = \Pi_{ij} \frac{kT}{Kq^2} \exp(-Kq^2|t|/\eta)$$

avec Π un tenseur de déformation élastique. L'interaction de la lumière avec les fluctuations de directeur est donc donnée par,

$$V_{ij,\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \int d\mathbf{r} \delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \varepsilon_a (n_i \delta n_j(\mathbf{q}, t) + \delta n_i(\mathbf{q}, t) n_j)$$

Exercice 5.10:

- En oubliant la polarisation optique, démontrer que la section efficace différentielle est donnée par la formule ($\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\omega'}(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}', \omega \rightarrow \omega') \propto \frac{kT\varepsilon_a^2 \omega^4}{\eta c_0^4} \frac{1}{(\omega - \omega')^2 + K^2 q^4 / \eta^2}$$

et la section efficace différentielle intégrée sur les fréquences sortantes par

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}', \omega) \propto \frac{kT\varepsilon_a^2 \omega^4}{K c_0^4} \frac{1}{K q^2}$$

Typiquement $K/\eta = 10^{-9}$ m²/s. Calculer l'élargissement inélastique en fonction de l'angle.

- Démontrer $\langle n_i(\mathbf{r}, t = 0) n_j(\mathbf{r}', t = 0) \rangle \propto kT/(K\Delta r)$ et $\langle n_i(\mathbf{r}, 0) n_j(\mathbf{r}, t) \rangle \propto 1/\sqrt{t}$.

Au voisinage d'une transition de phase, la diffraction de la lumière diverge lorsqu'on s'approche de l'angle vers l'avant (*opalescence critique*). Lorsqu'on s'approche de la transition isotrope-nématique, qui est de premier ordre, l'anisotropie diélectrique et la constante élastique varient beaucoup. Cependant le rapport ε_a^2/K est constant en fonction du paramètre d'ordre nématique. Par conséquent, la diffraction de la lumière est peu affectée lorsque on s'approche de la transition.

5.4.3 Diffraction de Brillouin

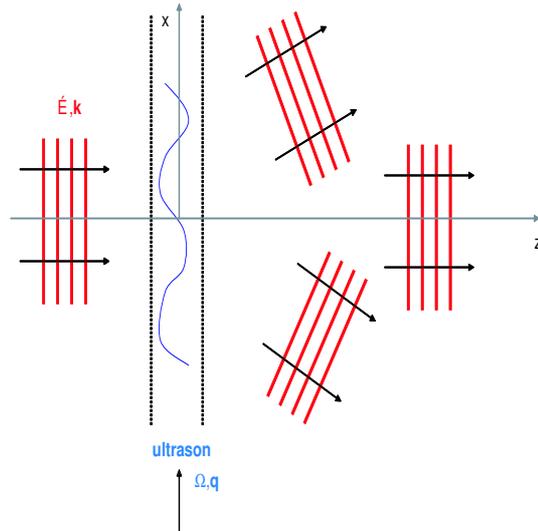
Considérez une couche diélectrique dans laquelle des ultrasons se propagent. Dans une couche Δz la densité moyenne varie donc comme

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \Delta\rho \cos(\Omega t - qx)$$

L'onde électromagnétique ressentit un réseau de diffraction et on s'attend à ce qu'elle sera diffracté dans plusieurs directions de Bragg. On supposera ici que les particules diffusent le lumière de façon isotrope avec l'amplitude de diffraction T . On a déjà établie que la densité ρ_0 produit une onde plane en transmission, dont le vecteur d'onde a légèrement changé. Nous nous

intéressons à l'effet de l'oscillation ultrasonore. Elle est caractérisée par l'interaction

$$V(\mathbf{r}, t) = \Delta\rho \cos(\Omega t - qx)$$



Le champ diffracté à l'endroit \mathbf{r} est donné par

$$\psi_S(\mathbf{r}, t) = \int_{\text{couche}} d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \Delta\rho T \cos(\Omega t' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') G_0(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[-i\omega t' + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}']$$

On trouve 2 contributions,

$$\psi_S^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \Delta\rho T \int_{\text{couche}} d\mathbf{r}' \exp(-i\omega t \mp i\Omega t \pm i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') G_0(\omega \pm \Omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}']$$

Puisque $G_0(\omega \pm \Omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est la transformée de Fourier de $[(\omega \pm \Omega + i\epsilon)^2 / c_0^2 - p^2]^{-1}$ on obtient,

$$\begin{aligned}
\psi_S^\pm(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \Delta \rho T e^{\mp i \Omega t - i \omega t} \int_{\text{couche}} d^3 \mathbf{r}' \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \pm i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}' + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}}{(\omega \pm \Omega + i \epsilon)^2 / c_0^2 - p^2} \\
&= \frac{\Delta \rho \Delta z T}{4\pi} e^{\mp i \Omega t - i \omega t \pm i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \int d^3 \mathbf{p} \frac{\delta^2(\mathbf{p}_\parallel \pm \mathbf{q}) e^{i p_z z}}{(\omega \pm \Omega + i \epsilon)^2 / c_0^2 - \mathbf{q}^2 - p_z^2} \\
&= \frac{1}{4iK} \Delta \rho \Delta z T e^{\mp i \Omega t - i \omega t} e^{\pm i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + i K z}
\end{aligned}$$

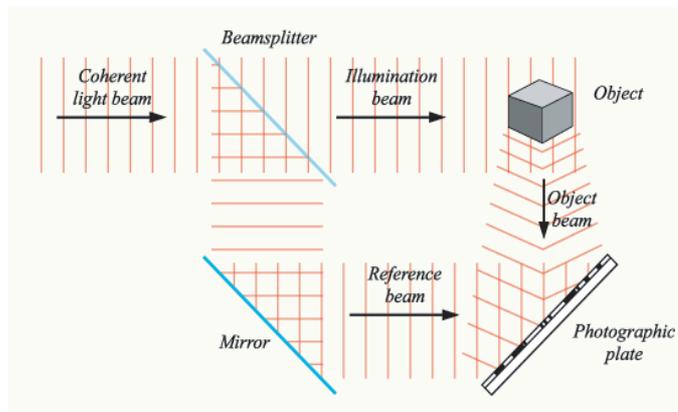
avec $K = \sqrt{(\omega \pm \Omega)/c_0^2 - \mathbf{q}^2}$. Dans la deuxième égalité on a effectué la l'intégrale sur la couche à $z' = 0$ en supposant qu'elle soit mince, de sorte que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' = 0$ pour chaque vecteur dans la couche. La dernière égalité est valable pour $z > 0$, c'est à dire pour l'onde transmise.

Le résultat final révèle deux ondes planes à la fréquence $\omega \pm \Omega$. Elle sont diffractées dans les directions de Bragg $\mathbf{k} \pm \mathbf{q}$. On parle de *la diffraction de Brillouin*. Sa version quantique est peut-être mieux connue. Un phonon est caractérisé par une énergie $\hbar \Omega$ et une quantité de mouvement $\hbar \mathbf{q}$. Un photon est a son tour possède une énergie $\hbar \omega$ et une quantité de mouvement $\hbar \mathbf{k}$. Selon la mécanique quantique le transfert d'énergie est quantifiée. La diffraction de Brillouin peut être présentée par la destruction ou la création d'un phonon, en respectant la conservation d'énergie et celle de la quantité de mouvement,

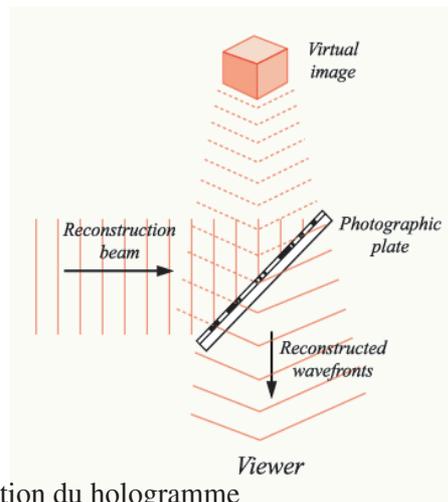
$$\hbar \omega(\mathbf{k}') = \hbar \omega(\mathbf{k}) \pm \hbar \Omega(\mathbf{q}) ; \hbar \mathbf{k}' = \hbar \mathbf{k} \pm \hbar \mathbf{q}$$

ce qui correspond exactement à ce que l'on a trouvé classiquement.

Notons que $\Omega \sim \text{MHz}$, ce qui est beaucoup plus petit que la fréquence de l'onde électromagnétique. Pourtant, la différence est cruciale. Un *modulateur acousto-optique* est un instrument que rajoute une phase $\pm \Omega$ à un signal incident avec une précision très élevée. Il a trouvé de nombreuses applications en imagerie cohérente. Par exemple, en détection hétérodyne on fait interférer une onde diffracté par un objet soumis à une onde ultrasonore avec une signal de référence. Le produit oscille à la fréquence Ω , qui est mesurable en réception vidéo. En utilisant plusieurs fréquences ultrasonores, il est possible de réduire la fréquence d'oscillation d'avantage, jusqu'à une dizaine de Hertz!.



A. enrégistrement du hologramme



B. création du hologramme

5.4.4 Holographie

La holographie a été inventée par Dennis Garbor, une invention pour laquelle il a reçu le prix Nobel en 1971. Sa découverte eut lieu même avant l'invention des lasers, dont la cohérence rendra la méthode beaucoup plus facile. La méthode consiste en deux étapes, celle de l'enregistrement, et celle de la création. Le résultat est une image 3D virtuel de l'objet. C'est surtout la phase des ondes diffractées par l'objet qui fournissent l'information cruciale pour remonter à la structure 3D de l'objet.

Hélas, un détecteur optique n'est pas sensible aux oscillations rapides des

ondes. Dans la version moderne de la holographie on se sert de la méthode hétérodyne, qui a été discuté en chapitre 4. Soit un champ $\psi_{\text{in}} = A_{\text{in}} \exp(i\phi_{\text{in}})$ incident sur l'objet. Le champ diffracté est donné par

$$\psi_S = \sum_n A_S^n \exp(i\phi_S^n)$$

avec la somme sur les différentes parties de l'objet. Le signal d'interférence enregistré sur le film photographique (figure A) est donc,

$$I(\mathbf{r}) \propto A_{\text{in}}^2 + 2 \sum_n A_{\text{in}} A_S^n \cos(\phi_S^n - \phi_{\text{in}})$$

Plus l'intensité est élevée, plus le film sera noir. C'est le principe de la photographie. Plus le film est noir, plus le coefficient de transmission du film sera élevé. Après une inversion blanc-noir on illumine le film par la même source et le champ transmis sera proportionnel à $I(\mathbf{r})$,

$$\begin{aligned} \psi_H &= A_{\text{in}} \exp(i\phi_{\text{in}}) \left[A_{\text{in}}^2 + 2 \sum_n A_{\text{in}} A_S^n \cos(\phi_S^n - \phi_{\text{in}}) \right] \\ &= A_{\text{in}}^2 \left[A_{\text{in}} \exp(i\phi_{\text{in}}) + \sum_n A_S^n \exp(i\phi_S^n) + \sum_n A_S^n \exp(2i\phi_{\text{in}} - i\phi_S^n) \right] \end{aligned}$$

Le terme au milieu est exactement le champ diffracté par l'objet. C'est donc comme l'objet existait toujours derrière le film. Le premier terme est le champ incident, et ne sera pas visible si la géométrie est bien choisie. Enfin, le dernier terme fournit une image fantôme, et gênait beaucoup les premiers efforts de holographie. Aujourd'hui cette contribution est facile à enlever car le film a été remplacé par un CCD qui fournit une hologramme numérique $I(\mathbf{r})$ sur lequel on peut effectuer un traitement du signal.

Bibliography

- [1] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge, 7th edition, 1999).
- [2] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, 1975).
- [3] H.C. van de Hulst, *Scattering by Small Particles* (Dover, 1981).
- [4] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon,1987).
- [5] L.D. Landau et E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevski,*Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon,1987).
- [6] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, 1995).
- [7] R.J. Sullivan, *Microwave Radar* (Artech House, 2000).
- [8] K. Aki and P.G. Richards, *Quantitative Seismology* (University Science Books, 2002).