

THÈSE DE DOCTORAT

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

SPÉCIALITÉ : PHYSIQUE

présentée par

Guillaume BIGNON

Corrélations de courant dans les structures mésoscopiques supraconducteur - métal normal

Composition du jury :

Marc SANQUER	Président du Jury
Yaroslav M. BLANTER	Rapporteur
Patrice ROCHE	Rapporteur
Denis FEINBERG	Examineur
Fabio PISTOLESI	Directeur de thèse
Frank W. J. HEKKING	Co-directeur de thèse

Soutenue le lundi 10 octobre 2005.

« [...] j'ai lentement cheminé à travers les pays sahariens et sahéliens de la Mauritanie et du Soudan, traçant de la sorte, avec l'infatigable patience et la paisible obstination du limaçon explorant une planche de laitue, bien des milliers de kilomètres d'itinéraires, aussi méandriformes, bouclés et capricieux que les siens. »

Théodore Monod, 1902-2000.

Je tiens en premier lieu à remercier mes deux directeurs de thèse, F. Pistolesi et F. Hekking, d'avoir accepté de m'encadrer pendant ces trois années. J'ai appris énormément en travaillant à leurs côtés, ils ont su me faire profiter de leur grande culture en physique lors de nos nombreuses discussions. J'ai beaucoup apprécié le dynamisme et la disponibilité au quotidien de Fabio, et je suis reconnaissant envers Frank d'avoir suivi de près mes travaux en dépit de ses nombreuses obligations.

Je remercie Y. Blanter et P. Roche d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur, leurs précieux commentaires ont contribué à l'amélioration de ce document. Je remercie également D. Feinberg d'avoir participé au jury de thèse ainsi que M. Sanquer de l'avoir présidé.

Ce fut un réel plaisir de collaborer avec M. Houzet dont je suis admiratif du sens physique et de la capacité à générer de bonnes idées.

Je remercie tous les membres du LPMMC pour la gentillesse avec laquelle ils m'ont accueilli. Je garderai un agréable souvenir de l'ambiance sympathique de ce laboratoire, de ces fondues et barbecues annuels.

Je remercie B. Souletie et A. Drillat ainsi que les enseignants et préparateurs que j'ai côtoyés lors de mes activités d'enseignements à l'Université Joseph Fourier.

Merci à Alexandre et Raffaello qui furent des « co-buros » de choix mais aussi des amis avec qui j'ai passé de très bons moments en dehors de ce bureau. Je remercie aussi Felipe, Mikael, Julien et tous les étudiants qui ont travaillé dans la « salle des thésards » durant ces trois années. Ils ont fortement contribué à l'esprit convivial de ce bureau.

Merci à mes partenaires de fléchettes : Emmanuel, Julien, Paul, Lionel, Coralie, Miguel, Gaëlle. Sans eux, je n'aurais pas tant progressé.

Un grand merci à Estelle pour avoir corrigé les innombrables fautes d'orthographe et de typographie dont j'avais minutieusement truffé ce manuscrit.

Enfin je remercie mes parents pour leur soutien quotidien tout au long de mes études.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Le bruit dans les conducteurs mésoscopiques	3
1.1 Un conducteur mésoscopique	3
1.2 Le formalisme de Landauer-Büttiker	4
1.3 La statistique complète du courant	6
1.3.1 Description statistique du courant électrique	6
1.3.2 Les charges	9
1.3.3 Lien entre statistique des charges et du courant	12
1.4 Conclusion	13
2 Bruit d'une jonction tunnel métal normal - supraconducteur	15
Introduction	15
2.1 Modélisation de la jonction NIS	16
2.1.1 Le métal normal	16
2.1.2 Le supraconducteur	17
2.1.3 La jonction tunnel	18
2.2 Transport de charge via les quasi-particules	19
2.3 Transport de charges par réflexions Andreev	22
2.3.1 La réflexion Andreev	22
2.3.2 Réservoirs hors-équilibre	27
2.3.3 Exemple : un fil métallique hors équilibre	31
Conclusion	38
3 Corrélations croisées dans les jonctions tunnel	39
Introduction	39
3.1 Étude d'une double jonction tunnel métal normal-supraconducteur	40
3.1.1 L'hamiltonien effectif	40
3.1.2 Courant et corrélations	43
3.1.3 Statistique complète du transport de charge	45
3.1.4 Les corrélations croisées	49
3.2 Effets d'un environnement électromagnétique	57
3.2.1 Modélisation de l'environnement	57

3.2.2	Taux de transition	59
3.2.3	Environnements ohmiques	62
	Conclusion	67
4	Supraconducteurs mésoscopiques diffusifs	69
	Introduction	69
4.1	Modélisation	70
4.1.1	Modélisation du désordre	70
4.1.2	Fonctions de Green	71
4.2	Approximation quasi-classique	73
4.2.1	Représentation de Wigner	73
4.2.2	Moyenne sur les différentes configuration du désordre	74
4.2.3	L'approximation quasi-classique	75
4.3	Limite diffusive	77
4.4	Conditions aux bords	78
4.5	Statistique complète du courant	79
	Conclusion	82
5	Bruit en courant dans une double barrière N-N'-S	83
	Introduction	83
5.1	Modélisation	84
5.2	Le courant	87
5.2.1	Limite cohérente	88
5.2.2	Limite incohérente	89
5.2.3	Énergies intermédiaires	90
5.3	Le bruit	91
5.3.1	Limite cohérente	94
5.3.2	Limite incohérente	95
5.3.3	Energies intermédiaires	97
5.3.4	Effets de la distribution des canaux	97
5.4	Bruit en courant pour g_S/g_N grand ou petit	100
5.5	Discussion à la lumière de récentes expériences	101
	Conclusion	102
	Conclusion générale	105
	Annexes	107
A	Rappels sur la théorie perturbative hors-équilibre	107
A.1	Un système hors-équilibre	107
A.2	Les différentes représentations	107
A.3	Le contour de Keldysh	109
A.3.1	Formule de Kubo	110
A.3.2	T_C -produit et opérateur S_C	110

TABLE DES MATIÈRES	vii
A.3.3 Fonctions de Green	111
Bibliographie	118
Liste des publications	119

Introduction générale

Les progrès expérimentaux réalisés ces vingt dernières années en miniaturisation des circuits électriques ainsi qu'en cryogénie ont permis un important développement de la physique mésoscopique. Les électrons présent dans un métal se comportent à la fois comme une particule et comme une onde. À cause du comportement ondulatoire d'origine quantique, les électrons ont une phase dont ils gardent la mémoire sur une distance l_Φ , la distance de cohérence de phase. Ainsi, en abaissant la température, il est possible de réaliser des circuits suffisamment petits pour que les effets ondulatoires deviennent importants et que les électrons interfèrent entre eux. À cette échelle, dite mésoscopique, les propriétés de transport des électrons dans les métaux peuvent être fortement modifiées et pour les décrire il est nécessaire d'utiliser la mécanique quantique.

En connectant un conducteur mésoscopique à un supraconducteur, dont la propriété la plus connue est de conduire l'électricité sans résistance, on augmente ces effets d'interférence car le supraconductivité est une manifestation macroscopique de la cohérence quantique. Au sein d'un supraconducteur les électrons sont groupés et forment des paires, les paires de Cooper, qui ont toutes la même phase. Ainsi quand on place cette « source » de cohérence à proximité d'un métal conventionnel, deux électrons issus d'une même paire de Cooper peuvent interférer sur une grande distance une fois passés dans le métal. C'est ce que l'on appelle l'effet de proximité. Celui-ci peut être encore accru par la diffusion des électrons sur les impuretés du réseau cristallin car, dans ce cas, les électrons restent au voisinage du supraconducteur plus longtemps ce qui augmente le nombre d'interférences. Cet effet de proximité se manifeste notamment dans la caractéristique courant - tension d'une jonction métal normal - supraconducteur [1, 2], mais pas uniquement : l'effet de proximité peut aussi se manifester dans le bruit en courant c.-à-d. dans les fluctuations du courant électrique qui traverse le circuit. L'intérêt pour le bruit dans les conducteurs mésoscopiques est récent, une quinzaine d'années environ, et on sait maintenant que la mesure du bruit permet d'accéder à des informations sur le transport de charge qui ne sont pas présentes dans la conductance, comme par exemple la charge élémentaire transportée.

C'est dans ce contexte que se situe les travaux de cette thèse où je me suis intéressé à la dépendance en énergie du bruit en courant dans les structures hybrides mésoscopiques métal normal - supraconducteur.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante. Après un premier chapitre introductif, le second chapitre de ce mémoire de thèse est consacré à l'étude du bruit en courant dans une jonction tunnel métal - normal supraconducteur à voltage non nul en prenant en compte la diffusion des électrons sur les impuretés du réseau cristallin. On montrera que si les réservoirs ne sont pas à l'équilibre thermodynamique, le bruit et le courant sont deux quantités indépendantes.

Dans le troisième chapitre, on étudiera les corrélations croisées du courant dans un séparateur de faisceau (*beam splitter* en anglais) constitué d'un supraconducteur connecté via des jonctions tunnel à deux métaux. On y verra que la corrélation croisée du courant contient des informations sur la taille des paires de Cooper qui ne sont pas présentes dans la matrice de conductance. Puis nous prendrons en compte les effets de l'environnement électromagnétique extérieur sur le transport de charge, ce qui peut induire une conductance croisée non nulle.

Puis dans le quatrième chapitre, nous dériverons le modèle théorique quasi-classique permettant de décrire la supraconductivité mésoscopique diffusive pour aboutir à l'équation d'Usadel. Cela nous permettra ensuite dans le cinquième chapitre d'étudier le bruit dans une double jonction en série métal normal - métal normal - supraconducteur où cette fois les jonctions ne sont pas tunnel. On y montrera que la transparence des barrières joue un rôle important dans la dépendance en énergie du bruit.

Chapitre 1

Le bruit dans les conducteurs mésoscopiques

Dans ce premier chapitre nous introduisons des notions qui nous seront utiles tout au long de cette thèse. Nous allons commencer par définir ce que l'on appelle un conducteur mésoscopique. Ensuite nous décrirons rapidement le formalisme de Landauer-Büttiker qui permet de décrire le transport de charge dans les conducteurs mésoscopique et notamment le bruit. Puis nous poserons les bases de la description statistique du courant électrique.

1.1 Un conducteur mésoscopique

Pour définir un conducteur mésoscopique il est nécessaire de préciser les différentes échelles caractéristiques associées au transport des électrons dans les métaux. La plus petite échelle est la longueur d'onde de Fermi λ_F associée à la longueur d'onde des électrons. Elle est de l'ordre de quelques angströms dans les métaux et peut atteindre quelques dizaines de nanomètres dans les gaz bidimensionnels d'électrons piégés entre deux semi-conducteurs. Les électrons en mouvement dans les métaux subissent plusieurs types de chocs que l'on peut classer en deux catégories.

- Il y a d'abord les chocs élastiques, c.-à-d. sans échange d'énergie, qui sont essentiellement dus aux collisions avec les impuretés ou les défauts du réseau cristallin, ils conservent la phase de l'électron. L'échelle caractéristique associée est l la distance moyenne entre deux collisions, elle est de l'ordre de quelques centaines d'angströms dans les métaux et peut aller jusqu'à quelques micromètres dans les semi-conducteurs.
- La seconde catégorie de choc correspond aux collisions inélastiques lors desquelles l'électron échange de l'énergie, ces chocs sont responsables de la perte de cohérence de phase. On définit donc la longueur de cohérence de phase l_ϕ sur laquelle les électrons gardent mémoire de leur phase. Ces chocs proviennent des collisions électron-électron ou électron-phonon¹, les phonons correspondant aux modes de vibration du réseau cristallin. À suffisamment basse température ($T < 1$ K), ce sont les collisions électron-électron qui dominent et déterminent la longueur l_ϕ . Elle est alors de l'ordre de quelques micromètres dans les métaux

¹On suppose ici qu'il n'y a pas d'impuretés magnétiques. Bien qu'engendrant des collisions élastiques elles sont responsables de perte de cohérence.

pour atteindre une dizaine de micromètres dans les semi-conducteurs.

C'est cette longueur l_Φ qui caractérise l'échelle mésoscopique : sur des longueurs $L < l_\Phi$, les fonctions d'ondes électroniques peuvent interférer, mais si $L > l_\Phi$, la description classique du mouvement des électrons est suffisante. Ainsi, pour des températures suffisamment basses et des échantillons suffisamment petits, les effets d'interférence des électrons deviennent importants, on a alors un conducteur mésoscopique. C'est ce type de conducteurs qui vont nous intéresser dans ce manuscrit.

On peut aussi distinguer deux régimes de transport selon la valeur du rapport entre l et la taille de l'échantillon :

- Si l'échantillon est beaucoup plus grand que l , l'électron subit beaucoup de collisions sur les impuretés quand il traverse le conducteur, c'est le régime diffusif, c'est le cas d'une grande partie des échantillons métalliques.
- Si l'échantillon est du même ordre que l , l'électron ne subit pratiquement aucun choc quand il traverse le conducteur, c'est le régime balistique. C'est en général le cas des gaz bidimensionnels piégés entre deux semi-conducteurs.

Dans cette thèse on s'intéressera surtout aux métaux diffusifs.

1.2 Le formalisme de Landauer-Büttiker

Ce formalisme développé par Landauer [3, 4], Imry [5] et Büttiker [6, 7] permet de décrire le transport à basse température, voltage et fréquence en négligeant les interactions électron-électron. On peut trouver plus de détails sur ce formalisme et ses applications aux corrélations du courant dans l'article de revue de Blanter et Büttiker [8]. Nous l'introduisons ici brièvement.

Un conducteur mésoscopique connecté à deux électrodes est modélisé par une région désordonnée connectée via des guides d'ondes idéaux à deux réservoirs. La région désordonnée centrale est le lieu de collisions élastiques et conserve la cohérence de phase. On la caractérise par une matrice de diffusion qui connecte les fonctions d'ondes entrantes et sortantes de chaque côté de cette région. Si on note t la sous-matrice qui connecte les états entrant à droite aux états sortant à gauche du conducteur, les valeurs propres de $tt^\dagger$ que l'on note $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont toutes comprises entre 0 et 1. Le nombre de valeurs propres, n , correspond au nombre de canaux de transmission du conducteur et T_m est la probabilité qu'à un électron entrant dans le canal m d'être transmis à travers le conducteur mésoscopique. En donnant l'ensemble de ces probabilités, que l'on appellera aussi transparences, on caractérise de façon générale un conducteur mésoscopique ou une barrière. Il se peut qu'il n'y ait que quelques canaux de transmission comme dans les points quantiques. Pour des contacts plus larges avec un grand nombre de canaux, on utilise aussi la densité de canaux $\rho(T) = \sum_n \delta(T - T_n)$ pour caractériser une barrière.

La conductance

Si la température est nulle, dans la limite d'une faible différence de potentiel V appliquée au conducteur, on montre avec ce formalisme que la conductance est [3] :

$$G = g_Q \sum_n T_n \quad (1.1)$$

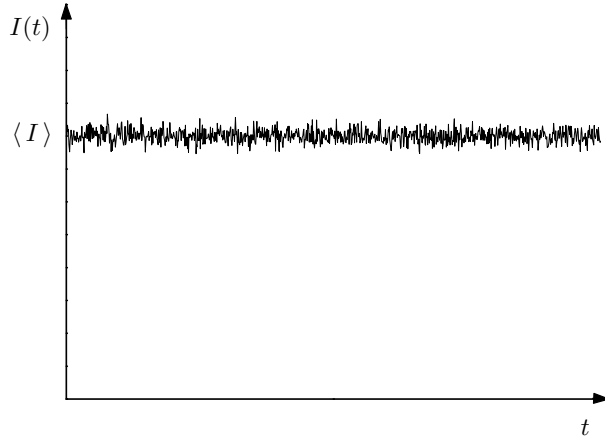


Fig. 1.1: Le courant électrique en fonction du temps fluctue autour de sa valeur moyenne $\langle I \rangle$. L'amplitude des fluctuations est caractérisée par le bruit S défini équation (1.2). Le bruit présenté ici est blanc : $I(t)$ est indépendant de $I(t + dt)$.

où $g_Q = 2e^2/h = (12.906 \text{ k}\Omega)^{-1}$ est le quantum de conductance (le facteur 2 dans g_Q provient de la dégénérescence de spin).

Le bruit

Le courant moyen (ou la conductance) n'est pas la seule observable intéressante liée au transport de charge. En effet, même quand on applique au bord du conducteur mésoscopique une différence de potentiel constante, le courant électrique en fonction du temps fluctue autour de sa valeur moyenne, c'est le bruit. La quantité mesurée expérimentalement pour quantifier ce bruit est la puissance spectrale $S(\omega)$ définie classiquement par

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} [\langle I(0)I(t) \rangle - \langle I \rangle^2] \quad (1.2)$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne sur les différentes réalisations du signal $I(t)$. En général ce bruit est constant dans jusqu'à une fréquence de coupure élevée $1/\tau_0$, où $\tau_0 \simeq h/(eV)$ est l'échelle de temps caractéristique de décroissance de la fonction d'auto-corrélation $g(t) = \langle I(0)I(t) \rangle - \langle I \rangle^2$, le bruit est alors dit *blanc*. C'est pourquoi par la suite on confondra le bruit S et $S(0)$.

Le bruit blanc dans un conducteur mésoscopique à deux origines différentes principales :

- Il y a d'abord le bruit thermique ou *Johnson-Nyquist* qui provient des fluctuations thermiques du nombre d'occupation des électrons dans les réservoirs. C'est le bruit qui domine à l'équilibre, c.-à-d. quand le courant moyen est nul. A l'aide du théorème fluctuation - dissipation, on montre qu'il est donné par $S = 4k_B T G$. Ce bruit donne accès à la température du conducteur mésoscopique quand on connaît déjà sa conductance.
- Il y a ensuite le bruit de grenaille (*shot noise* en anglais) qui est le bruit qui nous intéressera principalement dans ce mémoire. Il a pour origine le caractère discret des charges qui traverse le conducteur. C'est un bruit de partition d'origine quantique qui vient du fait qu'une particule a une probabilité T_n de traverser le canal n et $1 - T_n$ d'être réfléchi, le tout

combiné à la statistique de Fermi. Il domine quand la jonction est hors-équilibre, $k_B T \ll eV$ (V étant la différence de potentiel à travers l'échantillon), et persiste à température nulle. Pour un conducteur mésoscopique décrit avec le formalisme de Landauer-Büttiker il est donné par [9]

$$S = 2q_0^2 V g_Q \sum_n T_n (1 - T_n) \quad (1.3)$$

où q_0 est la charge élémentaire transportée. Le bruit de grenaille associé au canal n est nul si $T_n = 0$ ou $T_n = 1$ car les particules sont toutes réfléchies ou toutes transmises, il n'y a plus de partitionnement. La réduction du bruit de grenaille a été observée expérimentalement dans des points quantiques ouverts [10, 11]. La mesure du bruit permet d'accéder à la charge q_0 . Cela a été utilisé pour mesurer les charges fractionnaires dans l'effet Hall quantique [12, 13] et le doublement de la charge dans les jonctions métal normal - supraconducteur [14, 15]. Il permet aussi d'obtenir une information supplémentaire sur la distribution de transparence de la barrière.

Il existe un dernier type de bruit qui n'est pas blanc : le bruit en $1/f$. Il est présent à basse fréquence et provient des fluctuations de conductance en fonction du temps causées par le mouvement aléatoire des impuretés. Nous ne nous intéresserons pas à ce type de bruit. En pratique, on ne peut pas éviter le bruit en $1/f$ dans les expériences de mesure du bruit à basse fréquence. C'est pourquoi les mesures de bruit se font plutôt vers les kHz ou MHz, ce qui est sans conséquence, le bruit de grenaille étant blanc à ces fréquences. En outre, comme le bruit en $1/f$ est proportionnel à I^2 , on peut le distinguer dans les mesures des autres types de bruit. Notons aussi que l'on peut créer un bruit de partition en utilisant des excitations radio-fréquence même si on est à l'équilibre. Il a été récemment observé dans un point quantique [16].

1.3 La statistique complète du courant

Après nous être intéressés au courant moyen et au bruit en courant, nous allons introduire la statistique complète du courant. Initié par Levitov *et al.* [17] dans les problèmes de transport électronique, il s'agit d'étudier la distribution de probabilité du nombre de charges transmises pendant un temps fixé.

1.3.1 Description statistique du courant électrique

Le courant électrique qui traverse un circuit mésoscopique peut être analysé en termes de probabilités : c'est un processus *stochastique*. On vient de voir qu'en plus du courant moyen, il est intéressant d'étudier le bruit lié au second corrélateur du courant $\langle I(t)I(t') \rangle$ car cela permet d'obtenir de nouvelles informations sur les propriétés de transport. On est alors naturellement amené à se demander si le troisième corrélateur $\langle I(t)I(t')I(t'') \rangle$ et ceux d'ordre supérieurs contiennent de nouvelles informations sur le transport comme la charge élémentaire transportée. Pour l'instant, cette question a principalement été étudiée par les théoriciens car les corrélateurs d'ordres supérieurs à 2 sont très difficiles à mesurer, bien que récemment Reulet *et al.* [18, 19] aient réussi à mesurer le troisième corrélateur du courant dans une jonction tunnel.

Ainsi, du point de vu du théoricien, il serait intéressant d'obtenir l'ensemble des corrélateurs du courant qui sont définis classiquement par

$$\langle I^n \rangle(t_1, \dots, t_n) \equiv \langle I(t_1) \dots I(t_n) \rangle. \quad (1.4)$$

On aurait alors entièrement caractérisé le signal. C'est ce que l'on appelle obtenir *la statistique complète du courant* (*Full Counting Statistics* en anglais).

On obtient formellement les corrélateurs à partir de la fonctionnelle génératrice $\chi[f]$ définie de la façon suivante pour une fonction test f :

$$\begin{aligned} \chi[f] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} dt_1 \dots dt_n f(t_1) \dots f(t_n) \langle I(t_1) \dots I(t_n) \rangle \\ &= \langle \exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) I(t) \right) \rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Les corrélations s'obtiennent par dérivation fonctionnelle successives de χ :

$$\langle I^n \rangle(t_1, \dots, t_n) = i^n \frac{\delta^n \chi[f]}{\delta f(t_1) \dots \delta f(t_n)} \Big|_{f=0}. \quad (1.6)$$

En général, on préfère aux corrélateurs les cumulants (ou corrélateurs irréductibles) $\langle\langle I^n \rangle\rangle(t_1, \dots, t_n)$ définis par :

$$\langle\langle I^n \rangle\rangle(t_1, \dots, t_n) = i^n \frac{\delta^n \ln \chi[f]}{\delta f(t_1) \dots \delta f(t_n)} \Big|_{f=0}. \quad (1.7)$$

Les cumulants possèdent la propriété, comme leurs noms le suggère, de s'additionner pour des processus aléatoires indépendants. Par exemple, si le transport de charge est élastique, les cumulants s'obtiennent en additionnant les cumulants de chaque énergie. Ceci explique pourquoi leur utilisation est particulièrement intéressante. Le cumulant d'ordre n dépend des corrélateurs d'ordre inférieur ou égal à n . Les quatres premiers cumulants sont donnés par :

$$\begin{aligned} \langle\langle I \rangle\rangle(t) &= \langle I(t) \rangle \\ \langle\langle I^2 \rangle\rangle(t_1, t_2) &= \langle \delta I(t_1) \delta I(t_2) \rangle \\ \langle\langle I^3 \rangle\rangle(t_1, t_2, t_3) &= \langle \delta I(t_1) \delta I(t_2) \delta I(t_3) \rangle \\ \langle\langle I^4 \rangle\rangle(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \langle \delta I(t_1) \delta I(t_2) \delta I(t_3) \delta I(t_4) \rangle - (\langle \delta I(t_1) \delta I(t_2) \rangle \langle \delta I(t_3) \delta I(t_4) \rangle \\ &\quad + \langle \delta I(t_1) \delta I(t_3) \rangle \langle \delta I(t_2) \delta I(t_4) \rangle + \langle \delta I(t_1) \delta I(t_4) \rangle \langle \delta I(t_2) \delta I(t_3) \rangle) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\delta I(t) = I(t) - \langle I \rangle$.

On suppose qu'aucun paramètre extérieur ne varie au cours du temps (cela impose une différence de potentiel constante), le courant électrique est alors un processus stationnaire. Les corrélateurs et cumulants sont invariants par translation temporelle : $\langle\langle I^n \rangle\rangle(t_1, \dots, t_n) = \langle\langle I^n \rangle\rangle(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$, $\forall \tau$. Le courant moyen est constant, et le cumulant d'ordre n ne dépend

réellement que de $n - 1$ indices temporels. Il est alors utile d'introduire la transformée de Fourier des cumulants :

$$\langle\langle \tilde{I}^n \rangle\rangle(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{\mathbb{R}^n} dt_1 \dots dt_n e^{i\omega_1 t_1 + \dots + i\omega_n t_n} \langle\langle I^n \rangle\rangle(t_1, \dots, t_n), \quad (1.8)$$

$$\langle\langle I^n \rangle\rangle(t_1, \dots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\omega_1}{2\pi} \dots \frac{d\omega_n}{2\pi} e^{-i\omega_1 t_1 - \dots - i\omega_n t_n} \langle\langle \tilde{I}^n \rangle\rangle(\omega_1, \dots, \omega_n). \quad (1.9)$$

La stationnarité impose la conservation de la somme des fréquences, ainsi :

$$\langle\langle \tilde{I}^n \rangle\rangle(\omega_1, \dots, \omega_n) = 2\pi \delta(\omega_1 + \dots + \omega_n) \langle\langle \tilde{I}^n \rangle\rangle(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \quad (1.10)$$

$$\text{avec} \quad \langle\langle \tilde{I}^n \rangle\rangle(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dt_1 \dots dt_{n-1} \langle\langle I^n \rangle\rangle(t_1, \dots, t_{n-1}, 0). \quad (1.11)$$

Ce sont ces quantités $\langle\langle \tilde{I}^n \rangle\rangle(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ qui nous intéressent pour l'étude de transport, surtout leur valeur à fréquence nulle car, comme nous allons le voir, elles sont reliées à la statistique du nombre de charges transportées.

La transformée de Fourier du second cumulant à fréquence définit le bruit en courant :

$$S \equiv 2 \langle\langle \tilde{I}^2 \rangle\rangle(0) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\langle I(0)I(t) \rangle - \langle I \rangle^2]. \quad (1.12)$$

Lien avec la statistique quantique du courant

Jusqu'à présent, on a considéré que le courant était une variable classique. Cependant, pour étudier le transport à basses températures, on doit prendre en compte les effets quantiques, le courant devient alors un opérateur agissant dans un espace de Hilbert. La définition classique des corrélateurs Eq. (1.4) n'est plus pertinente car les opérateurs courant à des temps différents ne commutent pas entre eux. Il est donc nécessaire de trouver quel doit être l'ordonnement temporel des opérateurs courant sous la moyenne quantique. Pour résoudre ce problème difficile, il faut notamment se pencher sur le processus de mesure du courant [17]. Cependant, si on s'intéresse uniquement à la transformée de Fourier des cumulants à fréquence nulle, l'ordre des opérateurs courant n'est pas important si le transport est stationnaire.

Prenons l'exemple du corrélateur d'ordre 3. La stationnarité impose $\langle I(t_1)I(t_2)I(t_3) \rangle = \langle I(t_1 + \tau)I(t_2 + \tau)I(t_3 + \tau) \rangle \forall \tau$. Alors, par de simples changements de variable et sans jamais commuter les opérateurs entre eux on montre que :

$$\int dt_1 dt_2 \langle I(t_1)I(t_2)I(0) \rangle = \int dt_1 dt_2 \langle I(0)I(t_1)I(t_2) \rangle = \int dt_1 dt_2 \langle I(t_1)I(0)I(t_2) \rangle. \quad (1.13)$$

On trouve le même type de relations pour les corrélateurs d'ordre plus élevé. Ainsi, l'ordre des opérateurs courant n'est pas important si on se contente d'étudier la transformée de Fourier des cumulants à fréquence nulle, ce qui sera le cas dans toute cette thèse. Selon la convention usuelle, on utilise l'expression suivante pour la formulation quantique du bruit en courant à fréquence nulle :

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \{I(0) - \langle I \rangle, I(t) - \langle I \rangle\} \rangle, \quad (1.14)$$

$\{, \}$ désignant l'anti-commutateur. Bien entendu, si on s'intéresse aux corrélateurs à fréquence non nulle, l'ordre temporel des opérateurs est important.

1.3.2 Les charges

À cause du caractère discret des charges transportées ($-e$ pour les électrons, $-2e$ pour les paires de Cooper), il est judicieux de s'intéresser en premier lieu à l'étude du nombre de charges Q_T transportées pendant un temps T à travers le conducteur. Cela simplifie le problème car Q_T est une variable aléatoire alors que le courant est un processus stochastique.

Pour étudier la statistique de Q_T on utilise la fonction génératrice des cumulants

$$\phi = \ln \chi(\lambda) = \ln \langle e^{i\lambda Q_T} \rangle = \ln \left[\sum_n P(n) e^{i\lambda n q_0} \right], \quad (1.15)$$

où q_0 est la charge élémentaire transportée et $P(n)$ la probabilité que n charges q_0 aient traversé l'échantillon pendant le temps T . La connaissance de la fonction génératrice ϕ est équivalente à la connaissance de la distribution de probabilités $P(n)$ car on a :

$$P(n) = \frac{q_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/q_0} d\lambda e^{\phi(\lambda) - i n \lambda q_0}. \quad (1.16)$$

Le cumulant d'ordre n est défini par $\langle\langle Q_T^n \rangle\rangle = i^n d\phi/d\lambda|_{\lambda=0}$. Les deux premiers cumulants sont simplement la valeur moyenne et l'écart type de Q_T :

$$\langle\langle Q_T \rangle\rangle = \langle Q_T \rangle \quad (1.17)$$

$$\langle\langle Q_T^2 \rangle\rangle = \langle Q_T^2 \rangle - \langle Q_T \rangle^2 \quad (1.18)$$

Le cumulant d'ordre 3 (appelé *skewness* en anglais) caractérise l'asymétrie de la distribution $P(n)$:

$$\langle\langle Q_T^3 \rangle\rangle = \langle Q_T - \langle Q_T \rangle \rangle^3, \quad (1.19)$$

et le cumulant d'ordre 4 (appelé *curtosis* en anglais) caractérise l'aplatissement de la distribution $P(n)$:

$$\langle\langle Q_T^4 \rangle\rangle = \langle Q_T - \langle Q_T \rangle \rangle^4 - 3\langle (Q_T - \langle Q_T \rangle)^2 \rangle^2. \quad (1.20)$$

Voyons maintenant des exemples de statistiques qui apparaissent naturellement dans l'étude du transport de charge.

Processus binominal

Un premier exemple intéressant à étudier est celui de la statistique binominale. Elle correspond au cas où N charges q_0 tentent de traverser une barrière, la probabilité de traverser étant p , et celle d'être réfléchi $q = 1 - p$. La probabilité $P(n)$ que n charges aient traversées sur les N ayant essayé est donnée par la distribution binominale :

$$P(n) = C_N^m p^n q^{N-n}. \quad (1.21)$$

On en déduit que la fonction génératrice est

$$\chi(\lambda) = \langle e^{i\lambda Q_T} \rangle = \sum_{n=0}^{n=N} P(n) e^{i\lambda q_0 n} = \left(p e^{i\lambda q_0} + q \right)^N. \quad (1.22)$$

On en déduit les premiers cumulants :

$$\begin{aligned} \langle\langle Q_T^1 \rangle\rangle &= q_0 N p, \\ \langle\langle Q_T^2 \rangle\rangle &= q_0^2 N p (1 - p), \\ \langle\langle Q_T^3 \rangle\rangle &= q_0^3 N p (1 - p) (1 - 2p). \end{aligned}$$

Pour une jonction polarisée en tension et pour un temps de mesure T long, on peut estimer que le nombre de tentatives est donné par $N \simeq 2eVt/h$. Cela correspond au nombre maximal d'électrons qui peuvent traverser un canal de conduction pendant le temps T en tenant compte du principe d'exclusion des Fermions. En effet, chaque électron occupe une largeur en énergie de l'ordre de $dE \simeq h/T$ d'après le principe d'incertitude d'Heisenberg. Le nombre maximal d'électron qui peuvent passer est donc $2eV/dE$, le facteur 2 provenant des deux états de spin de l'électron.

Cette distribution permet de décrire les fluctuations du courant dans des circuits avec un seul canal de transmission à température nulle comme par exemple un point quantique. Dans ce cas, la probabilité p est égale à la transparence T du canal. Si il y a plusieurs canaux de transmission indépendants, les cumulants sont obtenus en sommant les cumulants de chaque canal.

Processus de Poisson

Une autre statistique qui nous sera très utile par la suite est celle du processus de Poisson. Il décrit le transport séquentiel de charge q_0 à travers une barrière de très faible transmission de façon non corrélée. Il est entièrement caractérisé par le taux de transition Γ , c.-à-d. la probabilité par unité de temps qu'une charge traverse la barrière.

Comme c'est un processus de Markov stationnaire, la probabilité $P(n, \tau)$ que n charges aient traversé la barrière pendant un temps τ satisfait l'équation maîtresse suivante [20] (voir Fig. 1.2) :

$$\frac{d}{dt} P(n, t) = \Gamma P(n-1, t) - \Gamma P(n, t) \quad (1.23)$$

avec la condition initiale $P(n, 0) = \delta_{n0}$. On trouve la solution en utilisant la fonction génératrice $\chi(\lambda)$:

$$\frac{d}{dt} \chi = \sum_n \frac{d}{dt} P(n, t) e^{i\lambda q_0 n} = \Gamma \left(e^{i\lambda q_0} - 1 \right) \chi. \quad (1.24)$$

Ainsi, $\chi(\lambda) = \exp(\Gamma t (e^{i\lambda q_0} - 1))$. On en déduit que la distribution de probabilité est donnée par :

$$P(n, t) = \frac{(\Gamma t)^n}{n!} e^{-\Gamma t}, \quad (1.25)$$

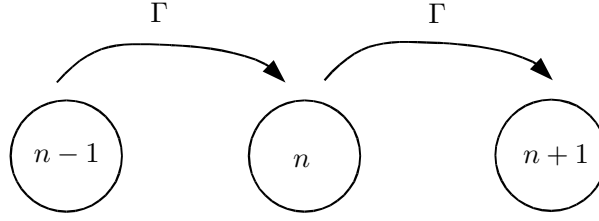


Fig. 1.2: Processus de Poisson : le nombre de charges ayant traversé la barrière augmente de 1 à chaque événement élémentaire de taux Γ .

cette distribution de probabilité exponentielle est ce que l'on appelle la distribution de Poisson. Cette distribution a la propriété d'avoir tous ces cumulants égaux, à un facteur de normalisation près :

$$\frac{1}{q_0^n} \langle \langle Q_T^n \rangle \rangle = \frac{d}{d(iq_0\lambda)^n} \ln \chi(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \Gamma T. \quad (1.26)$$

La statistique poissonnienne correspond en fait à un cas limite de la statistique binominale : on suppose que la probabilité de passage est très petite : $p = \Gamma T/N \ll 1$. Cela revient à dire que $\Gamma \ll eV/h$, ou encore, comme le courant moyen par canal est $\langle I \rangle \simeq \langle Q_T \rangle / T = eV\Gamma$ (si la température est nulle et $q_0 = e$), que la conductance G par canal satisfait $G = \langle I \rangle / V \ll g_Q/2$. Par conséquent, si la transparence de chaque canal de la barrière est beaucoup plus petite que 1, le transport est poissonnien.

Processus de Poisson bi-directionnel

En réalité, le courant électrique ne résulte pas uniquement du passage des électrons de gauche à droite de la barrière. Il existe aussi un flux de charge traversant la barrière dans l'autre sens qui doit être pris en compte pour étudier la statistique du transport de charges. On considère donc deux processus poissonniens indépendants avec deux taux de transition a priori différents : $\Gamma_{\rightarrow}$, qui correspond au passage des charges de gauche à droite et $\Gamma_{\leftarrow}$ de droite à gauche de la jonction (voir Fig. 1.3). L'équation maîtresse satisfaite par la probabilité $P(n, t)$ que n charges q_0 aient traversées la barrière de droite à gauche pendant un temps t est :

$$\frac{d}{dt} P(n, t) = \Gamma_{\rightarrow} P(n-1, t) + \Gamma_{\leftarrow} P(n+1, t) - (\Gamma_{\rightarrow} + \Gamma_{\leftarrow}) P(n, t). \quad (1.27)$$

Comme pour résoudre l'équation (1.23), on utilise encore une fois la fonction génératrice, et on trouve :

$$\chi(\lambda) = \langle e^{i\lambda Q_t} \rangle = \exp \left(\Gamma_{\rightarrow} t (e^{i\lambda q_0} - 1) \right) \exp \left(\Gamma_{\leftarrow} t (e^{-i\lambda q_0} - 1) \right). \quad (1.28)$$

On remarque que la fonction génératrice des cumulants $\phi = \ln \chi$ est la somme des fonctions génératrice de chaque processus indépendant :

$$\phi(\lambda) = \ln \langle e^{i\lambda q_0 (n_{\rightarrow} - n_{\leftarrow})} \rangle = \ln \left(\langle e^{i\lambda q_0 n_{\rightarrow}} \rangle \langle e^{-i\lambda q_0 n_{\leftarrow}} \rangle \right) = \phi_{\rightarrow}(\lambda) + \phi_{\leftarrow}(-\lambda). \quad (1.29)$$

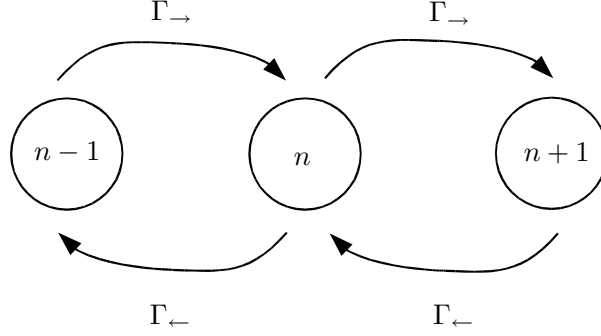


Fig. 1.3: Processus poissonnien bi-directionnel : le nombre de charges ayant traversé la barrière augmente (diminue) de 1 (-1) à chaque événement élémentaire de taux $\Gamma_{\rightarrow}$ ($\Gamma_{\leftarrow}$).

Les trois premiers cumulants sont alors donnés par

$$\langle\langle Q_t \rangle\rangle = q_0 (\Gamma_{\rightarrow} - \Gamma_{\leftarrow}) t, \quad (1.30)$$

$$\langle\langle Q_t^2 \rangle\rangle = q_0^2 (\Gamma_{\rightarrow} - \Gamma_{\leftarrow}) t, \quad (1.31)$$

$$\langle\langle Q_t^3 \rangle\rangle = q_0^3 (\Gamma_{\rightarrow} - \Gamma_{\leftarrow}) t. \quad (1.32)$$

C'est cette distribution qui permet de décrire les fluctuations du courant dans les jonctions tunnel, la mécanique quantique permettant de calculer les taux de transition.

1.3.3 Lien entre statistique des charges et du courant

Nous devons maintenant faire le lien entre les corrélateurs temporels du courant $\langle\langle I^n \rangle\rangle$, dont les trois premiers sont accessibles expérimentalement, et la statistique du nombre de charges transportées. Pour cela, on part du lien entre la charge qui a traversé le circuit pendant un temps T et le courant :

$$Q_T = \int_0^T dt' I(t'). \quad (1.33)$$

On en déduit que le cumulants d'ordre n de Q_T est donné par

$$\langle\langle Q_T^n \rangle\rangle = \int_0^T dt'_1 \dots dt'_n \langle\langle I^n \rangle\rangle(t'_1, \dots, t'_n) \quad (1.34)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_i \frac{d\omega_i}{2\pi} \left[\frac{e^{i\omega_i T} - 1}{i\omega_i} \right] 2\pi \delta(\omega_1 + \dots + \omega_n) \langle\langle \tilde{I}^n \rangle\rangle(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \quad (1.35)$$

En faisant le changement de variable $u_i = \omega_i T$, on montre alors que pour des temps de mesure T long, on a :

$$\langle\langle Q_T^n \rangle\rangle_{T \rightarrow +\infty} = T \langle\langle \tilde{I}^n \rangle\rangle(0, \dots, 0) = T \int_{\mathbb{R}^n} dt_1 \dots dt_n \langle\langle I^n \rangle\rangle(t_1, \dots, t_{n-1}, 0). \quad (1.36)$$

Ainsi, pour des temps longs, *les cumulants de Q_T sont égaux à la transformée de Fourier à fréquence nulle des cumulants du courant.*

Le courant moyen et le bruit sont donnés finalement par

$$\langle I \rangle = \langle \langle Q_T \rangle \rangle / T, \quad (1.37)$$

$$S = 2 \langle \langle Q_T^2 \rangle \rangle / T. \quad (1.38)$$

De plus, le temps de corrélation du signal électrique est en général très petit. Dans ce cas les cumulants dans l'espace de Fourier $\langle \langle \tilde{I}^n \rangle \rangle$ sont constants, le bruit est blanc. Les cumulants de la charges transportées $\langle \langle Q_T^n \rangle \rangle$ suffisent alors pour décrire le signal.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons d'abord précisé ce qu'est un conducteur mésoscopique, puis introduit brièvement le formalisme de la matrice de diffusion de Landauer-Büttiker pour enfin discuter plus en détail de la statistique du transport de charge. Avec cette première base, nous allons maintenant pouvoir nous intéresser plus en détail au bruit dans les structures mésoscopiques métal normal - supraconducteur où la réflexion Andreev joue un rôle crucial.

Chapitre 2

Bruit en courant d'une jonction tunnel métal normal - supraconducteur

Introduction

Beaucoup de progrès théoriques ont récemment été faits dans la compréhension des fluctuations de courant dans les structures hybrides mésoscopiques métal normal (N) - supraconducteur (S) [8, 21–23]. Ils sont notamment dus au développement des techniques de calcul de la statistique complète du courant (*Full Counting Statistics*) [17, 24, 25]. Il a ainsi été possible de calculer les fluctuations du courant dans un fil diffusif en bon contact avec un supraconducteur en prenant en compte les effets de proximité quel que soit le voltage et la température sous le gap Δ du supraconducteur [26]. La limite opposée d'une jonction tunnel entre un métal normal et un supraconducteur a été beaucoup moins étudiée. C'est peut-être parce qu'il n'est possible que depuis récemment de mesurer le bruit dans une telle structure [15]. Pourtant l'amplitude du rapport bruit sur courant est bien plus importante dans les jonctions tunnel.

La première étude théorique du bruit dans une jonction NIS (I désigne une fine couche d'isolant jouant le rôle de barrière tunnel) a été faite par Khlus [27] en 1987 mais sans inclure les effets de proximité. Plus tard, de Jong et Beenakker ont pris en compte ces effets de proximité pour des voltage et température tendant vers zéro [28]. Les effets à voltage et température fini n'ont été considérés que récemment en utilisant des calculs numériques [29]. D'autres structures plus compliquées contenant plusieurs barrières tunnel ont été étudiées. Dans certaines limites, elles peuvent se réduire à une seule barrière NIS reliée à une région normale complexe [30–32]. En fait, on s'attend à ce que le bruit à température et voltage fini (de l'ordre de l'énergie de Thouless E_{th}) dépende de la géométrie de l'échantillon quand il y a une barrière tunnel [33]. Mais jusqu'à présent cela n'a jamais été étudié de façon générale.

Il a été montré par Hekking et Nazarov [34, 35] que le courant sous le gap peut être fortement affecté par les diffusions cohérentes des électrons au voisinage de la jonction. Deux électrons venant du supraconducteur peuvent se propager sur une longueur de l'ordre de $\xi_\varepsilon = \sqrt{\hbar D/\varepsilon}$ avant d'être déphasés (D est la constante de diffusion). Si les énergies typiques fournies par l'extérieur

eV et $k_B T$ sont suffisamment petites, la longueur de cohérence $\xi_{\text{coh}} = \sqrt{\hbar D / \max(eV, k_B T)}$ peut être beaucoup plus grande que le libre parcours moyen l . Dans ce cas, à faible voltage et basse température les paires d'électrons peuvent sonder la géométrie de la jonction sur une échelle de longueur $\xi_{\text{coh}} \gg l$. De plus, comme la jonction est tunnel, les paires d'électrons doivent essayer un grand nombre de fois de la traverser avant de finalement réussir, la diffusion leur permettant de rester plus longtemps au voisinage de la barrière. Tout cela augmente le nombre d'interférences des électrons et modifie énormément la dépendance en énergie du courant. De plus la conductance dépend fortement de la géométrie de l'échantillon car les électrons auront « sondé » sur une échelle ξ_{coh} la jonction [34, 35]. Dans ce chapitre, nous allons étudier comment les mêmes effets de diffusion cohérente de paires d'électrons influent sur le bruit en courant d'une jonction tunnel NIS.

Nous allons montrer qu'à l'équilibre thermodynamique on obtient une relation de Schottky généralisée pour tout voltage et température inférieure au gap du supraconducteur :

$$S(V, T) = 4e \coth(eV/k_B T) I(V, T). \quad (2.1)$$

À cause de l'effet de proximité et de la barrière, la caractéristique courant-tension est à la fois non-universelle et non-linéaire. Mais, comme on le voit à partir de l'équation (2.1), le rapport $F = S/(2eI) = 2 \coth(eV/k_B T)$, appelé facteur de Fano, est universel. En particulier, quand $k_B T \ll eV$ le facteur de Fano est 2, ce qui indique que la charge élémentaire transportée est $2e$, celle des paires de Cooper. Par contre, si le métal normal n'est pas à l'équilibre thermodynamique, nous proposons une méthode pour calculer le facteur de Fano une fois que la géométrie de l'échantillon est connue. Nous montrerons que dans ce cas le bruit et le courant sont indépendants l'un de l'autre et dépendent de la géométrie de la structure. On aura ainsi une forte déviation de (2.1).

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Après avoir modélisé la jonction, on étudie le transport de charge dû aux quasi-particules dans une jonction NIS. Cela nous permet de souligner l'importance de la réflexion Andreev dans le transport sous le gap. Nous étudierons ensuite le transport par réflexion Andreev puis discuterons un exemple hors équilibre réaliste où la relation (2.1) n'est plus valide.

2.1 Modélisation de la jonction NIS

On s'intéresse donc dans ce chapitre au transport des électrons à travers une jonction NIS formée d'un métal normal et un supraconducteur connecté par une fine couche d'isolant (voir Fig. 2.1). On applique à la jonction une différence de potentiel V constante et on mesure le courant qui la traverse. Pour décrire le transport de charge à travers la jonction, nous utilisons l'approche standard de l'hamiltonien tunnel.

2.1.1 Le métal normal

On modélise l'électrode normale par un réservoir d'électrons libres. Sa dynamique est décrite par l'hamiltonien suivant :

$$H_N = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}. \quad (2.2)$$

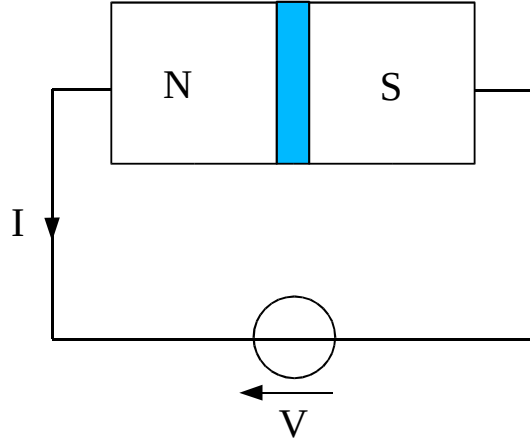


Fig. 2.1: Schéma de la jonction NIS composée d'un métal normal (N) connecté à un supraconducteur (S) via une fine couche d'isolant (I). Un potentiel V continu est appliqué aux bornes de la jonction, et on mesure le courant I qui la traverse.

L'indice $\mathbf{k}$ labélise les états propres de H_N de valeurs propres $\xi_{\mathbf{k}}$. Les deux états de spin des électrons sont indicés par $\sigma = \uparrow, \downarrow$. L'hamiltonien (2.2) est valable même en présence de désordre provenant d'impuretés ou de défauts dans le réseau cristallin. Mais dans ce cas $\mathbf{k}$ n'a aucun lien avec l'impulsion de l'électron et sert juste à indiquer les états propres. Les opérateurs de destruction et création c et $c^\dagger$ satisfont les relations usuelles d'anti-commutation :

$$\{c_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, c_{\mathbf{k}_2\sigma_2}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \delta_{\sigma_1\sigma_2}, \quad (2.3)$$

$$\{c_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, c_{\mathbf{k}_2\sigma_2}\} = \{c_{\mathbf{k}_1\sigma_1}^\dagger, c_{\mathbf{k}_2\sigma_2}^\dagger\} = 0. \quad (2.4)$$

L'électrode normale est portée au potentiel V . Ainsi le potentiel chimique dans l'électrode normale est décalé : $\mu_N \rightarrow \mu_N + eV$. Le nombre d'occupation d'un état $\mathbf{k}\sigma$ à la température T est donc donné par :

$$n_{\mathbf{k}\sigma} = \langle c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = \frac{\text{tr}(e^{-\beta K_N} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma})}{\text{tr}(e^{-\beta K_N})} = f(\xi_{\mathbf{k}} - eV). \quad (2.5)$$

où $K_N = H_N - eV \sum_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}$, $\beta = 1/(k_B T)$ et $f(\xi) = (1 + \exp(\beta\xi))^{-1}$ est la fonction de Fermi.

2.1.2 Le supraconducteur

On modélise le supraconducteur par un hamiltonien H_{BCS} de type Bardeen Cooper Schrieffer (BCS)[36]. Ce modèle reproduit bien les effets dus aux quasi-particules dans les supraconducteurs de type s (dont le gap est à symétrie sphérique dans l'espace des impulsions). En plus de bien décrire la supraconductivité conventionnelle, il présente l'avantage de permettre les calculs analytiques. Il est donné par [37] :

$$H_{BCS} = \sum_{\mathbf{q}\sigma} \zeta_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger d_{\mathbf{q}\sigma} + \sum_{\mathbf{q}} \Delta [d_{\mathbf{q}\downarrow}^\dagger d_{-\mathbf{q}\uparrow}^\dagger + d_{-\mathbf{q}\uparrow} d_{\mathbf{q}\downarrow}]. \quad (2.6)$$

L'indice $\mathbf{q}$ numérote les états propres de l'hamiltonien du métal dans l'état non supraconducteur, $\zeta_{\mathbf{q}}$ sont ses valeurs propres. On convient que l'état $-\mathbf{q}$ est égal à l'état $\mathbf{q}$ renversé temporellement. Comme pour l'hamiltonien de l'électrode normale, H_{BCS} peut contenir du désordre, dans ce cas $\mathbf{q}$ ne correspond pas à l'impulsion des électrons. Les opérateurs fermioniques $d_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger$ et $d_{\mathbf{q}\sigma}$ de création et destruction satisfont les relations d'anti-commutation usuelles :

$$\{d_{\mathbf{q}_1\sigma_1}, d_{\mathbf{q}_2\sigma_2}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}\delta_{\sigma_1\sigma_2}, \quad (2.7)$$

$$\{d_{\mathbf{q}_1\sigma_1}, d_{\mathbf{q}_2\sigma_2}\} = \{d_{\mathbf{q}_1\sigma_1}^\dagger, d_{\mathbf{q}_2\sigma_2}^\dagger\} = 0. \quad (2.8)$$

L'hamiltonien BCS peut être diagonalisé par la transformation canonique de Bogoliubov :

$$d_{\mathbf{q}\uparrow} = u_{\mathbf{q}}\gamma_{\mathbf{q}\uparrow} + v_{\mathbf{q}}\gamma_{-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger, \quad (2.9)$$

$$d_{\mathbf{q}\downarrow} = u_{\mathbf{q}}\gamma_{\mathbf{q}\downarrow} - v_{\mathbf{q}}\gamma_{-\mathbf{q}\uparrow}^\dagger. \quad (2.10)$$

Les coefficients $u_{\mathbf{q}}$ et $v_{\mathbf{q}}$ sont parfois appelé facteurs de cohérence BCS, ils sont donnés par $v_{\mathbf{q}}^2 = 1 - u_{\mathbf{q}}^2 = (1 - \zeta_{\mathbf{q}}/E_{\mathbf{q}})/2$ et ont la propriété $u_{-\mathbf{q}} = u_{\mathbf{q}}$ et $v_{-\mathbf{q}} = v_{\mathbf{q}}$. L'énergie des excitations est donnée par $E_{\mathbf{q}} = \sqrt{\zeta_{\mathbf{q}}^2 + \Delta^2}$. Les opérateurs de quasi-particules fermioniques γ et $\gamma^\dagger$ satisfont les mêmes types de relations d'anti-commutation (2.7) que d et $d^\dagger$. L'hamiltonien de l'équation (2.6) devient alors à une constante additive près :

$$H_{BCS} = \sum_{\mathbf{q}\sigma} E_{\mathbf{q}} \gamma_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger \gamma_{\mathbf{q}\sigma}. \quad (2.11)$$

On voit ainsi que pour créer une excitation dans le supraconducteur il faut fournir une énergie supérieure au gap Δ .

On suppose que le supraconducteur est fixé à la masse, ainsi le nombre d'occupation d'un état avec une quasi-particule est donné par :

$$n_{\mathbf{q}\sigma} = \langle \gamma_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger \gamma_{\mathbf{q}\sigma} \rangle = \frac{\text{tr}(e^{-\beta H_{BCS}} \gamma_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger \gamma_{\mathbf{q}\sigma})}{\text{tr}(e^{-\beta H_{BCS}})} = f(E_{\mathbf{q}}). \quad (2.12)$$

Donc quand l'énergie thermique $k_B T$ est beaucoup faible que le gap Δ , $n_{\mathbf{q}\sigma} \simeq 0$, il n'y a pratiquement pas de quasi-particules présentes dans le supraconducteur.

2.1.3 La jonction tunnel

Les électrons peuvent passer d'un réservoir à l'autre par effet tunnel. On prend en compte ces transferts avec l'hamiltonien suivant :

$$H_T = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \sigma} [t_{\mathbf{k}\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger d_{\mathbf{q}\sigma} + t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^* d_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}], \quad (2.13)$$

Le premier terme correspond au passage des électrons de l'électrode normale vers le supraconducteur : $d_{\mathbf{q}\sigma}$ détruit un électron dans le supraconducteur et $c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ crée un électron dans le métal normal. Le second terme de (2.13) permet le passage des électrons dans l'autre sens. Le couplage

entre les deux réservoirs est contrôlée par l'amplitude tunnel $t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$. On la suppose indépendante du spin des électrons, ce qui revient à supposer qu'il n'y a pas d'impuretés magnétiques au voisinage de la barrière. On peut la réécrire de la façon suivante :

$$t_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' t(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}'), \quad (2.14)$$

où $t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est l'amplitude quantique pour qu'un événement tunnel se produise du point $\mathbf{r}$ du métal normal au point $\mathbf{r}'$ du supraconducteur. Toute l'information sur le désordre est contenue dans les fonctions propres $\psi_{\mathbf{k}/\mathbf{q}}$. L'amplitude tunnel est par hypothèse un petit paramètre, le transport se faisant par effet tunnel, la probabilité $|t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2$ qu'un électron traverse la barrière est très faible.

Ainsi, la dynamique de la jonction NIS est décrite par l'hamiltonien suivant :

$$H = H_N + H_{BCS} + H_T. \quad (2.15)$$

Les deux premiers termes $H_N + H_{BCS} = H_0$ correspondent à l'évolution libre des électrons. H_T est la perturbation.

2.2 Transport de charge via les quasi-particules

Nous allons tout d'abord évaluer le courant qui passe à travers la jonction NIS à l'ordre $|t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2$, soit le plus bas en perturbation. Ce courant est dû aux quasi-particules présentes dans le supraconducteur. On peut deviner que si $eV, k_B T \ll \Delta$, l'énergie disponible sera insuffisante pour exciter des quasi-particules dans le supraconducteur, le courant et le bruit seront alors nuls. Voyons plus en détail comment le transport de charge par les quasi-particules est supprimé.

On définit d'abord l'opérateur courant I dont la valeur moyenne quantique $\langle I \rangle$ correspond au courant moyen $\langle I \rangle$ mesuré à travers la jonction. Il est défini par la dérivée temporelle de l'opérateur $N = \sum_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}$ qui représente le nombre de particules de l'électrode normale :

$$I = e \frac{dN}{dt} = -\frac{ie}{\hbar} [N, H]. \quad (2.16)$$

En utilisant les relations d'anti-commutation (2.3) et (2.7) on obtient :

$$I = -\frac{ie}{\hbar} (J - J^\dagger) \quad \text{avec} \quad J = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \sigma} t_{\mathbf{k}\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger d_{\mathbf{q}\sigma}. \quad (2.17)$$

La valeur moyenne du courant est alors donnée par (voir l'annexe A)

$$\langle I \rangle = \langle S^\dagger(t, -\infty) I(t) S(t, -\infty) \rangle_0 \quad (2.18)$$

où l'opérateur d'évolution est :

$$S(t, -\infty) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' H_T(t') \right]. \quad (2.19)$$

Ici, les opérateurs évoluent avec la partie libre H_0 de l'hamiltonien totale : pour un opérateur O quelconque : $O(t) = \exp(iH_0 t/\hbar) O \exp(-iH_0 t/\hbar)$, donc $c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t) = e^{i\xi_{\mathbf{k}} t/\hbar} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ et $\gamma_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger(t) = e^{iE_{\mathbf{q}} t/\hbar} \gamma_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger$. De plus, la moyenne d'un opérateur O sur la partie libre de l'hamiltonien est donnée par $\langle O \rangle_0 = \text{tr}(\rho_0 O)$ avec $\rho_0 = \exp(-\beta K_0)/\text{tr}(\exp(-\beta K_0))$ et $K_0 = H_0 - eV \sum_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}$. Les détails de la dérivation (2.18) sont présentés dans l'annexe A. En développant l'opérateur d'évolution au premier ordre en H_T , on obtient :

$$\langle I(t) \rangle = \langle I(t) \rangle_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \langle [I(t), H_T(t')] \rangle_0 + \dots \quad (2.20)$$

Le premier terme de (2.20) est nul. On réécrit le second terme de la façon suivante :

$$\langle I \rangle = e (N_{\rightarrow}^{\text{quasi}} - N_{\leftarrow}^{\text{quasi}}) \quad (2.21)$$

avec

$$N_{\rightarrow}^{\text{quasi}} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle J(0) J^\dagger(t') \rangle_0 \quad \text{et} \quad N_{\leftarrow}^{\text{quasi}} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle J^\dagger(t') J(0) \rangle_0. \quad (2.22)$$

De la même façon on calcule le bruit en courant à fréquence nulle :

$$S(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\langle \{I(t), I(0)\} \rangle - 2\langle I(t) \rangle \langle I(0) \rangle]. \quad (2.23)$$

à l'ordre le plus bas en perturbation ($\sim |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2$), il n'est pas nécessaire de développer l'opérateur d'évolution et on trouve :

$$S = 2e^2 (N_{\rightarrow}^{\text{quasi}} + N_{\leftarrow}^{\text{quasi}}). \quad (2.24)$$

Les quantités $N_{\rightleftharpoons}^{\text{quasi}}$ représentent les taux de transfert des électrons allant de N à S ou de S à N. Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} N_{\rightarrow}^{\text{quasi}} &= \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2 [u_{\mathbf{q}}^2 (1 - f(E_{\mathbf{q}})) \delta(E_{\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}}) + v_{\mathbf{q}}^2 f(E_{\mathbf{q}}) \delta(E_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}})] f(\xi_{\mathbf{k}} - eV) \\ N_{\leftarrow}^{\text{quasi}} &= \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2 [u_{\mathbf{q}}^2 f(E_{\mathbf{q}}) \delta(E_{\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}}) + v_{\mathbf{q}}^2 (1 - f(E_{\mathbf{q}})) \delta(E_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}})] (1 - f(\xi_{\mathbf{k}} - eV)) \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, on suppose que l'amplitude tunnel est constante : $t_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = t$, cela revient à considérer que la jonction est ponctuelle quand les fonctions propres sont des ondes planes, cf. Eq. (2.14). Bien que cette hypothèse ne remette pas en cause les conclusions de cette section, nous verrons par la suite qu'elle est en générale fautive car l'amplitude de transfert tunnel dépend de l'angle d'incidence de l'électron sur la barrière.

Le transport provient surtout des électrons qui sont au voisinage de la surface de Fermi. On peut alors transformer les sommes sur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ par des intégrales :

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \nu_{N0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \quad \text{et} \quad \sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \nu_{S0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi. \quad (2.25)$$

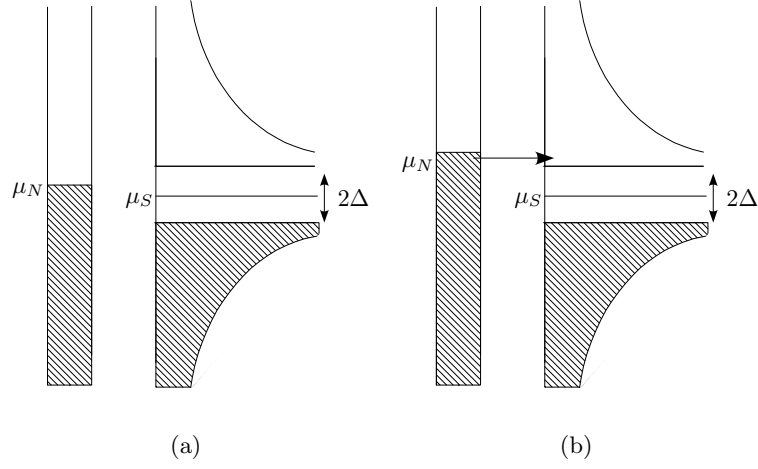


Fig. 2.2: Densité d'état en fonction de l'énergie à $T = 0$ dans le métal normal et le supraconducteur. Figure (a) : $\mu_N - \mu_S = eV < \Delta$, aucune charge ne traverse la jonction, $I = 0$. Figure (b) : $eV > \Delta$, les charges traversent la jonction, $I > 0$.

où ν_{N0} est la densité d'état par spin du métal normal au niveau de Fermi et ν_{S0} la densité d'état par spin au niveau de Fermi du supraconducteur quand il est dans l'état normal. On obtient finalement après calcul :

$$\left(\begin{array}{c} N_{\rightarrow}^{\text{quasi}} \\ N_{\leftarrow}^{\text{quasi}} \end{array} \right) = \frac{G_T}{e^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{\nu_S(E)}{\nu_{S0}} \left(\begin{array}{c} (1 - f(E)) f(E - eV) \\ f(E) (1 - f(E - eV)) \end{array} \right). \quad (2.26)$$

Dans l'expression précédente $\nu_S(E) = \nu_{S0}|E|\Theta(|E| - \Delta)/\sqrt{E^2 - \Delta^2}$ est la densité d'état du supraconducteur¹, $G_T = g_q|t|^2\nu_{N0}\nu_{S0}$ la conductance de la jonction lorsque le supraconducteur est dans l'état normal. Ainsi en combinant (2.21) et (2.26), on constate qu'à température nulle la conductance est proportionnelle à la densité d'état du supraconducteur :

$$G = \frac{dI}{dV} = G_T \frac{\nu_S(V)}{\nu_{S0}}, \quad (2.27)$$

donc si $|V| < \Delta$, la batterie ne fournit pas suffisamment d'énergie pour que les électrons puissent traverser la barrière : le courant est nul (cf. Fig. 2.2). À température finie, la conductance est proportionnelle à la densité d'état du supraconducteur moyennée sur une largeur $k_B T$. Dans la limite $k_B T \ll \Delta$ la conductance à température nulle est supprimée exponentiellement :

$$G|_{V=0} = G_T \sqrt{\frac{2\pi\Delta}{k_B T}} e^{-\Delta/k_B T}.$$

Nous avons tracé la conductance en fonction de V en figure 2.3. On voit bien que pour des énergies inférieures au gap ($eV, k_B T \ll \Delta$) le courant relatif aux quasi-particules est pratiquement nul.

¹ Θ est la fonction de Heaviside.

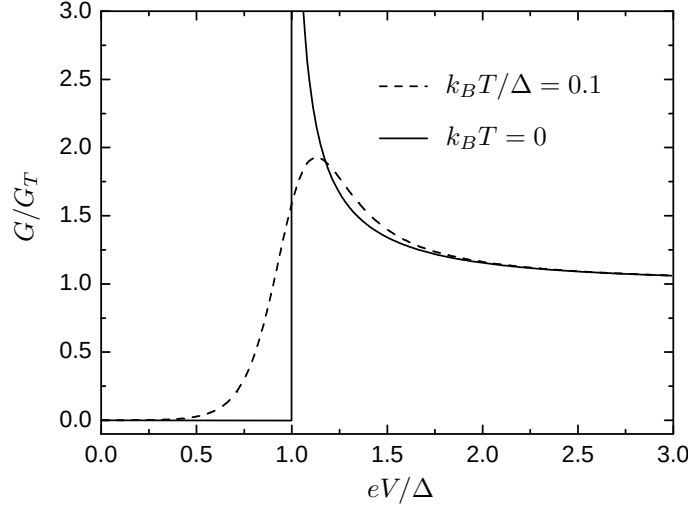


Fig. 2.3: Conductance différentielle normalisée par G_T , la conductance dans l'état normal, en fonction du voltage appliqué à la fonction. La courbe pointillé correspond à $T = 0$, la courbe continue à $k_B T / \Delta = 0.1$.

Pour le bruit en courant, le comportement est similaire. En effet à partir de l'équation (2.26) on voit que $N_{\rightarrow}^{\text{quasi}} = e^{\beta eV} N_{\leftarrow}^{\text{quasi}}$ car $(1 - f(E))f(E + eV) = e^{\beta eV} f(E)(1 - f(E + eV))$. Donc en combinant (2.21) et (2.23) on trouve que

$$S_{\text{quasi}}(V, T) = 2e \coth\left(\frac{eV}{2k_B T}\right) I_{\text{quasi}}(V, T), \quad (2.28)$$

et comme le courant de quasi-particule est nul sous le gap, le bruit l'est aussi.

Nous venons ainsi de voir que pour des énergies $(eV, k_B T) \ll \Delta$, aucune charge n'est transportée par les quasi-particules. Elles ne contribuent donc ni au courant, ni au bruit.

2.3 Transport de charges par réflexions Andreev

2.3.1 La réflexion Andreev

Nous venons de voir que si les énergies disponibles eV et $k_B T$ sont beaucoup plus faible que le gap Δ , elles ne sont pas suffisantes pour exciter les quasi-particules dans le supraconducteur, elles ne peuvent donc pas transporter de courant. Dans ce cas, il est nécessaire d'aller à un ordre supérieur en perturbation pour trouver le premier terme qui donne un courant non nul. Il faut pour cela développer l'opérateur d'évolution S dans l'équation (2.18) à l'ordre H_T suivant. Nous allons utiliser une démarche légèrement différente, bien que totalement équivalente à la précédente. Elle présente l'avantage de faciliter les discussions physiques.

Même si une quasi-particule ne peut exister dans le supraconducteur à cause de la conservation d'énergie, deux électrons du métal normal peuvent passer quasi-instantanément dans le supraconducteur (sur un temps de l'ordre de $\hbar/\Delta \approx 10^{-11}$ s pour l'aluminium) et former une paire de Cooper. Ce phénomène s'appelle la réflexion Andreev [38]. Comme le fait d'ajouter

une paire de Cooper au condensat ne coûte pas d'énergie, ces processus existent à basse énergie. Le système ne passe alors que *virtuellement* par un état avec une quasi-particule dans le supraconducteur.

L'amplitude de probabilité pour passer d'un état initial $|i\rangle$ à un état final $|f\rangle$ au second ordre en perturbation est (cf. [39], chapitre 6) :

$$A_{i \rightarrow f} = \sum_m \frac{\langle f | H_T | m \rangle \langle m | H_T | i \rangle}{E_m^0 - E_i^0}. \quad (2.29)$$

L'état $|m\rangle$ est un état virtuel d'énergie E_m^0 , $H_0|m\rangle = E_m^0|m\rangle$ et l'état initial a une énergie E_i^0 : $H_0|i\rangle = E_i^0|i\rangle$. L'état initial a la forme suivante : $|i\rangle = |i_N\rangle \otimes |BCS\rangle$. Ici $|i_N\rangle$ est un état à n particule de H_N et $|BCS\rangle$ est le fondamental variationnel BCS [37]. Ce dernier correspond au vide des opérateurs quasi-particules : $\gamma_{q\sigma}|BCS\rangle = 0$. On cherche un état final pour lequel deux électrons du métal normal sont passés dans le supraconducteur sans créer de quasi-particule. Pour que cet état soit atteint, il faut que les éléments de matrice $\langle i | H_T | m \rangle$ et $\langle m | H_T | f \rangle$ soient non nuls simultanément. On trouve alors que les deux électrons en jeu doivent être de spin opposé, l'état final est donc $|f\rangle = c_{\mathbf{k}\uparrow} c_{\mathbf{k}'\downarrow} |i\rangle$.

Il y a deux sortes d'états intermédiaires possibles $|m_1\rangle = \gamma_{\mathbf{q}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}\uparrow} |i\rangle$ ou $|m_2\rangle = \gamma_{\mathbf{q}\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{k}'\downarrow} |i\rangle$, ceux-ci dépendent de l'état du spin ($\uparrow$ ou $\downarrow$) de l'électron qui entre le premier dans le supraconducteur. En utilisant (2.9) on calcule les éléments de matrice :

$$\begin{aligned} \langle f | H_T | m_1 \rangle &= -t_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^* v_{\mathbf{q}}, & \langle m_1 | H_T | i \rangle &= t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^* u_{\mathbf{q}}, \\ \langle f | H_T | m_2 \rangle &= -t_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^* v_{\mathbf{q}}, & \langle m_2 | H_T | i \rangle &= t_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^* u_{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

et les différences d'énergie sont données par $E_{m_1} - E_i = E_{\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}} - eV$, $E_{m_2} - E_i = E_{\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}'} - eV$. On trouve finalement que l'amplitude de probabilité pour que deux électrons $\mathbf{k} \uparrow$ et $\mathbf{k}' \downarrow$ du réservoir normal créent une paire de Cooper est [34, 35] :

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \sum_{\mathbf{q}} t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^* t_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^* u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \left\{ \frac{1}{\xi_{\mathbf{k}} + eV - E_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{\xi_{\mathbf{k}'} + eV - E_{\mathbf{q}}} \right\}. \quad (2.30)$$

Il existe aussi le processus opposé qui détruit une paire de Cooper et crée deux électrons $\mathbf{k} \uparrow$ et $\mathbf{k}' \downarrow$ dans le réservoir normal. L'amplitude de probabilité associée est simplement $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*$. On peut alors écrire un hamiltonien effectif H_{eff} qui ne prend en compte que les processus de réflexion Andreev. À basse énergie, il décrit correctement le transport de charge de la jonction NIS car ce sont ces processus qui dominent. Il est donné par [40] :

$$H_{\text{eff}} = H_N + J_{\text{eff}} + J_{\text{eff}}^\dagger \quad (2.31)$$

$$\text{avec } J_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger b_o, \quad (2.32)$$

ici $b_o = (2/N_S) \sum_{\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}\uparrow} d_{-\mathbf{q}\downarrow}$ est l'opérateur destruction d'une paire de Cooper dans le condensat, $\phi_{\mathbf{q}} = v_{\mathbf{q}}/u_{\mathbf{q}}$ est la fonction d'onde de la paire et N_S le nombre de fermions dans le supraconducteur. En pratique, comme le supraconducteur est dans sa phase cohérente, les valeurs moyennes de l'opérateur b_o sont triviales : $\langle b_o \rangle = \langle b_o^\dagger \rangle = \langle b_o^\dagger b_o \rangle = 1$. Dans la suite, on remplacera

cette opérateur par le nombre 1. L'hamiltonien (2.31) avec une amplitude $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ constante a déjà été utilisé par plusieurs auteurs pour décrire de façon phénoménologique l'influence des modes collectifs sur la réflexion Andreev [41, 42].

On utilise alors la même approche que pour l'étude du transport de charge dû aux quasi-particules dans la section 2.2. La perturbation est maintenant $H_{T\text{eff}} = J_{\text{eff}} + J_{\text{eff}}^\dagger$, avec un nouveau couplage $A \sim t^2$. L'opérateur courant est proportionnel à la dérivée de l'opérateur nombre de particules dans le reservoir normal :

$$I(t) = e \frac{dN}{dt} = \frac{ie}{\hbar} [H_{\text{eff}}, N] = -\frac{2ie}{\hbar} [J_{\text{eff}}(t) - J_{\text{eff}}^\dagger(t)] . \quad (2.33)$$

Un facteur 2 apparaît dans l'opérateur courant par rapport aux quasi-particules. En effet, c'est maintenant une charge élémentaire $2e$ qui est transférée. L'opérateur d'évolution en représentation interaction devient

$$S(t, -\infty) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' H_{T\text{eff}}(t') \right] . \quad (2.34)$$

En développant cet opérateur au premier ordre non nul en A , on en déduit le courant moyen $\langle I \rangle$ et le bruit à fréquence nulle S :

$$\langle I \rangle = 2e (N_{\rightarrow} - N_{\leftarrow}) , \quad (2.35)$$

$$S = 8e^2 (N_{\rightarrow} + N_{\leftarrow}) , \quad (2.36)$$

avec

$$N_{\rightarrow} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle J_{\text{eff}}(0) J_{\text{eff}}^\dagger(t') \rangle_0 \quad \text{et} \quad N_{\leftarrow} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle J_{\text{eff}}^\dagger(t') J_{\text{eff}}(0) \rangle_0 . \quad (2.37)$$

Ce résultat dépend seulement du fait que le transport de charge peut être décrit comme un processus au premier ordre par rapport à une amplitude tunnel.

Dans ce cas, Levitov et Reznikov [43] ont montré que la statistique du nombre de charge est bi-poissonnienne, la fonction génératrice des cumulants étant :

$$\phi(\lambda) = \ln \langle e^{i\lambda Q_{t_0}} \rangle = (e^{2ie\lambda} - 1)t_0 N_{\rightarrow} + (e^{-2ie\lambda} - 1)t_0 N_{\leftarrow} . \quad (2.38)$$

Pour plus de détails, se reporter à la section 1.3. Les dérivées successives de cette fonction par rapport à $i\lambda$ prises en $\lambda = 0$ donnent l'ensemble des cumulants. On voit en effet que l'on a bien $I t_0 = \partial \phi / \partial (i\lambda)$, et $S t_0 = 2 \partial^2 \phi / \partial (i\lambda)^2$. Ainsi la statistique du courant est entièrement déterminée par les deux premiers cumulants, le courant moyen I et le bruit à fréquence nulle S .

On suppose maintenant que le réservoir normal est à l'équilibre thermodynamique. Nous allons montrer que dans ce cas le courant et le bruit sont proportionnels. La valeur moyenne quantique d'un opérateur O est $\langle O \rangle_0 = \text{tr}[\exp(-\beta K_N) O] / \mathcal{Z}$ où $\mathcal{Z}$ est la fonction de partition grand canonique $\mathcal{Z} = \text{tr}[\exp(-\beta K_N)]$. Les opérateurs $c_{\mathbf{k}\sigma}$ et $c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ dans l'équation (2.37) évoluent avec H_N : $c_{\mathbf{k}\sigma}(t) = e^{itH_N/\hbar} c_{\mathbf{k}\sigma} e^{-itH_N/\hbar}$. Il est plus commode que l'évolution temporelle et la moyenne statistique se fassent avec le même opérateur K_N , cela permet d'extraire facilement la différence de potentiel eV . Comme on a la relation

$$c_{\mathbf{k}\sigma}(t) = e^{-ieVt/\hbar} e^{itK_N/\hbar} c_{\mathbf{k}\sigma} e^{-itK_N/\hbar} , \quad (2.39)$$

on voit ainsi que l'on peut remplacer $c_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ évoluant avec H_N par $e^{-ieVt/\hbar}c_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ où cette fois $c_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ évolue avec K_N . Cela revient à faire le changement de jauge $\xi_{\mathbf{k}} \rightarrow \xi_{\mathbf{k}} + eV$. La différence de potentiel apparaît alors comme une phase provenant du remplacement $J_{\text{eff}}(t) \rightarrow e^{2ieVt/\hbar}J_{\text{eff}}(t)$ où cette fois les opérateurs évoluent avec K_N . On peut alors développer les taux de transfert $N_{\rightleftharpoons}$ dans l'équation (2.37) sur la base $|n\rangle$ des états propres de K_N de valeur propre E_n . On obtient alors $I = 2eC_-$ et $S = 8e^2C_+$ avec

$$C_{\pm} = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{nm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-2ieVt/\hbar} \frac{e^{-\beta E_n}}{\mathcal{Z}} (|J_{nm}|^2 e^{-i\omega_{nm}t} \pm |J_{mn}|^2 e^{i\omega_{nm}t}) , \quad (2.40)$$

et $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$, $\mathcal{Z} = \sum_n e^{-\beta E_n}$ et $J_{nm} = \langle n|J|m\rangle$. En manipulant un peu l'équation (2.40), on trouve que

$$C_{\pm} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(1 \pm e^{-2\beta eV}\right) \sum_{nm} \frac{e^{-\beta E_n}}{\mathcal{Z}} |J_{nm}|^2 \delta(2eV - E_m + E_n) . \quad (2.41)$$

On en déduit immédiatement la relation fondamentale entre le courant et le bruit [40] :

$$S(V, T) = 4e \coth(eV/k_B T) I(V, T) . \quad (2.42)$$

La démonstration du résultat (2.42) utilise uniquement le fait que l'on puisse écrire l'hamiltonien effectif sous la forme (2.31) et que l'opérateur J_{eff} satisfasse la relation de commutation

$$[Q_N, J_{\text{eff}}] = 2eJ_{\text{eff}} , \quad (2.43)$$

où l'opérateur $Q_N = -eN$ est l'opérateur de charge dans le réservoir normal. Cela revient à dire que le processus tunnel élémentaire ne peut changer la charge que de $\pm 2e$. Il n'est pas nécessaire de spécifier J_{eff} . Nous l'avons donnée Eq. (2.32) dans le cas faible désordre car nous l'utiliserons par la suite. Ainsi, si il y a des interactions dans le réservoir normal dont l'intensité moyenne U est plus petite que le gap du supraconducteur Δ , la relation de commutation (2.43) reste valable car le supraconducteur ne peut accepter ou donner qu'une charge élémentaire $2e$. C'est pourquoi le résultat (2.42) reste valable en présence d'interaction ou faible désordre. C'est ce qui fait l'importance de ce résultat [40].

La relation (2.42) a été démontrée pour un système tunnel générique par Sukhorukov et Loss dans [44] et récemment discuté par Levitov [45] en absence de supraconductivité. Elle peut être vue comme une généralisation du théorème fluctuation - dissipation à voltage fini [44]. Ainsi les non-linéarités en voltage et température du bruit sont exactement les mêmes que celles du courant à un facteur multiplicatif $2e \coth(eV/k_B T)$ près. Le facteur de Fano $F = S/(2eI)$ est alors universel. Dans une récente expérience, Lefloch *et al.* [15] ont mesuré le bruit de grenaille dans une jonction tunnel supraconducteur - semi-conducteur. Ils ont observé qu'à basse température le courant et le bruit sont proportionnel bien que le courant soit fortement non-linéaire comme le prévoit la relation (2.42).

Si l'on compare la relation (2.42) à celle obtenue pour les quasi-particules (2.28), on remarque que le facteur multiplicatif est deux fois plus grand pour la réflexion Andreev et que l'énergie caractéristique du coth est deux fois plus petite : $k_B T$ pour la réflexion Andreev contre $2k_B T$

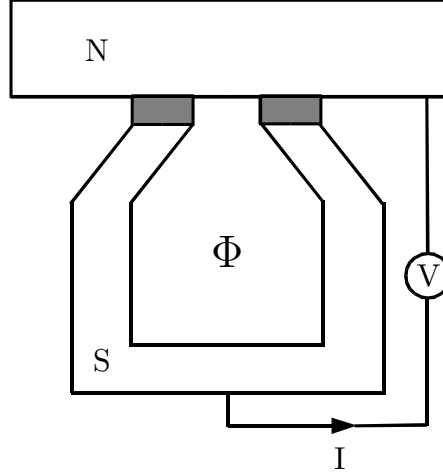


Fig. 2.4: Dispositif expérimental de Pothier *et al.* [49]. La dépendance en flux magnétique du courant et du bruit peut être utilisée pour mesurer avec précision le doublement du facteur de Fano.

pour les quasi-particules. Ces deux différences sont les conséquences du changement de charge élémentaire transportée qui passe de e pour les quasi-particules à $2e$ pour la réflexion Andreev.

À partir de la relation (2.42), on constate qu'il y a deux comportements limites différents :

- À l'équilibre ($eV \ll k_B T$), on retrouve le théorème fluctuation-dissipation usuel $S = 4k_B T G$ où G est la conductance à voltage nul de la jonction. Ainsi les fluctuations à l'équilibre $S(V = 0)$ sont proportionnelles à la dissipation G .
- Hors équilibre ($eV \gg k_B T$), on est dans la limite du bruit de grenaille et on a $S = 4eI$.

On vient donc de démontrer qu'à l'équilibre thermodynamique, le bruit ne contient pas plus d'information sur le transport que le courant. Le bruit avait été calculé par Martin [46] dans la limite cohérente $eV \ll E_{Th}$. Nous avons généralisé ce résultat à des valeurs arbitraires de eV/E_{Th} à la condition que $eV \ll \Delta$. Quand la jonction n'est plus tunnel, la relation (2.42) n'est plus valable, la situation est plus riche car la dépendance en énergie du Facteur de Fano est plus compliquée. Par exemple, dans le cas d'un fil diffusif normal bien connecté à un supraconducteur, elle a été calculée [26] et mesurée [14, 47, 48].

Pour souligner la généralité du résultat, considérons le cas non-trivial d'une jonction en forme de fourchette où le métal normal enserme un flux magnétique Φ avant d'être connecté au supraconducteur, c.f. figure 2.4. Les anomalies du courant sous le gap ont été mesurés dans cette structure par Pothier *et al.* [49] en fonction du flux magnétique Φ . Le transport de charge reste dominé par le transfert tunnel de paires de Cooper, le flux magnétique modifie seulement l'amplitude tunnel $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ d'un facteur de phase dépendant du flux. Notre calcul reste donc valable, et la dépendance en Φ du bruit est donnée par $S(\Phi) = 4e \coth(eV/k_B T) I(\Phi)$. La mesure du bruit dans cette géométrie permettrait donc de tester le domaine de validité de (2.42), et en modulant le flux on pourrait mesurer précisément le doublement de la charge à basse température.

2.3.2 Réservoirs hors-équilibre

Quand le métal normal n'est plus à l'équilibre thermodynamique, la relation (2.42) entre le bruit et le courant n'est plus valide. On doit calculer explicitement le courant et le bruit. En combinant les formules (2.35) et (2.37) on peut écrire :

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\pi e}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 \delta(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}'} + 2eV) H_-(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'}), \\ S &= \frac{16\pi e^2}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} |A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 \delta(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}'} + 2eV) H_+(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'}), \end{aligned}$$

avec

$$H_{\pm}(\xi, \xi') = n(\xi)n(\xi') \pm [1 - n(\xi)][1 - n(\xi')], \quad (2.44)$$

et $n(\xi_{\mathbf{k}}) = \langle c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \rangle_0$. On introduit la dépendance énergétique en remplaçant $\sum_{\mathbf{k}}$ par $\int d\xi \sum_{\mathbf{k}} \delta(\xi_{\mathbf{k}} - \xi)$, de même pour la somme sur $\mathbf{k}'$ qui devient une intégrale sur ξ' . On fait ensuite le changement de variable $\xi_o = (\xi + \xi')/2$ et $\varepsilon = \xi - \xi'$. L'intégration sur ξ_o est immédiate et fait sortir un facteur 1/2. On aboutit à :

$$\begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix} = \frac{2\pi e}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon A(\varepsilon, eV) \begin{pmatrix} H_-(\varepsilon/2 - eV, -\varepsilon/2 - eV) \\ 4eH_+(\varepsilon/2 - eV, -\varepsilon/2 - eV) \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

où l'on a défini

$$A(\varepsilon, eV) = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta(\varepsilon/2 - eV - \xi_{\mathbf{k}}) \delta(-\varepsilon/2 - eV - \xi_{\mathbf{k}'}) |A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2. \quad (2.46)$$

Si le métal normal est à l'équilibre thermodynamique, $n(\xi)$ est la fonction de Fermi $f(\xi)$. Dans ce cas, les fonctions H_+ et H_- sont liés par :

$$H_+(\varepsilon/2 - eV, -\varepsilon/2 - eV) = \coth\left(\frac{eV}{k_B T}\right) H_-(\varepsilon/2 - eV, -\varepsilon/2 - eV), \quad (2.47)$$

On retrouve alors immédiatement la relation (2.42) entre le bruit et le courant. Mais si le métal normal n'est pas à l'équilibre, dans ce cas $n(\xi) \neq f(\xi)$, le bruit et le courant sont indépendants.

Pour poursuivre, il faut calculer la fonction $A(\varepsilon, eV)$. Pour cela, on suit la démarche adoptée par Hekking et Nazarov [34, 35]. On combine les équations (2.14) et (2.29) et on remplace comme précédemment les sommes par des intégrales sur les énergies. On obtient

$$A(\varepsilon, eV) = \int d\zeta d\zeta' d\xi d\xi' F(\zeta; \xi, \xi') F(\zeta'; \xi, \xi') \Xi(\zeta, \zeta'; \xi, \xi') \delta(\varepsilon/2 - eV - \xi) \delta(-\varepsilon/2 - eV - \xi')$$

avec

$$F(\zeta; \xi, \xi') = u(\zeta)v(\zeta) \left\{ \frac{1}{\xi + eV - E(\zeta)} + \frac{1}{\xi' + eV - E(\zeta)} \right\}$$

et

$$\begin{aligned} \Xi[\zeta, \zeta', \xi, \xi'] &= \int d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_4 \int d^3\mathbf{r}'_1 \dots d^3\mathbf{r}'_4 \overline{K_{\xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) K_{\xi'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)} \times \\ &\quad \overline{K_{\zeta}(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_1) K_{\zeta'}(\mathbf{r}'_3, \mathbf{r}'_4)} t^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) t^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2) t(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3) t(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_4). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ici

$$K_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\xi - \xi_{\mathbf{k}}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1) \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}_2) \quad (2.49)$$

est la densité spectrale ou densité d'état non-locale (on a utilisé $\psi_{-\mathbf{q}}^* = \psi_{\mathbf{q}}$), et $\overline{\dots}$ correspond à la valeur moyenne sur les différentes réalisations du désordre. On s'intéresse au transport sous le gap : $k_B T, eV \ll \Delta$; et à cause des fonctions de Fermi on a $\xi, \xi' \ll \Delta$, ce qui nous permet d'approximer $F(\xi; \xi, \xi') \approx F(\xi) = -4u(\xi)v(\xi')/E(\xi)$.

Calcul de la fonction Ξ

Pour calculer la fonction Ξ , on va préciser la forme de l'amplitude tunnel et la relier à G_T , la conductance de la barrière dans l'état normal. D'après Prada et Sols [50], pour une barrière tunnel plane $\mathcal{B}$ située en $z = 0$, l'amplitude tunnel est donnée par :

$$t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \delta'(z_1) \delta'(z_2) \delta^2(\mathbf{r}_1^{\parallel} - \mathbf{r}_2^{\parallel}) t(\mathbf{r}_1^{\parallel}) \quad (2.50)$$

où $\mathbf{r}_1$ est du côté normal, $\mathbf{r}_2$ du côté supraconducteur et $\mathbf{r}_{1/2}^{\parallel}$ sont les coordonnées de $\mathbf{r}_{1/2}$ dans le plan parallèle à la barrière.

Quant au courant qui traverse la barrière dans l'état normal, il est donné par

$$I = \frac{4\pi e}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2 \delta(\xi_{\mathbf{k}} + eV - \zeta_{\mathbf{q}}) [f(\xi_{\mathbf{k}}) - f(\zeta_{\mathbf{q}})] \quad (2.51)$$

On en déduit que la conductance à voltage nul est ($T = 0$) :

$$G_T = g_Q 4\pi^2 \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2 \delta(\xi_{\mathbf{k}}) \delta(\zeta_{\mathbf{q}}), \quad (2.52)$$

$$= g_Q 4\pi^2 \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \overline{K_0^N(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)} \overline{K_0^S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) t^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (2.53)$$

La conductance G_T fait donc intervenir les fonctions spectrales $\overline{K_0}$ au niveau de Fermi moyennées sur le désordre dans le métal normal (N) et dans le supraconducteur (à l'état normal) (S). Elles sont données par (cf. [51] chapitre 3) :

$$\overline{K_0^{N/S}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)} = \nu_{N/S} g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad \text{avec} \quad g(\mathbf{r}) = \frac{\sin k_F r}{k_F r} e^{-r/2l} \quad (2.54)$$

où $\nu_{N/S}$ est la densité d'état par unité de spin du métal normal (N) ou du supraconducteur (S) dans l'état normal et l le libre parcours moyen. On utilise ensuite l'expression (2.50) et une fois que l'on a effectué les intégrations latérales sur z_1 et z_2 , la conductance dans l'état normal devient :

$$G_T = 4\pi^2 g_Q \nu_N \nu_S \int_{\mathcal{B}} d^2\mathbf{r}_1^{\parallel} d^2\mathbf{r}_2^{\parallel} \tilde{g}^2(\mathbf{r}_1^{\parallel} - \mathbf{r}_2^{\parallel}) \left[\frac{t(\mathbf{r}_1^{\parallel}) t^*(\mathbf{r}_2^{\parallel}) + t(\mathbf{r}_2^{\parallel}) t^*(\mathbf{r}_1^{\parallel})}{2} \right], \quad (2.55)$$

avec

$$\tilde{g}(\mathbf{r}) = \frac{g'(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|}. \quad (2.56)$$

Comme la fonction $\tilde{g}^2$ est à courte portée (de l'ordre de λ_F), on peut approximer le second terme (qui est réel) par sa valeur au centre de masse (limite quasi-classique) :

$$\frac{t(\mathbf{r}_1'')t^*(\mathbf{r}_2'') + t(\mathbf{r}_2'')t^*(\mathbf{r}_1'')}{2} \approx \left| t\left(\frac{\mathbf{r}_1'' + \mathbf{r}_2''}{2}\right) \right|^2 \quad (2.57)$$

Nous pouvons alors séparer dans l'équation (2.55) les intégrales sur la variable relative $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1'' - \mathbf{r}_2''$ et la variable du centre de masse $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1'' + \mathbf{r}_2'')/2$. L'intégrale sur $\mathbf{r}$ converge et vaut dans la limite $l \gg \lambda_F$:

$$\int d^2\mathbf{r} \tilde{g}^2 = \pi k_F^2/2. \quad (2.58)$$

On trouve finalement :

$$G_T = 2\pi^3 k_F^2 g_Q \nu_N \nu_S \int_{\mathcal{B}} d^2\mathbf{R} |t(\mathbf{R})|^2 \equiv \int_{\mathcal{B}} d^2\mathbf{R} g_T(\mathbf{R}) \quad (2.59)$$

où l'on a introduit la conductance de la barrière par unité de surface $g_T(\mathbf{R}) = 2\pi^3 k_F^2 g_Q \nu_N \nu_S |t(\mathbf{R})|^2$. Nous avons donc réussi à faire le lien entre l'amplitude tunnel et la conductance de la barrière dans l'état normal.

On peut maintenant poursuivre le calcul de Ξ . Il nous faut évaluer les valeurs moyennes sur le désordre d'un produit de deux fonctions spectrales présent dans (2.48) dans la limite de faible désordre $k_F l \gg 1$. Nous ne détaillerons pas ici cette étape du calcul, il est par exemple présenté dans le récent livre de Akkermans et Montambaux [51], complément C4.5. On trouve :

$$\begin{aligned} \overline{K_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) K_{\xi'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)} &= \nu_N^2 g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) g(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) + \frac{\nu_N}{\pi} \text{Re} [P_{\xi - \xi'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)] \left(g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) g(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \right. \\ &\quad \left. + g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) g(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

où P est ce que l'on appelle un cooperon. Il correspond à la propagation cohérente de deux électrons ayant une faible différence d'énergie et d'impulsion qui interfèrent. Il satisfait une équation de diffusion dans le métal normal :

$$(-\hbar D \nabla_1^2 - i\varepsilon) P_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (2.61)$$

On a le même type d'expression pour $\overline{K_\zeta(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_1') K_{\zeta'}(\mathbf{r}_4', \mathbf{r}_3')}$ à la différence que le cooperon se propage cette fois dans le supraconducteur.

On trouve donc que Ξ , qui est donné par l'équation (2.48), est la somme de 9 termes qui sont chacun des produits de fonction g et de cooperon $P_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à longue portée (de l'ordre de $\sqrt{\hbar D/\varepsilon}$). En utilisant la forme de l'amplitude tunnel (2.50) on effectue les intégrales sur les variables spatiales orthogonales à la barrière, les fonctions g deviennent alors des $\tilde{g}$. On remarque ensuite que l'on peut classer les 9 termes donnant Ξ en deux catégories : ceux où les quatre variables $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ situées sur la barrière sont espacées de quelques λ_F et ceux où ces variables peuvent être beaucoup plus éloignées les une des autres (de l'ordre de $\sqrt{\hbar D/\varepsilon}$). Les termes à courte portée sont dominés par les termes à longue portée. Ce sont donc ces derniers que nous gardons [35]. Ils sont au nombre de trois :

$$\begin{aligned} \Xi &= \Xi_N(\xi - \xi') + \Xi_S(\zeta - \zeta') + \Xi_{NS}(\xi - \xi'; \zeta - \zeta') \\ \text{avec } \Xi_i &= \int_{\mathcal{S}} d^2\mathbf{r}_1 \dots d^2\mathbf{r}_4 t^*(\mathbf{r}_1) t^*(\mathbf{r}_2) t(\mathbf{r}_3) t(\mathbf{r}_4) F_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \end{aligned}$$

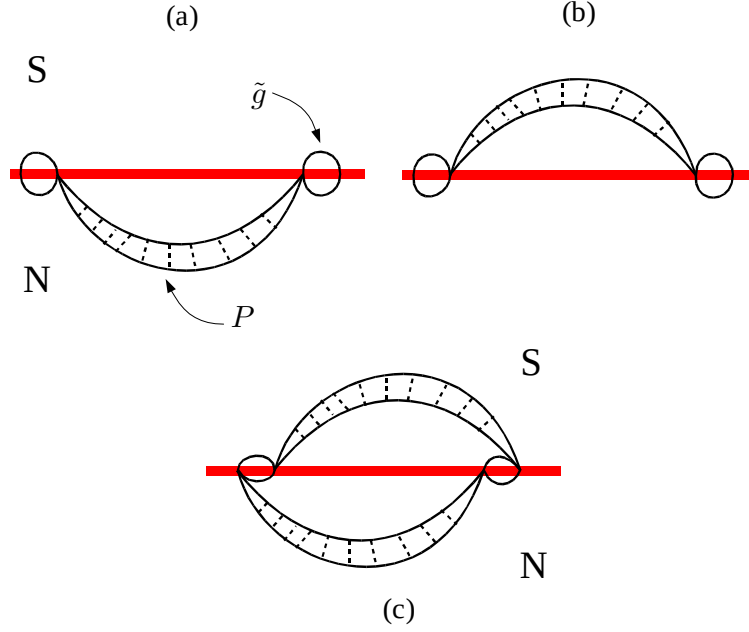


Fig. 2.5: Différentes contributions du transport sous le gap : (a) un cooperon se propage dans le métal normal, (b) un cooperon se propage dans le supraconducteur et (c) il y a un cooperon dans chaque électrodes.

et

$$F_N(\xi - \xi') = \frac{\nu_N \nu_S^2}{\pi} \text{Re} [P_{\xi - \xi'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)] \tilde{g}^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tilde{g}^2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \quad (2.62)$$

$$F_S(\zeta - \zeta') = \frac{\nu_N^2 \nu_S}{\pi} \text{Re} [P_{\zeta - \zeta'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)] \tilde{g}^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \tilde{g}^2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \quad (2.63)$$

$$F_{NS}(\xi - \xi'; \zeta - \zeta') = \frac{\nu_N \nu_S}{\pi^2} \text{Re} [P_{\xi - \xi'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)] \text{Re} [P_{\zeta - \zeta'}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)] \times \tilde{g}^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \tilde{g}^2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2). \quad (2.64)$$

Ces trois contributions sont schématisées en Fig. 2.5. La figure 2.5(a) représentant Ξ_N correspond à la propagation d'un cooperon dans le métal normal, la figure 2.5(b) représentant Ξ_S correspond à la propagation d'un cooperon dans le supraconducteur. Quant à la figure 2.5(c) représentant Ξ_{NS} , il y a deux cooperons, un de chaque côté de la barrière. Qualitativement, ce diagramme correspond à la corrélation de deux cooperons différents, il doit donc être plus petit que les deux autres contributions [35]. De plus, dans la limite sous le gap $eV, k_B T \ll \Delta$, on peut aussi négliger Ξ_S devant Ξ_N , le cooperon ayant une portée plus courte dans le supraconducteur que dans le métal normal. On en déduit finalement que le terme dominant est Ξ_N qui correspond à la propagation cohérente de deux électrons avec une faible différence d'énergie ε et une faible différence de moment dans le métal normal. On procède ensuite comme pour le calcul de la

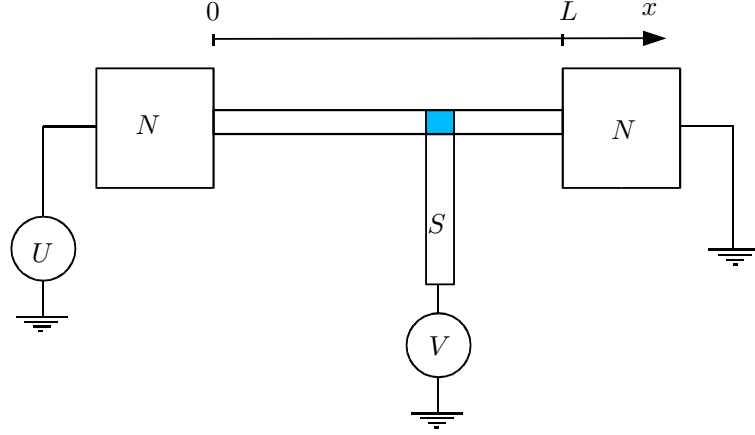


Fig. 2.6: Schéma du dispositif expérimental de l'article [52] : un fil métallique de longueur L est placé entre deux grandes électrodes. Il est connecté à l'aide d'une jonction tunnel à la position x sur un supraconducteur.

conductance dans l'état normal (Eq. (2.55) et Eq. (2.57)) et on trouve [34, 35] :

$$\Xi[\zeta, \zeta'; \xi, \xi'] \approx \Xi(\xi - \xi') = \Xi(\varepsilon) = \frac{\hbar^2 G_T^2}{32\pi^3 e^4 \nu_N S^2} \int_S d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 [P_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + P_{-\varepsilon}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]. \quad (2.65)$$

où on a utilisé l'équation (2.55) pour relier $t|(\mathbf{r})|^2$ à la conductance dans l'état normal G_T . Comme Ξ ne dépend plus de ζ et ζ' on peut effectuer sans difficulté l'intégrale sur ces variables qui donne un facteur π^2 .

Finalement on obtient $A(\varepsilon) = \pi^2 \Xi(\varepsilon)$ qui peut être calculé connaissant la forme de la jonction. Ainsi, connaissant $A(\varepsilon)$ et $n(\xi)$, on utilise les équations (2.44) et (2.45) et on obtient le courant et le bruit hors de l'équilibre.

2.3.3 Exemple : un fil métallique hors équilibre

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le courant et le bruit dans un système hors-équilibre. Considérons un cas réaliste. Pothier *et al.* dans [52] ont mesuré la distribution hors-équilibre des électrons dans un petit fil métallique de longueur L . Pour cela, ils ont utilisé une jonction tunnel connectée à un supraconducteur placé à différentes positions x le long du fil. Ils ont mesuré le courant des quasi-particules, mais il est tout à fait envisageable de mesurer le courant et le bruit sous le gap.

La fonction de distribution stationnaire $n(x, E)$ dans le fil est donnée par l'équation de Boltzmann [53–55]

$$\frac{1}{\tau_D} \frac{\partial^2 f(x, E)}{\partial^2 x} + \mathcal{I}_{\text{coll}}(x, E, \{f\}) = 0. \quad (2.66)$$

Ici $\tau_D = L^2/D$ est le temps type de diffusion le long du fil et $\mathcal{I}_{\text{coll}}(x, E, \{f\})$ est l'intégrale de collision provenant des processus de diffusion inélastique. Les conditions aux bords sont imposées par les réservoirs à chaque extrémité du fil : $n(0, E) = f(E + eU)$ et $n(L, E) = f(E)$.

En l'absence de diffusion inélastique $\mathcal{I}_{\text{coll}} = 0$, l'équation (2.66) se résout facilement et la fonction de distribution des électrons le long du fil est donnée par :

$$n(x, \xi) = f_F(\xi + eU)[1 - x/L] + f_F(\xi)x/L. \quad (2.67)$$

Ainsi, à température nulle, la fonction de distribution a une double discontinuité.

On suppose que la dimension latérale caractéristique du fil w est beaucoup plus petite que ξ_{corr} . On peut alors considérer que la diffusion est à une dimension, le long du fil. En utilisant une variable sans dimension $u = x/L$, l'équation de diffusion (2.61) devient

$$\frac{d^2}{du^2} P(u_1, u_2) + i \frac{\varepsilon}{E_{\text{th}}^W} P(u_1, u_2) = -\frac{L}{\hbar w^2 D} \delta(u_1 - u_2) \quad (2.68)$$

où $E_{\text{th}}^W = \hbar D/L^2$ est l'énergie de Thouless du fil. Pour résoudre cette équation, on utilise les conditions aux limites au niveau des réservoirs : $P(0, u_2) = P(1, u_2) = 0$ [56]. Cela revient à dire que l'amplitude qui diffuse jusque dans le réservoir ne peut pas revenir dans le fil. On cherche ensuite une solution de la forme $P = P^\infty + P^0$ où $P^\infty(u_1 - u_2)$ est une solution particulière obtenue à l'aide de la transformée de Fourier et P^0 est la solution de l'équation homogène de (2.68). Les constantes sont fixées grâce aux conditions aux limites. La solution finale a la forme suivante :

$$P(u_1, u_2) = \frac{L}{2\hbar D w^2 z} \left[e^{-z|u_1 - u_2|} - \frac{e^{z(u_1 + u_2)} + e^{-z(u_1 + u_2 - 2)} - e^{z(u_1 - u_2)} - e^{-z(u_1 - u_2)}}{e^{2z} - 1} \right] \quad (2.69)$$

avec $z = \sqrt{-i\varepsilon/E_{\text{th}}^W}$. On suppose que la jonction tunnel est suffisamment petite pour que P puisse être considéré comme constant sur la jonction. Ainsi en combinant les équations (2.69) et (2.65), on trouve

$$\Xi(\varepsilon) = \frac{G_T^2 \hbar L}{16\pi^3 e^4 \nu_N D w^2} \phi(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \phi(\varepsilon) = \text{Re} \left[\frac{\sinh(z u_0) \sinh(z(1 - u_0))}{z \sinh(z)} \right], \quad (2.70)$$

où u_0 est la coordonnée moyenne de la jonction le long du fil. Dans la limite où le fil est infini, on voit que $\phi(\varepsilon) \equiv 1/\sqrt{(\varepsilon)}$.

On introduit la conductance du fil $G_W = 2w^2 e^2 D \nu_N / L$ et en utilisant l'équation (2.45), on obtient les expressions générales du courant et du bruit :

$$\begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix} = \frac{G_T^2}{4eG_W} \int d\varepsilon \phi(\varepsilon) \begin{pmatrix} H_-(\varepsilon/2 - eV, -\varepsilon/2 - eV) \\ 4eH_+(\varepsilon/2 - eV, -\varepsilon/2 - eV) \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

où les fonctions $H_\pm$ ont été définies par l'Eq. (2.44). Puis en combinant cette expression avec l'équation (2.67) on trouve le courant et le bruit pour tout voltage et température inférieurs au gap Δ .

Plaçons nous à température nulle. Le courant et le bruit sont fonctions de deux variables : V et U . Par la suite, nous allons fixer le potentiel U à une valeur constante $eU = 200E_{\text{th}}^W$ qui est de l'ordre de grandeur typique des expériences, cela crée ainsi une distribution hors-équilibre

des électrons dans le fil. Nous allons donc nous intéresser à la dépendance en V du courant et du bruit. On définit le facteur de Fano différentiel de la façon suivante :

$$\mathcal{F} \equiv \frac{(\partial S / \partial V)}{(2e \partial I / \partial V)} = \frac{1}{2e} \frac{\partial S}{\partial I} \Big|_U, \quad (2.72)$$

il est directement proportionnel à la dérivée du bruit par rapport au courant à potentiel U constant.

Le courant et $\mathcal{F}$ ont été tracés figure 2.7 pour différentes positions u_0 de la jonction sur le fil. On constate d'abord sur la figure 2.7(a) que le courant est non linéaire, ou en d'autres termes, que la conductance n'est pas constante. Cela provient de la dépendance en énergie de la fonction $\phi(\varepsilon)$ (cf. Eq. (2.70)) qui rend compte des interférences des électrons dans le fil désordonné.

On constate ensuite que le comportement de $\mathcal{F}$ est plus inhabituel :

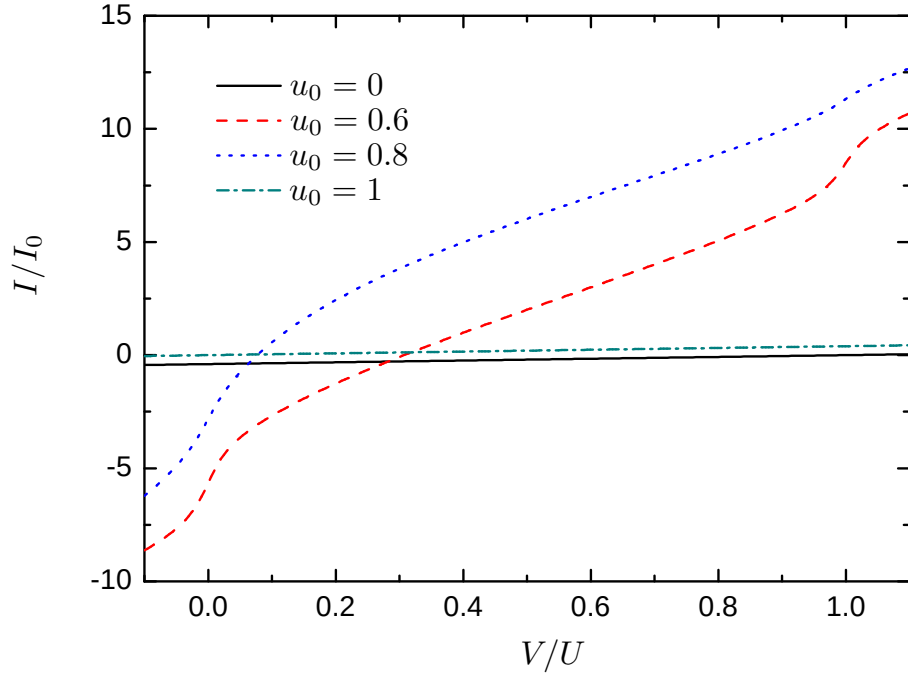
- le facteur de Fano différentiel est négatif pour certaines valeurs de V ,
- bien que la jonction soit tunnel, $\mathcal{F}$ n'est pas identique à 2,
- il y a des discontinuités dans $\mathcal{F}$ mais pas dans le courant.

Habituellement, un facteur de Fano différentiel est positif, cela vient juste du fait qu'il est en général défini par $|(\partial S / \partial V) / (\partial I / \partial V)|$. Nous avons préféré garder l'information sur le signe en ne mettant pas de valeur absolue dans la définition de $\mathcal{F}$. Comme le bruit est toujours positif, le signe de $\mathcal{F}$ donne le sens de propagation du courant.

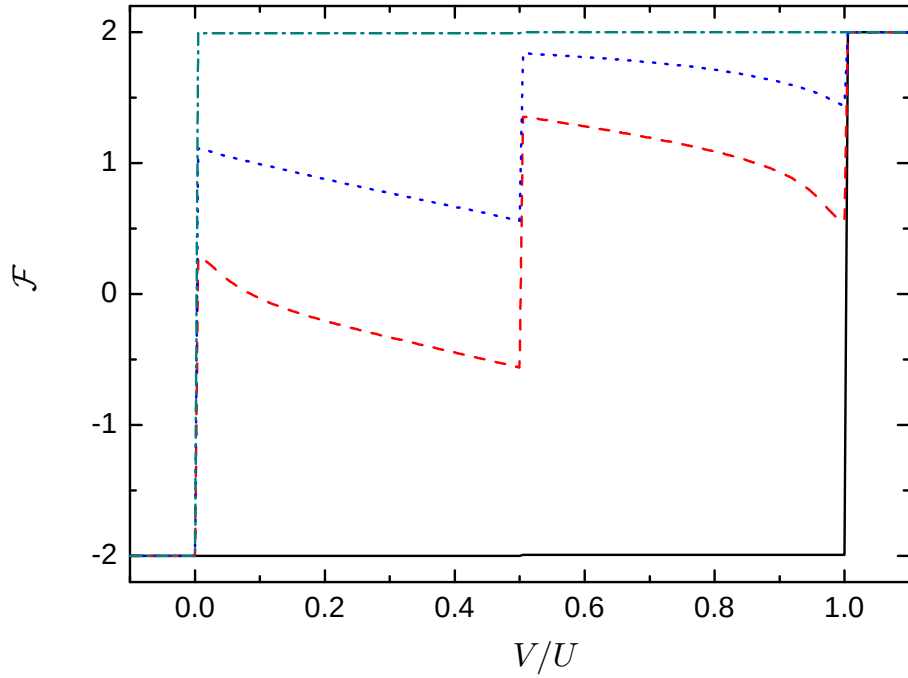
Si le facteur de Fano différentiel n'est pas égal à ± 2 , c'est parce que les électrons dans le fil ne sont pas à l'équilibre thermodynamique. On constate en effet sur la figure 2.7(b) que quand la jonction est au niveau d'un réservoir normal à l'équilibre ($u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$), on retrouve bien $\mathcal{F} = \pm 2$.

Les discontinuités sont intrigantes, leurs origine est néanmoins simple. À température nulle la distribution en énergie des électrons (cf. Eq. (2.67)) dans le fil possède deux discontinuités. Ainsi les dérivées des taux de transition $\partial N_{\pm} / \partial V$ sont discontinues. Par conséquent $\partial S / \partial V$ et $\mathcal{F}$ sont discontinues, car $S \propto N_{\rightarrow} + N_{\leftarrow}$. Ces discontinuités ont lieu quand $V = 0$, $V = U/2$ et $V = U$. On peut alors légitimement se demander pourquoi il n'y a pas de discontinuité dans la dérivée du courant fig. 2.7(a). C'est parce que le supraconducteur joue le rôle d'un miroir entre électrons et trous par rapport à son potentiel V . Les discontinuités dans $\partial N_{\pm} / \partial V$ sont à la même énergie et de même poids. Elles s'annulent exactement quand on les soustrait, or $I \propto N_{\rightarrow} - N_{\leftarrow}$, cela explique que la dérivée du courant soit continue alors que celle du bruit est discontinue. On peut obtenir analytiquement la conductance et le bruit différentiel :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial V} &= \frac{G_T^2}{G_W} (\phi(2eU - 2eV)(1 - u_0) + \phi(2eV)u_0) \\ \frac{\partial I}{\partial U} &= \frac{G_T^2}{G_W} \phi(2eU - 2eV)(u_0 - 1) \\ \frac{\partial S}{\partial V} &= \frac{4e G_T^2}{G_W} (\phi(2eV)[u_0(1 - u_0)\Theta(2eV - eU) - u_0 + 2u_0^2\Theta(eV)] \\ &\quad + \phi(2eU - 2eV)[u_0 - 1 + 2(u_0 - 1)^2\Theta(eV - eU) + 2u_0(1 - u_0)\theta(2eV - eU)]) \\ \frac{\partial S}{\partial U} &= \frac{4e G_T^2}{G_W} \phi(2eU - 2eV)(1 - u_0 + 2u_0(u_0 - 1)\Theta(2eV - eU) - 2(1 - u_0)^2\Theta(2eV - 2eU)), \end{aligned}$$



(a) Courant



(b) Facteur de Fano différentiel

Fig. 2.7: Courant et facteur de Fano différentiel en fonction de V/U pour différentes positions u_0 de la jonction à température nulle, $eU = 200E_{\text{th}}^W$ et on a $I_0 = G_T^2 E_{\text{th}}^W / (4e G_W)$.

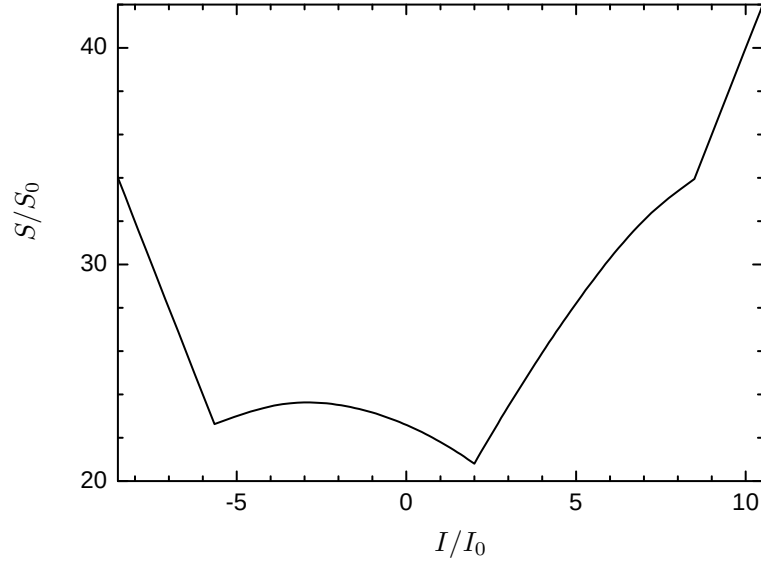


Fig. 2.8: Bruit en fonction du courant à température nulle pour $eU = 200E_{\text{th}}^W$. On a $I_0 = G_T^2 E_{\text{th}} / (4e G_W)$ et $S_0 = eI_0$.

On constate ainsi que la conductance différentielle est directement proportionnelle à la fonction $\phi(\varepsilon)$ qui caractérise la diffusion des électrons dans le fil.

On peut aussi noter sur la figure 2.7(b) que la facteur de Fano différentiel s'annule quand $u_0 = 0.6$, cela correspond à un maximum du bruit en fonction du courant comme on peut le voir figure 2.8 où nous avons tracé $S(I)$. Enfin, si $V < 0$ ou $V > U$, le bruit et le courant sont strictement proportionnels car un des taux de transition $N_{\rightleftharpoons}$ est nul, c'est pourquoi le facteur de Fano différentiel est égal à ± 2 pour ces énergies.

Comparaison avec la théorie des circuits

Pour vérifier nos résultats, il est intéressant de les comparer avec ceux obtenus par une méthode alternative appelée théorie des circuits [22–24, 26, 57]. Les hypothèses qu'elle utilise sont les mêmes que celles que nous avons utilisées dans la section précédente. Elle a cependant l'avantage de pouvoir traiter des jonctions de transparence arbitraire et pas seulement tunnel. Néanmoins, sa mise en œuvre nécessite souvent des calculs numériques et elle devient difficile pour des structures complexes. Pour un fil diffusif, on peut résoudre numériquement la théorie des circuits sans trop de difficultés et donc comparer les résultats avec ceux obtenus avec la méthode de l'hamiltonien tunnel. Nous allons ici nous contenter d'une brève introduction à la théorie des circuits qui est expliquée plus en détail dans le chapitre 4.

Nous allons suivre la démarche utilisée par Belzig et Nazarov dans [26] qui modélisent un fil diffusif avec la technique des fonctions de Green semi-classiques. On discrétise le fil en N nœuds, chacun d'eux représente un morceau du fil suffisamment petit pour que l'on puisse y négliger les inhomogénéités, voir la figure 2.9. Les nœuds sont décrits par une matrice de Green $\tilde{\mathcal{G}}$ 4×4 dans l'espace de Nambu ($\hat{}$) - Keldysh ($\bar{}$) qui satisfont la condition $\tilde{\mathcal{G}}^2 = \mathbb{1}$. Ils sont connectés entre

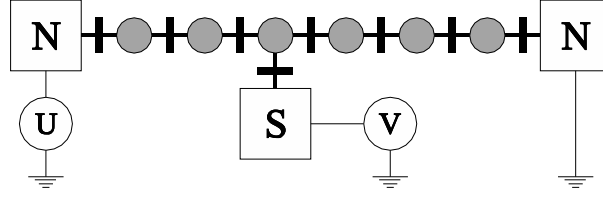


Fig. 2.9: Schéma du fil discrétisé en six nœuds connectés entre eux par des jonctions tunnel.

eux par des jonctions tunnel de conductance $g_T = (N + 1)G_W$, ainsi la conductance classique total du fil est bien G_W . Plus le nombre de nœuds est grand, plus le modèle représente fidèlement le fil normal. Les conditions de Kuprianov - Lukichev [58] ainsi que le terme de décohérence de l'équation d'Usadel donnent l'équation qui doit être satisfaite à chaque nœud i :

$$[\check{\mathcal{A}}_i, \check{\mathcal{G}}_i] = 0 \quad \text{avec} \quad \check{\mathcal{A}}_i = g_T (\check{\mathcal{G}}_{i+1} + \check{\mathcal{G}}_{i-1}) - 2i \frac{\varepsilon}{N E_{\text{th}}^W} \check{\tau}_3, \quad (2.73)$$

où $\check{\tau}_3 = \hat{\tau}_3 \otimes \bar{1}$, and $\bar{\sigma}_i, \hat{\tau}_{j(i,j=1,2,3)}$ sont les matrices de Pauli. Les fonction de Green des extrémités sont données par les solutions de l'équation d'Usadel d'un métal normal à l'équilibre thermodynamique : $\check{\mathcal{G}}_N^0 = \hat{\tau}_3 \otimes \bar{\sigma}_3 + (f_{T0} + f_{L0}\hat{\tau}_3) \otimes (\bar{\sigma}_1 + i\bar{\sigma}_2)$ avec $f_{L0} = 1 - f_+ - f_-$, $f_{T0} = f_- - f_+$, $f_{\pm}(\varepsilon) = f(\varepsilon \pm eU_{L/R})$, $U_{L/R}$ est le potentiel à gauche (L) $x = 0$ ou à droite (R) $x = L$. L'équation (2.73) a comme solution analytique $\check{\mathcal{G}} = \check{\mathcal{A}}_i / \sqrt{\check{\mathcal{A}}_i^2}$. On a ainsi modélisé un fil normal bien connecté à deux électrodes de potentiel U_R et U_L . Il nous reste maintenant à ajouter la jonction tunnel avec le supraconducteur. On le connecte au nœud s ($0 \leq s \leq N$) avec une barrière tunnel G_T . Comme il est techniquement plus facile de considérer le supraconducteur à la masse, on fixe $U_L = U - V$ et $U_R = -V$. Le contact avec le supraconducteur modifie l'équation (2.73) de la façon suivante :

$$\check{\mathcal{A}}_s = g_T (\check{\mathcal{G}}_{s+1} + \check{\mathcal{G}}_{s-1}) + G_T \check{\mathcal{G}}_S(\chi) - 2i \frac{\varepsilon}{N E_{\text{th}}^W} \check{\tau}_3. \quad (2.74)$$

Notons qu'en l'absence de connection avec le supraconducteur, la fonction de Green peut être obtenue analytiquement. En effet, l'équation (2.73) est la forme discrétisée de l'équation d'Usadel :

$$D\partial_x(\check{\mathcal{G}}\partial_x\check{\mathcal{G}}) + iE[\check{\tau}_3, \check{\mathcal{G}}] = 0. \quad (2.75)$$

où D est la constante de diffusion. Or sans supraconducteur on remarque que $[\check{\tau}_3, \check{\mathcal{G}}(0)] = [\check{\tau}_3, \check{\mathcal{G}}(L)] = 0$, on peut chercher une solution qui commute avec $\check{\tau}_3$ pour tout x . Dans ce cas l'équation d'Usadel devient $\partial_x(\check{\mathcal{G}}\partial_x\check{\mathcal{G}}) = 0$ qui se résout facilement à l'aide de la condition de normalisation $\check{\mathcal{G}}^2 = \mathbb{1}$ et des conditions au bords $\check{\mathcal{G}}(0) = \check{\mathcal{G}}_L$, $\check{\mathcal{G}}(L) = \check{\mathcal{G}}_R$. On obtient :

$$\check{\mathcal{G}}(x) = \check{\mathcal{G}}_L [\check{\mathcal{G}}_L \check{\mathcal{G}}_R]^{x/L} \quad (2.76)$$

Cette méthode ne convient pas lorsque le fil est connecté à un supraconducteur car $[\check{\tau}_3, \check{\mathcal{G}}_S] \neq 0$, on est alors obligé d'utiliser le calcul numérique.

On va supposer que $G_T \ll g_T$, on peut donc négliger les corrections à l'énergie de Thouless venant de la présence du réservoir supraconducteur. La fonction de Green $\check{\mathcal{G}}_S(\chi)$ est la solution

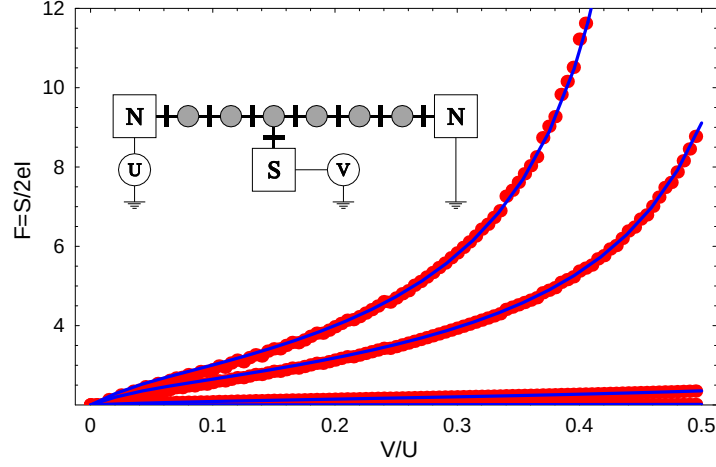


Fig. 2.10: Facteur de Fano (en valeur absolue) en fonction de V/U . Les lignes pleines correspondent au calcul tunnel (cf. équation (2.71)) et les points aux résultats numériques de la théorie des circuits. La position de la jonction NIS est $x/L = 9/18, 8/18, 4/18$ et $1/18$ de haut en bas (on a utilisé 18 nœuds). On a fixé $eU = 200E_{\text{th}}^W$.

semi-classique dans le réservoir supraconducteur modifiée par le champ de comptage χ . Elle est donc donnée par $\tilde{\mathcal{G}}_S(\chi) = e^{-\frac{i}{2}\chi\tilde{\tau}_K} \tilde{\mathcal{G}}_S^0 e^{\frac{i}{2}\chi\tilde{\tau}_K}$ avec $\tilde{\mathcal{G}}_S^0 = \hat{\tau}_2 \otimes \bar{1}$ et $\tilde{\tau}_K = \hat{\tau}_3 \otimes \bar{\sigma}_1$. Une fois que l'on connaît l'ensemble des fonctions de Green $\tilde{\mathcal{G}}$ du fil, on peut en théorie obtenir tous les cumulants du courant qui traverse la jonction NIS en calculant

$$J(\chi) = -\frac{G_T}{8e} \int d\varepsilon \text{tr} \{ \tilde{\tau}_K [\tilde{\mathcal{G}}_s, \tilde{\mathcal{G}}_S] \}. \quad (2.77)$$

Le courant est donné par $I = J(\chi = 0)$ et le bruit est proportionnel à la première dérivée de J par rapport à χ : $S = -2ie\partial J/\partial\chi$. Par le calcul numérique, on obtient simultanément le courant et le bruit car I est proportionnel à la partie réelle de J et S à sa partie imaginaire.

Pour calculer les fonctions de Green des nœuds on procède par récurrence. On donne d'abord des valeurs quelconques aux fonctions de Green qui modélisent le fil (par exemple la solution pour un réservoir normal). La fonction de Green du premier nœud à côté de l'électrode de gauche est calculée en utilisant $\tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{\mathcal{A}}_1 / \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_1^2}$, on calcule ensuite celle du nœud voisin de la même façon. On procède ainsi jusqu'à l'autre extrémité du fil. Ce calcul est réitéré jusqu'à ce qu'il converge. On obtient alors numériquement toutes les fonctions de Green du fil.

Nous avons donc calculé le courant et le bruit pour $eU = 200E_{\text{th}}^W$, pour différentes valeurs de V . Nous avons utilisé 18 nœuds. On a choisi la conductance G_T beaucoup plus petite que g_T ($g_T/G_T \simeq 10^3$) et nous avons vérifié que le bruit et le courant sont bien proportionnels à G_T^2 comme le prédit l'équation (2.71). Nous avons tracé (cf. figure 2.10) le facteur de Fano en fonction de V/U ($0 < V < U/2$) pour différentes positions s de la jonction NIS le long du fil. On constate un bon accord entre la théorie des circuits et la méthode de l'hamiltonien tunnel. On remarque que F diverge pour certaines valeurs de u_0 et V , alors que pour un système à l'équilibre il devrait être égal à 2. Cela vient du fait que le courant à travers la jonction NIS peut s'annuler

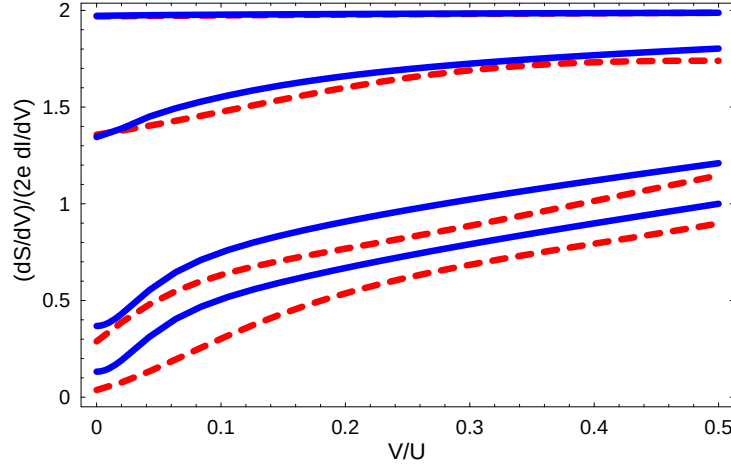


Fig. 2.11: Facteur de Fano différentiel (en valeur absolue) en fonction de V/U . Les lignes pleines correspondent au calcul tunnel (cf. équation (2.71)) et les pointillés aux résultats numériques de la théorie des circuits. La position de la jonction NIS est $x/L = 9/18, 8/18, 4/18$ et $1/18$ de bas en haut (on a utilisé 18 nœuds). On a fixé $eU = 200E_{\text{th}}^W$.

sans que le bruit s'annule aussi. Cela se produit quand les taux de transmissions $N_{\rightleftharpoons}$ sont égaux mais non nuls. Cet effet n'est pas dû aux interférences entre les ondes électroniques mais juste à la forme de la fonction de distribution des électrons dans le fil.

Une méthode plus précise pour vérifier la consistance des deux approches est de comparer les facteurs de Fano différentiels $\mathcal{F}(eV)$ obtenu par chaque méthode. Le calcul numérique employé ne permet pas d'obtenir les dérivées du courant et du bruit avec une grande précision. Cependant, on peut voir sur la figure 2.11 qu'il y a un accord raisonnable entre les deux méthodes, l'écart relatif restant de l'ordre des erreurs numériques.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons calculé le bruit en courant d'une jonction tunnel métal normal-supraconducteur pour des différences de potentiels eV et des températures $k_B T$ très inférieures au gap mais finies. On a montré que si le métal normal est à l'équilibre thermodynamique, le rapport entre le bruit et le courant est universel, ceci restant valable en présence de désordre ou d'interactions. L'efficacité de la méthode de l'hamiltonien effectif permet de l'adapter à d'autres problèmes intéressants de transport de charge dans des circuits mésoscopiques hybrides. Nous l'utilisons notamment dans le chapitre suivant pour étudier les corrélations croisées. Si la jonction n'est pas tunnel, cette méthode ne peut plus être utilisée, la relation (2.42) n'est en générale plus vérifiée. Nous verrons dans le chapitre 5 comment est modifié le facteur de Fano d'une cavité connectée par des jonctions quelconques à un métal normal et un supraconducteur.

Chapitre 3

Corrélations croisées dans les jonctions tunnel métal normal - supraconducteur

Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudié le bruit en courant dans une seule jonction tunnel métal normal - supraconducteur. Nous allons maintenant enrichir la géométrie en ajoutant une seconde jonction tunnel entre le supraconducteur et une nouvelle électrode normale placée à une distance typique R de la première (cf. Fig. 3.1). Ceci va nous permettre d'étudier non plus uniquement le bruit en courant mais aussi les corrélations entre les courants qui traversent chaque jonction.

Il y a plusieurs intérêts à étudier une telle structure. Celle-ci permet d'abord de sonder la taille des paires de Cooper¹. En effet, si la distance entre les deux jonctions est de l'ordre de la taille des paires de Cooper, il est possible que deux électrons d'une même paire de Cooper soient transmis chacun dans une électrode normale différente. Ce processus de transport de charge non-local, que l'on appelle réflexion Andreev croisée (abrégé dans la suite par CAR de *Crossed Andreev Reflection* en anglais), peut être utilisé pour sonder la forme des paires de Cooper. La première idée pour extraire la dépendance en distance de CAR fut d'étudier la matrice de conductance [60–63]. Or CAR n'est pas le seul processus de transport non-local, il y a aussi le cotunneling élastique (abrégé dans la suite par EC de *Elastic Cotunneling* en anglais) [64] qui correspond au passage d'un électron d'une électrode normale à l'autre en passant par le supraconducteur. Mais en pratique ces deux processus se compensent dans la partie hors diagonale de la matrice conductance. Ils sont de plus dominés par la réflexion Andreev directe (transfert des deux électrons dans la même électrode normale) dans la partie diagonale de la matrice conductance. Il a récemment été montré qu'en présence de fortes interactions électron - électron, il est possible de réduire la contribution directe [65–67]. Nous allons montrer dans ce chapitre comment dans le cas sans interaction on peut accéder directement aux contributions

¹Pour du niobium dans l'état supraconducteur, la taille des paires de Cooper est de l'ordre de 10 – 15 nm, cf. [59] .

CAR et EC en mesurant la corrélation croisée du courant dans les deux électrodes normales.

L'étude de la corrélation croisée dans cette structure est aussi intéressante à cause de son signe. En effet, Büttiker dans [68] a montré que, dans un circuit électronique sans interaction où les réservoirs sont à l'équilibre thermodynamique et les différences de potentiels constantes, les corrélations croisées sont négatives à cause de la statistique de Fermi. Cela a récemment été confirmé expérimentalement dans des expériences de type Hanbury Brown-Twiss [69, 70]. Jusqu'à présent, il n'a jamais été observé de corrélations croisées positives dans les circuits électriques. Mais si une des conditions de Büttiker n'est pas remplie, il se peut que la corrélation croisée change de signe. Ainsi en utilisant une électrode supraconductrice qui permet d'injecter des paires d'électrons corrélés dans le circuit, il a été prédit que l'on peut observer des corrélations croisées positives [30, 31, 46, 71–77]. La plupart des calculs ont été faits pour une géométrie en Y où le supraconducteur est attaché par une seule jonction aux électrodes normales [30, 31, 72–75, 77]. C'est la géométrie habituelle pour l'étude des interférences en optique, mais elle complique l'interprétation du changement de signe car elle mélange les processus élémentaires de transport de charge CAR et EC. Nous verrons que dans la géométrie que nous utilisons les corrélations peuvent être positives et qu'elle permet des interprétations simples de leur signe. En outre, cette structure est aussi intéressante du point de vue du calcul quantique car les paires de Cooper dans un supraconducteur de type *s* sont dans l'état de spin singulet, le processus CAR crée donc une paire non locale d'électrons intriqués dans les électrodes normales.

Dans ce chapitre, nous montrerons que CAR a une contribution positive aux corrélations croisées tandis que celle d'EC est négative. Nous montrerons également que la réflexion Andreev direct ne masque pas ces effets. Nous verrons aussi que l'on peut sélectionner les contributions de CAR et EC uniquement en modifiant les potentiels des électrodes normales. Ainsi cette structure permet de sonder directement CAR et EC et de mesurer le changement de signe des corrélations croisées. Nous verrons aussi comment un environnement électromagnétique extérieur peut induire une conductance croisée non-nulle.

3.1 Étude d'une double jonction tunnel métal normal-supraconducteur

3.1.1 L'hamiltonien effectif

On considère donc un supraconducteur conventionnel Bardeen-Cooper-Schrieffer connecté par des jonctions tunnel à deux électrodes normales A et B séparées d'une distance typique R , cf. Fig. 3.1. Pour décrire le transport de charge, on utilise comme dans le chapitre 2 l'approche standard de l'hamiltonien tunnel :

$$H = H_S + H_N^A + H_N^B + H_T^A + H_T^B \quad (3.1)$$

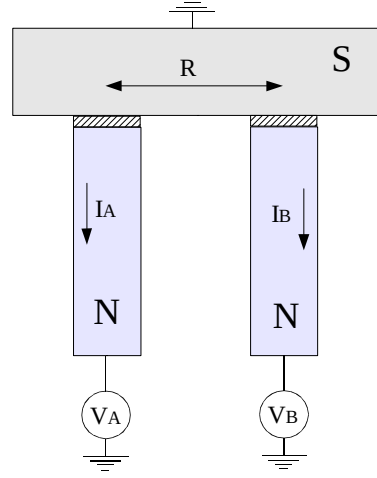


Fig. 3.1: Schéma du composant à trois terminales que l'on étudie.

où H_N^α (H_S) décrit avec ou sans désordre l'électrode normale α (le supraconducteur). Ils sont donnés par :

$$H_N^\alpha = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\alpha\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma}^\alpha, \quad (3.2)$$

$$H_S = \sum_{\mathbf{q}\sigma} \zeta_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger d_{\mathbf{q}\sigma} + \sum_{\mathbf{q}} [\Delta d_{\mathbf{q}\downarrow}^\dagger d_{-\mathbf{q}\uparrow}^\dagger + \Delta^* d_{-\mathbf{q}\uparrow} d_{\mathbf{q}\downarrow}]. \quad (3.3)$$

où Δ est le gap supraconducteur. L'indice σ labélise les deux états de spin, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ correspondent aux nombres quantiques qui labélisent les états propres dans les électrodes isolées. La partie tunnel de l'hamiltonien est

$$H_T^\alpha = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} [t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\alpha c_{\mathbf{k}\sigma}^{\alpha\dagger} d_{\mathbf{q}\sigma} + t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\alpha*} d_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}^\alpha] \quad \text{avec} \quad t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\alpha = \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' t_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}') \quad (3.4)$$

et $t^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est l'amplitude quantique pour qu'un électron passe par effet tunnel de la position $\mathbf{r}$ dans l'électrode normale α à la position $\mathbf{r}'$ dans le supraconducteur. On choisit de fixer le supraconducteur à la masse et de porter les électrodes A et B aux potentiels V_A et V_B .

On s'intéresse au transport de charge dans le régime sous le gap : $|eV_A|, |eV_B|, k_B T \ll \Delta$. Dans ces conditions, aucune quasi-particule ne peut être créée dans le supraconducteur pendant un temps plus long que $\hbar/\Delta$. Comme dans le cas d'une barrière simple que l'on a étudiée dans le chapitre 2, nous allons chercher quels sont les processus du second ordre en amplitude tunnel qui transportent des charges.

La réflexion Andreev

Nous avons déjà étudié le premier processus, la réflexion Andreev. Une paire de Cooper est détruite dans le supraconducteur et deux électrons de spins opposés sont créés dans les électrodes

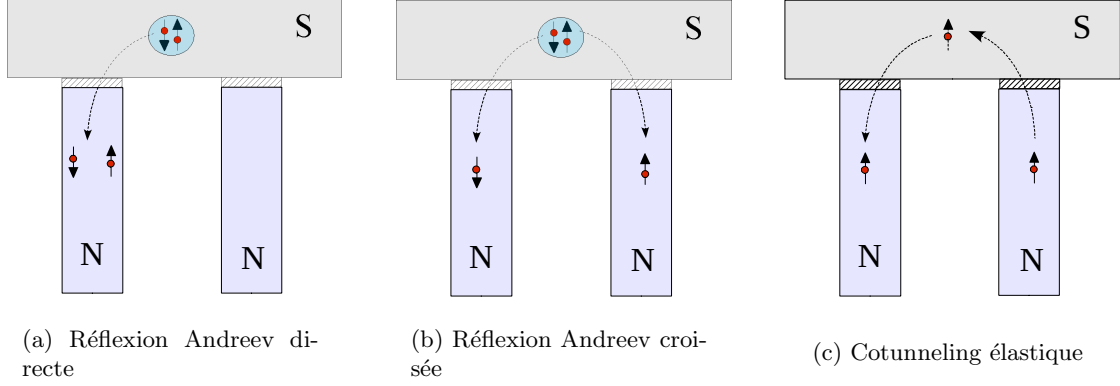


Fig. 3.2: Les trois types de processus qui transportent des charges.

normales. Il est possible que les électrons créés le soient chacun dans une électrode différente. La paire de Cooper est séparée spatialement (cf. 3.2(b)). Ce processus dépend fortement du rapport entre la taille des paires de Cooper et la distance R entre les jonctions. En utilisant la formule (2.29), nous trouvons que l'amplitude de probabilité quantique pour qu'une paire de Cooper soit détruite dans le supraconducteur et qu'un électron de spin haut soit créé dans l'électrode α ($\alpha = A$ ou B) ainsi qu'un électron bas dans l'électrode β ($\beta = A$ ou B) est :

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\alpha\beta} = \sum_{\mathbf{q}} t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\alpha} t_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^{\beta} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \left[\frac{1}{\xi_{\mathbf{k}}^{\alpha} + eV_{\alpha} - E_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{\xi_{\mathbf{p}}^{\beta} + eV_{\beta} - E_{\mathbf{q}}} \right]. \quad (3.5)$$

Le processus CAR correspond à $\alpha \neq \beta$.

Cotunneling élastique

En présence de deux jonctions tunnel connectées au supraconducteur, la réflexion Andreev n'est plus le seul processus à basse énergie qui transporte des charges. Il en existe un autre du même ordre que l'on appelle le cotunneling élastique. Il correspond à la séquence suivante : un électron $\mathbf{q}\sigma$ de l'électrode B est détruit et un électron $\mathbf{k}\sigma$ est créé dans l'électrode A (voir figure 3.2(c)).

Pour calculer l'amplitude quantique de transition, on procède comme dans la section 2.3.1. L'état final est de la forme $|f\rangle = c_{\mathbf{k}\uparrow}^{A\dagger} c_{\mathbf{p}\uparrow}^B |i\rangle$ où $|i\rangle$ est l'état initial. Il y a deux états intermédiaires virtuels possibles $|m_1\rangle = \gamma_{-\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{A\dagger} |i\rangle$ ou $|m_2\rangle = \gamma_{\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} c_{\mathbf{p}\uparrow}^B |i\rangle$. Les éléments de matrices sont donnés par :

$$\begin{aligned} \langle f | H_T | m_1 \rangle &= -t_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{B*} v_{\mathbf{q}}, & \langle m_1 | H_T | i \rangle &= -t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^A v_{\mathbf{q}}, \\ \langle f | H_T | m_2 \rangle &= t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^A u_{\mathbf{q}}, & \langle m_2 | H_T | i \rangle &= t_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{B*} u_{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

et la différence d'énergie est donnée par $E_{m_1} - E_i = E_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}} + eV_A$, $E_{m_2} - E_i = E_{\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}} - eV_B$.

En utilisant la formule (2.29), on obtient l'amplitude de ce processus :

$$T_{\mathbf{k}\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{q}} t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^A t_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{B*} \left[\frac{u_{\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}} - eV_B} - \frac{v_{\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{k}} + eV_A} \right]. \quad (3.6)$$

On obtient la même amplitude pour le passage d'un électron de spin $\downarrow$ de B vers A.

Ce processus est dit élastique car l'énergie de l'électron détruit est la même que celle de l'électron créé. En effet, à basse énergie aucune excitation ne peut subsister dans le supraconducteur. De plus, le spin est conservé. Contrairement à la réflexion Andreev, le cotunneling élastique existe encore si le supraconducteur est dans la phase normale en même temps que le cotunneling inélastique.

On est maintenant en mesure d'écrire un hamiltonien effectif qui ne prend en compte que les processus de basse énergie [78] :

$$H^{\text{eff}} = H_N^A + H_N^B + \sum_{\alpha, \beta} [J_{\alpha\beta} + h.c.] + T + T^\dagger \quad (3.7)$$

$$\text{avec } J_{\alpha\beta} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} A_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\alpha\dagger} c_{\mathbf{p}\downarrow}^{\beta\dagger} \quad \text{et} \quad T = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}\sigma} T_{\mathbf{k}\mathbf{p}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{A\dagger} c_{\mathbf{p}\sigma}^B. \quad (3.8)$$

où $h.c.$ correspond à l'hermitique conjugué. Cet hamiltonien est équivalent à l'hamiltonien initial à basse énergie. Il permet d'obtenir facilement le bruit et le courant.

3.1.2 Courant et corrélations

Dans cette structure il y a deux courants indépendants à étudier I_A et I_B , les courants qui passent à travers les jonctions tunnel A et B. Ils dépendent chacun des deux potentiels V_A et V_B , la conductance différentielle est donc une matrice 2×2 :

$$\overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} \partial I_A / \partial V_A & \partial I_A / \partial V_B \\ \partial I_B / \partial V_A & \partial I_B / \partial V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{AA} & G_{AB} \\ G_{BA} & G_{BB} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Si les potentiels sont suffisamment petits, on peut se satisfaire de l'approximation linéaire et le courant est donné par :

$$\begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{AA} & G_{AB} \\ G_{BA} & G_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Dans cette limite on a la relation de réciprocité d'Onsager-Casimir, $G_{AB} = G_{BA}$, qui provient de la réversibilité des équations microscopiques, c.-à-d. de leur invariance sous le changement $t \rightarrow -t$. On constate aussi avec la relation (3.10) que si la conductance croisée G_{AB} est non nulle, on peut faire passer un courant à travers la jonction B alors que la différence de potentiel à travers cette jonction est nulle, $V_B = 0$, mais $V_A \neq 0$, il y a un courant non-local.

Passons maintenant au calcul des courants. On commence par définir les deux opérateurs courant associés aux charges passant à travers la jonction A ou B. En représentation Heisenberg, ils sont proportionnels à la dérivée temporelle de l'opérateur « nombre de particules » $N_\alpha =$

$\sum_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\alpha\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\alpha} : I_{\alpha} = -e \, dN_{\alpha}/dt = (ei/\hbar)[H^{\text{eff}}, N_{\alpha}]$, $\alpha = A$ ou B . En calculant les commutateurs, on trouve :

$$I_A = \frac{ie}{\hbar}[2J_{AA} + J_{AB} + J_{BA} + T] + h.c. \quad ; \quad I_B = \frac{ie}{\hbar}[2J_{BB} + J_{AB} + J_{BA} - T] + h.c. \quad (3.11)$$

Pour calculer la valeur moyenne du courant et ses corrélations, on utilise la théorie perturbative dépendante du temps.

A l'ordre le plus bas ($\sim t^4$), le courant moyen est donné par la formule de Kubo (cf. Eq. (A.19)) :

$$\langle I_{\alpha} \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \langle [I_{\alpha}(t), H^{\text{eff}}(t')] \rangle_0. \quad (3.12)$$

Le symbole $\langle \dots \rangle_0$ correspond à la valeur moyenne quantique et statistique. En utilisant la stationnarité (c.-à-d. $\langle A(t)B(0) \rangle_0 = \langle A(0)B(-t) \rangle_0$), on obtient finalement :

$$\langle I_A \rangle = e [2(N_{\rightarrow}^{AA} - N_{\leftarrow}^{AA}) + (N_{\rightarrow}^{AB} - N_{\leftarrow}^{AB}) + (N_{\rightarrow}^{EC} - N_{\leftarrow}^{EC})], \quad (3.13a)$$

$$\langle I_B \rangle = e [2(N_{\rightarrow}^{BB} - N_{\leftarrow}^{BB}) + (N_{\rightarrow}^{AB} - N_{\leftarrow}^{AB}) - (N_{\rightarrow}^{EC} - N_{\leftarrow}^{EC})], \quad (3.13b)$$

où les taux de transitions $N_{\rightleftharpoons}$ sont donnés par

$$N_{\rightarrow}^{\alpha\alpha} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle J_{\alpha\alpha}(0) J_{\alpha\alpha}^{\dagger}(t') \rangle_0, \quad N_{\leftarrow}^{\alpha\alpha} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle J_{\alpha\alpha}^{\dagger}(t') J_{\alpha\alpha}(0) \rangle_0. \quad (3.14a)$$

$$N_{\rightarrow}^{AB} = \frac{2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle J_{AB}(0) J_{AB}^{\dagger}(t') \rangle_0, \quad N_{\leftarrow}^{AB} = \frac{2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle J_{AB}^{\dagger}(t') J_{AB}(0) \rangle_0 \quad (3.14b)$$

$$N_{\rightarrow}^{EC} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle T(0) T^{\dagger}(t') \rangle_0, \quad N_{\leftarrow}^{EC} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle T^{\dagger}(t') T(0) \rangle_0 \quad (3.14c)$$

Le facteur 2 dans (3.14b) vient du fait que J_{BA} donne la même contribution à $N_{\rightleftharpoons}^{AB}$ que J_{AB} . Après avoir évalué la valeur moyenne et l'intégration temporelle, les taux de transition deviennent :

$$N_{\rightleftharpoons}^{\alpha\alpha} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} |A_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\alpha\alpha}|^2 H_{\rightleftharpoons}^{\text{And}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) \delta(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{p}} + 2eV_{\alpha}), \quad (3.15a)$$

$$N_{\rightleftharpoons}^{AB} = \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} |A_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{AB}|^2 H_{\rightleftharpoons}^{\text{And}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) \delta(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{p}} + eV_A + eV_B), \quad (3.15b)$$

$$N_{\rightleftharpoons}^{EC} = \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} |T_{\mathbf{k}\mathbf{p}}|^2 H_{\rightleftharpoons}^{\text{cot}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) \delta(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{p}} + eV_A - eV_B), \quad (3.15c)$$

et $H_{\rightarrow}^{\text{And}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) = f(\xi_{\mathbf{k}})f(\xi_{\mathbf{p}})$, $H_{\leftarrow}^{\text{And}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) = [1 - f(\xi_{\mathbf{k}})][1 - f(\xi_{\mathbf{p}})]$, $H_{\rightarrow}^{\text{cot}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) = f(\xi_{\mathbf{k}})[1 - f(\xi_{\mathbf{p}})] = H_{\leftarrow}^{\text{cot}}(\xi_{\mathbf{p}}, \xi_{\mathbf{k}})$, $f(\xi_k)$ est la fonction de Fermi. Les formules (3.13) sont en accord avec les résultats de Falci *et al.* dans l'article [63].

On constate que le courant moyen est la somme de la contribution des trois processus élémentaires : la réflexion Andreev directe (N^{AA} ou N^{BB}), la réflexion Andreev croisée (N^{CAR})

et le cotunneling élastique (N^{EC}). Ce sont ces deux dernières contributions qui dépendent de la distance R entre les jonctions. Comme nous le verrons par la suite, la conductance croisée qui dépend uniquement de CAR et EC est en fait nulle. La dépendance en R est alors uniquement présente dans la partie diagonale de la matrice conductance et comme la réflexion Andreev directe domine les autres processus, la dépendance en R est noyée dans le signal direct, elle est donc pratiquement impossible à observer par des mesures de conductance. C'est pourquoi nous allons maintenant nous pencher sur les corrélations de courant qui, comme on va le voir, permettent d'accéder directement aux amplitudes des processus non-locaux.

Les corrélateurs du courant sont définis par

$$S_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \{\delta I_{\alpha}(t), \delta I_{\beta}(0)\} \rangle, \quad (3.16)$$

où $\delta I_{\alpha}(t) = I_{\alpha}(t) - \langle I_{\alpha} \rangle$, α et β sont égaux à A ou B . On fait ce calcul au premier ordre non nul en t_{kq} . On doit donc développer l'opérateur d'évolution par rapport à l'hamiltonien tunnel. À l'ordre le plus bas, cela revient à remplacer la moyenne thermique $\langle \dots \rangle$ sur l'hamiltonien total H^{eff} par la moyenne thermique $\langle \dots \rangle_0$ sur la partie libre H_0 . On constate alors que l'on peut négliger le terme $\langle I_{\alpha} \rangle_0 \langle I_{\beta} \rangle_0 \sim t^8$ devant $\langle I_{\alpha} I_{\beta} \rangle_0 \sim t^4$. On obtient ainsi :

$$S_{AA} = 2e^2 [4(N_{\rightarrow}^{AA} + N_{\leftarrow}^{AA}) + (N_{\rightarrow}^{AB} + N_{\leftarrow}^{AB}) + (N_{\rightarrow}^{EC} + N_{\leftarrow}^{EC})], \quad (3.17a)$$

$$S_{AB} = 2e^2 [(N_{\rightarrow}^{AB} + N_{\leftarrow}^{AB}) - (N_{\rightarrow}^{EC} + N_{\leftarrow}^{EC})], \quad (3.17b)$$

où les taux de transitions $N_{\pm}$ ont été définis par les équations (3.15). On remarque d'abord que comme le courant, les trois processus élémentaires (réflexion Andreev directe, CAR et EC) contribuent au bruit dans les jonctions (S^{AA} par exemple). Par contre, seuls les processus CAR et EC contribuent à la corrélation croisée S_{AB} . En effet, la réflexion Andreev directe ne corréle pas les électrons de deux électrodes. Ainsi, la corrélation croisée S_{AB} est une mesure directe de l'amplitude de la réflexion Andreev croisée et du cotunneling élastique et ainsi elle permet de sonder la taille des paires de Cooper.

Il est intéressant d'introduire $S^{CAR} = 2e^2 (N_{\rightarrow}^{AB} + N_{\leftarrow}^{AB})$ et $S^{EC} = 2e^2 (N_{\rightarrow}^{EC} + N_{\leftarrow}^{EC})$, on peut alors réécrire la corrélation croisée sous la forme suivante : $S_{AB} = S^{CAR} - S^{EC}$. Comme les taux de transition $N_{\pm}$ sont des quantités positives, on en déduit que la réflexion Andreev croisée donne une contribution positive à S_{AB} , alors que le cotunneling élastique y contribue négativement. Cela peut s'expliquer facilement si l'on remarque que chaque processus de type CAR crée des courants instantanés de même signe dans les électrodes alors que EC crée des courants instantanés de signe opposé.

3.1.3 Statistique complète du transport de charge

Pour obtenir la statistique complète du transport, nous allons procéder comme dans la section 1.3. La charge élémentaire transportée est celle de l'électron : $q_0 = -e$. On considère les deux variables aléatoires suivantes :

- n_a , le nombre de charges élémentaires $-e$ ayant traversé la barrière tunnel A pendant un temps t_0 ,

- n_b , le nombre de charges élémentaires $-e$ ayant traversé la barrière tunnel B pendant un temps t_0 .

Nous cherchons la probabilité $p(n_a, n_b, t_0)$ que n_a charges aient traversé la barrière A et n_b la barrière B pendant un temps t_0 . Le transport résulte de la combinaison de huit processus de Poisson indépendants qui ont comme taux de transition :

- $N_{\leftarrow\leftarrow}^{AA}$ qui correspond à la transition $(n_a, n_b) \rightarrow (n_a \mp 2, n_b)$ (cf. Fig. 3.3(a)),
- $N_{\leftarrow\leftarrow}^{BB}$ qui correspond à la transition $(n_a, n_b) \rightarrow (n_a, n_b \mp 2)$,
- $N_{\leftarrow\leftarrow}^{AB}$ qui correspond à la transition $(n_a, n_b) \rightarrow (n_a \mp 1, n_b \mp 1)$ (cf. Fig. 3.3(b)),
- $N_{\leftarrow\leftarrow}^{EC}$ qui correspond à la transition $(n_a, n_b) \rightarrow (n_a \mp 1, n_b \mp 1)$ (cf. Fig. 3.3(c)).

On en déduit que l'équation maîtresse satisfaite par $p(n_a, n_b, t)$ est (cf. Fig. 3.3) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p(n_a, n_b, t) = & N_{\leftarrow\leftarrow}^{AA}p(n_a - 2, n_b, t) + N_{\rightarrow\rightarrow}^{AA}p(n_a + 2, n_b, t) \\ & + N_{\leftarrow\leftarrow}^{BB}p(n_a, n_b - 2, t) + N_{\rightarrow\rightarrow}^{BB}p(n_a, n_b + 2, t) \\ & + N_{\leftarrow\leftarrow}^{AB}p(n_a - 1, n_b - 1, t) + N_{\rightarrow\rightarrow}^{AB}p(n_a + 1, n_b + 1, t) \\ & + N_{\leftarrow\leftarrow}^{EC}p(n_a - 1, n_b + 1, t) + N_{\rightarrow\rightarrow}^{EC}p(n_a + 1, n_b - 1, t) \\ & - (N_{\leftarrow\leftarrow}^{AA} + N_{\rightarrow\rightarrow}^{AA} + N_{\leftarrow\leftarrow}^{BB} + N_{\rightarrow\rightarrow}^{BB} + N_{\leftarrow\leftarrow}^{AB} + N_{\rightarrow\rightarrow}^{AB} + N_{\leftarrow\leftarrow}^{EC} + N_{\rightarrow\rightarrow}^{EC})p(n_a, n_b, t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pour résoudre cette équation, on utilise la fonction génératrice suivante :

$$\chi(\lambda_a, \lambda_b) = \langle e^{i(\lambda_a Q_a + \lambda_b Q_b)} \rangle = \sum_{n_a, n_b} p(n_a, n_b, t) \exp[-ie(\lambda_a n_a + \lambda_b n_b)], \quad (3.19)$$

et après un peu de calculs on trouve que la fonction génératrice des cumulants est :

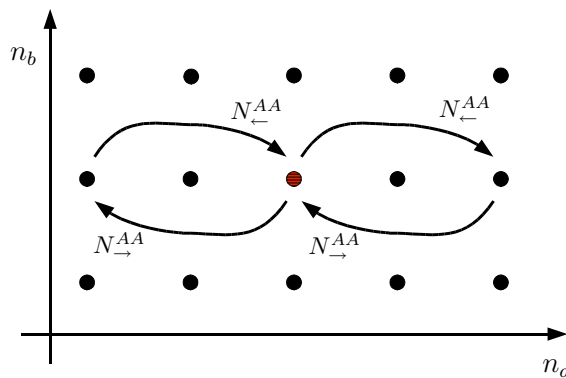
$$\begin{aligned} \phi = \ln \chi = & N_{\rightarrow\rightarrow}^{AA}t_0 \left(e^{2ie\lambda_a} - 1 \right) + N_{\leftarrow\leftarrow}^{AA}t_0 \left(e^{-2ie\lambda_a} - 1 \right) \\ & + N_{\rightarrow\rightarrow}^{BB}t_0 \left(e^{2ie\lambda_b} - 1 \right) + N_{\leftarrow\leftarrow}^{BB}t_0 \left(e^{-2ie\lambda_b} - 1 \right) \\ & + N_{\rightarrow\rightarrow}^{AB}t_0 \left(e^{ie(\lambda_a + \lambda_b)} - 1 \right) + N_{\leftarrow\leftarrow}^{AB}t_0 \left(e^{-ie(\lambda_a + \lambda_b)} - 1 \right) \\ & + N_{\rightarrow\rightarrow}^{EC}t_0 \left(e^{ie(\lambda_a - \lambda_b)} - 1 \right) + N_{\leftarrow\leftarrow}^{EC}t_0 \left(e^{-ie(\lambda_a - \lambda_b)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les cumulants sont simplement donnés par

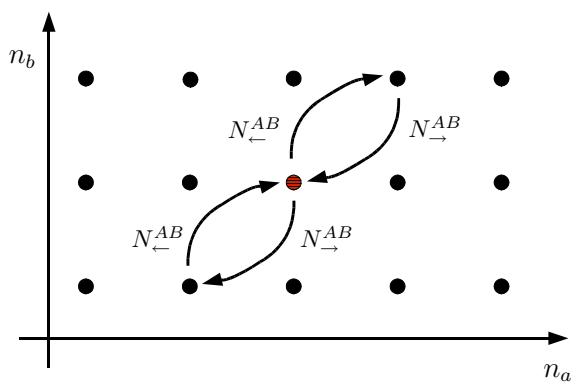
$$\langle\langle Q_a^n Q_b^m \rangle\rangle = i^{n+m} \frac{\partial^{n+m} \phi}{\partial \lambda_a^n \partial \lambda_b^m} \Big|_{\lambda_a = \lambda_b = 0}. \quad (3.21)$$

On retrouve alors les premiers corrélateurs du courant, Eq. (3.13) et Eq. (3.17) :

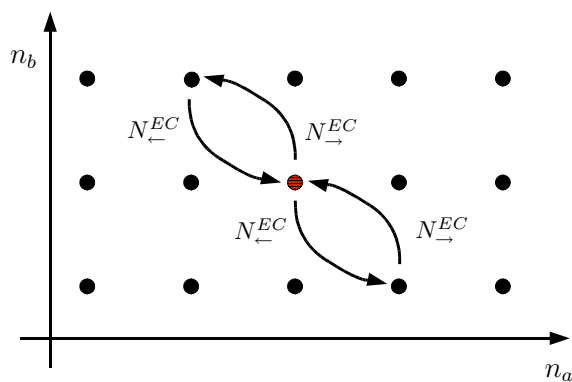
$$\begin{aligned} \langle I_A \rangle &= \langle\langle Q_a \rangle\rangle / t_0 = e \left[2(N_{\rightarrow\rightarrow}^{AA} - N_{\leftarrow\leftarrow}^{AA}) + (N_{\rightarrow\rightarrow}^{AB} - N_{\leftarrow\leftarrow}^{AB}) + (N_{\rightarrow\rightarrow}^{EC} - N_{\leftarrow\leftarrow}^{EC}) \right], \\ S_{AA} &= 2\langle\langle Q_a^2 \rangle\rangle / t_0 = 2e^2 \left[4(N_{\rightarrow\rightarrow}^{AA} + N_{\leftarrow\leftarrow}^{AA}) + (N_{\rightarrow\rightarrow}^{AB} + N_{\leftarrow\leftarrow}^{AB}) + (N_{\rightarrow\rightarrow}^{EC} + N_{\leftarrow\leftarrow}^{EC}) \right], \\ S_{AB} &= 2\langle\langle Q_a Q_b \rangle\rangle / t_0 = 2e^2 \left[(N_{\rightarrow\rightarrow}^{AB} + N_{\leftarrow\leftarrow}^{AB}) - (N_{\rightarrow\rightarrow}^{EC} + N_{\leftarrow\leftarrow}^{EC}) \right]. \end{aligned}$$



(a) Réflexion Andreev directe



(b) Réflexion Andreev croisée



(c) Cotunneling élastique

Fig. 3.3: Processus élémentaires qui peuplent et vident l'état central (n_a, n_b) très légèrement hachuré.

Puis on peut calculer les corrélateurs du courant d'ordre plus élevé. Ceux mélangeant les deux courants sont particulièrement intéressants :

$$\langle\langle Q_a^2 Q_b \rangle\rangle/t_0 = e^3 [(N_{\rightarrow}^{AB} + N_{\leftarrow}^{AB}) - (N_{\rightarrow}^{EC} + N_{\leftarrow}^{EC})] , \quad (3.23)$$

$$\langle\langle Q_a^2 Q_b^2 \rangle\rangle/t_0 = e^4 [N_{\rightarrow}^{AB} + N_{\leftarrow}^{AB} + N_{\rightarrow}^{EC} + N_{\leftarrow}^{EC}] . \quad (3.24)$$

Ces résultats peuvent se simplifier un peu. On montre en effet que

$$H_{\leftarrow}^{\text{And}}(\xi_a, \xi_b) = \exp(\beta(\xi_a + \xi_b)) H_{\rightarrow}^{\text{And}}(\xi_a, \xi_b) \quad (3.25)$$

$$H_{\leftarrow}^{\text{cot}}(\xi_a, \xi_b) = \exp(\beta(\xi_a - \xi_b)) H_{\rightarrow}^{\text{cot}}(\xi_a, \xi_b) . \quad (3.26)$$

On en déduit à l'aide des équations (3.15) que les taux de transition de chaque processus ne sont pas indépendants :

$$N_{\leftarrow}^{AA} = e^{-2\beta e V_A} N_{\rightarrow}^{AA} , \quad (3.27a)$$

$$N_{\leftarrow}^{AB} = e^{-\beta(e V_A + e V_B)} N_{\rightarrow}^{AB} , \quad (3.27b)$$

$$N_{\leftarrow}^{EC} = e^{-\beta(e V_A - e V_B)} N_{\rightarrow}^{EC} . \quad (3.27c)$$

On a donc des relations de type « équilibre détaillé » entre les taux de transition. Cela provient du fait que le transport de charge est stationnaire et que les réservoirs sont à l'équilibre thermodynamique. C'est le même type de relation qui nous a permis de relier le courant et le bruit dans une jonction NIS (Eq. (2.42)). Il n'y a donc que quatre quantités réellement indépendantes qui caractérisent le transport : les quatre taux $N_{\rightarrow}$, qui seront calculés en utilisant la mécanique quantique. Introduisons les courants résultant de chaque processus :

$$I_{AA}^0(V_A, T) = 2e (N_{\rightarrow}^{AA} - N_{\leftarrow}^{AA}) , \quad (3.28a)$$

$$I_{CAR}^0(V_A + V_B, T) = e (N_{\rightarrow}^{AB} - N_{\leftarrow}^{AB}) , \quad (3.28b)$$

$$I_{EC}^0(V_A - V_B, T) = e (N_{\rightarrow}^{EC} - N_{\leftarrow}^{EC}) . \quad (3.28c)$$

Les corrélateurs d'ordre deux sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} S_{AA} &= 2e \left[2I_{AA}^0 \coth\left(\frac{eV_A}{k_B T}\right) + I_{CAR}^0 \coth\left(\frac{eV_A + eV_B}{2k_B T}\right) + I_{EC}^0 \coth\left(\frac{eV_A - eV_B}{2k_B T}\right) \right] , \\ S_{AB} &= 2e \left[I_{CAR}^0 \coth\left(\frac{eV_A + eV_B}{2k_B T}\right) - I_{EC}^0 \coth\left(\frac{eV_A - eV_B}{2k_B T}\right) \right] . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pour pouvoir prédire quantitativement le transport de charge il nous reste à calculer les quatre courants élémentaires I^0 . Les deux courants I_{AA}^0 et I_{BB}^0 provenant de la réflexion Andreev directe ont été calculés il y a quelques années par Hekking et Nazarov dans [34, 35] en présence de désordre. Nous sommes déjà revenus sur ces calculs dans le chapitre 2 où l'on étudiait une seule jonction NIS. Quant aux courants élémentaires de la réflexion Andreev croisée I_{CAR}^0 et du cotunneling I_{EC}^0 , ils ont précédemment été évalués par Falci *et al.* [63] en absence de désordre et par Feinberg [79] en même temps que nous [78] pour un supraconducteur diffusif. Nous allons revenir en détail sur ces calculs dans la section suivante, afin de pouvoir obtenir quantitativement la corrélation croisée.

3.1.4 Les corrélations croisées

Nous allons suivre la méthode des articles [34, 35]. Nous l'avons déjà utilisée dans la section 2.3.2. Comme on vient de le voir il nous suffit, en combinant (3.17b) et (3.27), de calculer $N_{\rightarrow}^{AB}$ et $N_{\rightarrow}^{EC}$ pour obtenir la corrélation croisée.

On part de (3.15), on change les sommes sur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ en intégrales par la manipulation usuelle :

$$\sum_{\mathbf{kp}} = \int d\xi_A d\xi_B \sum_{\mathbf{kp}} \delta(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_A) \delta(\xi_{\mathbf{p}} - \xi_B). \quad (3.30)$$

On fait en suite le changement de variable (de Jacobien égal à 2) :

$$\begin{cases} E &= (\xi_A + \xi_B)/2 \\ \varepsilon &= (\xi_A - \xi_B)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_A &= E + \varepsilon \\ \xi_B &= E - \varepsilon \end{cases}. \quad (3.31)$$

On effectue immédiatement une des deux intégrales sur les énergies grâce à la fonction de Dirac. On obtient :

$$N_{\rightarrow}^{AB} = \frac{2}{h} \int d\varepsilon A^{\text{And}}(\varepsilon - eU^{\text{And}}, -\varepsilon - eU^{\text{And}}) H_{\rightarrow}^{\text{And}}(\varepsilon - eU^{\text{And}}, -\varepsilon - eU^{\text{And}}) \quad (3.32)$$

$$N_{\rightarrow}^{EC} = \frac{2}{h} \int dE A^{\text{cot}}(E - eU^{\text{cot}}, E + eU^{\text{cot}}) H_{\rightarrow}^{\text{cot}}(E - eU^{\text{cot}}, E + eU^{\text{cot}}) \quad (3.33)$$

avec

$$A^{\text{And}}(\xi_A, \xi_B) = \sum_{\mathbf{kp}} 4\pi^2 \delta(\xi_A - \xi_{\mathbf{k}}) \delta(\xi_B - \xi_{\mathbf{p}}) |A_{\mathbf{kp}}^{AB}|^2, \quad (3.34)$$

$$A^{\text{cot}}(\xi_A, \xi_B) = \sum_{\mathbf{kp}} 4\pi^2 \delta(\xi_A - \xi_{\mathbf{k}}) \delta(\xi_B - \xi_{\mathbf{p}}) |T_{\mathbf{kp}}|^2, \quad (3.35)$$

où on a posé $U^{\text{And}} = (V_A + V_B)/2$ et $U^{\text{cot}} = (V_A - V_B)/2$. On remplace maintenant les amplitudes tunnel par leurs expressions (3.5) et (3.6). En effectuant le même type de manipulations que précédemment, on aboutit à :

$$A^{\text{And/cot}}(\xi_A, \xi_B) = \int d\zeta d\zeta' F^{\text{And/cot}}(\zeta; \xi_A, \xi_B) F^{\text{And/cot}}(\zeta'; \xi_A, \xi_B) \Xi^{\text{And/cot}}(\xi_A, \xi_B; \zeta, \zeta') \quad (3.36)$$

avec

$$F^{\text{And}} = 2\pi \left[\frac{u(\zeta)v(\zeta)}{\xi_A + eV_A - E(\zeta)} + \frac{u(\zeta)v(\zeta)}{\xi_B + eV_B - E(\zeta')} \right] \approx -4\pi \frac{u(\zeta)v(\zeta)}{E(\zeta)}, \quad (3.37)$$

$$F^{\text{cot}} = 2\pi \left[\frac{u^2(\zeta)}{E(\zeta) - \xi_B - eV_B} - \frac{v^2(\zeta)}{E(\zeta') + \xi_A + eV_A} \right] \approx 2\pi \frac{u^2(\zeta) - v^2(\zeta)}{E(\zeta)} \quad (3.38)$$

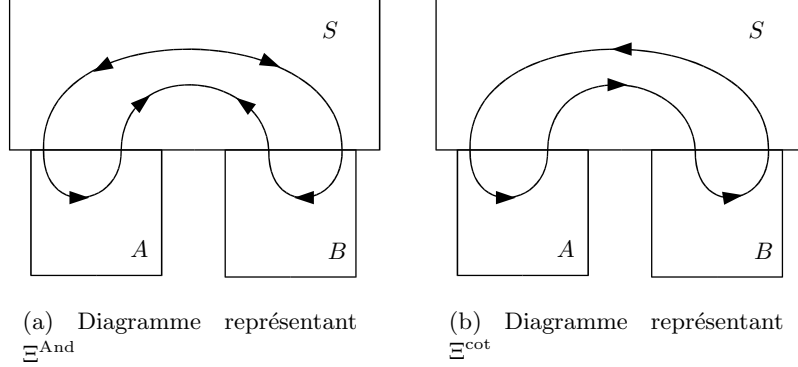


Fig. 3.4: Diagrammes représentant les contributions CAR et EC au transport de charge. Ξ^{And} contient des propagateurs anormaux dans le supraconducteur, Ξ^{cot} uniquement des propagateurs normaux.

et

$$\Xi^{\text{And}}(\xi_A, \xi_B; \zeta, \zeta') = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta(\xi_A - \xi_{\mathbf{k}}) \delta(\xi_B - \xi_{\mathbf{p}}) \delta(\zeta - \zeta_{\mathbf{q}}) \delta(\zeta' - \zeta_{\mathbf{q}'}) t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^A t_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^B t_{\mathbf{k}\mathbf{q}'}^{A*} t_{\mathbf{p}-\mathbf{q}'}^{B*} \quad (3.39)$$

$$\Xi^{\text{cot}}(\xi_A, \xi_B; \zeta, \zeta') = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta(\xi_A - \xi_{\mathbf{k}}) \delta(\xi_B - \xi_{\mathbf{p}}) \delta(\zeta - \zeta_{\mathbf{q}}) \delta(\zeta' - \zeta_{\mathbf{q}'}) t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^A t_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{B*} t_{\mathbf{k}\mathbf{q}'}^{A*} t_{\mathbf{p}\mathbf{q}'}^B \quad (3.40)$$

On a pu faire les approximations dans les équations (3.37) et (3.38) car ξ_A et ξ_B sont aux maximum de l'ordre de $\max(eV_A, eV_B, k_B T) \ll \Delta$ à cause des fonctions de Fermi.

Ce sont les fonctions Ξ qui contiennent l'information sur la forme des jonctions ainsi que sur la façon dont les électrons se

propagent dans les électrodes (diffusif ou balistique). Si on s'intéresse à leur représentation diagrammatique (cf. Fig. 3.4), on constate qu'elles ont des structures différentes : Ξ^{And} fait intervenir des propagateurs anormaux, signe de la réflexion d'Andreev (Fig. 3.4(a)), et Ξ^{cot} des propagateurs normaux, signe d'un effet tunnel usuel (Fig. 3.4(b)). Comme les propagateurs anormaux n'existent que dans l'état supraconducteur, on comprend bien que la réflexion Andreev croisée disparaît pour des énergies de l'ordre du gap Δ mais pas le cotunneling élastique.

On utilise maintenant la représentation spatiale des amplitudes tunnel (3.4), on obtient :

$$\Xi^{\text{And}}[\xi_A, \xi_B; \zeta, \zeta'] = \int d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_4 \int d^3\mathbf{r}'_1 \dots d^3\mathbf{r}'_4 \overline{K_{\xi_A}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)} \overline{K_{\xi_B}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2)} \times$$

$$\overline{K_{\zeta}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) K_{\zeta'}(\mathbf{r}'_4, \mathbf{r}'_3)} t_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) t_B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2) t_A^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3) t_B^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_4) \quad (3.41a)$$

$$\Xi^{\text{cot}}[\xi_A, \xi_B; \zeta, \zeta'] = \int d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_4 \int d^3\mathbf{r}'_1 \dots d^3\mathbf{r}'_4 \overline{K_{\xi_A}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)} \overline{K_{\xi_B}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)} \times$$

$$\overline{K_{\zeta}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) K_{\zeta'}(\mathbf{r}'_4, \mathbf{r}'_3)} t_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) t_B^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2) t_A^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3) t_B(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_4) \quad (3.41b)$$

où les fonctions K sont les densités spectrales précédemment définies, voir Eq. (2.49) et $\overline{\dots}$ désigne la moyenne sur les impuretés dans chaque réservoir, si il y en a.

On utilise ensuite la forme suivante pour les amplitudes tunnel dans l'espace réel [50] :

$$t_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \delta'(z_1 - z_{\alpha}) \delta'(z_2 - z_{\alpha}) \delta^2(\mathbf{r}_1^{\parallel} - \mathbf{r}_2^{\parallel}) t_{\alpha}(\mathbf{r}_1^{\perp}), \quad \alpha = A, B. \quad (3.42)$$

où la jonction α est située dans le plan z_{α} . Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 on peut relier $|t_{\alpha}|^2$ à la conductance par unité de surface $g_{T\alpha}$ de la barrière α dans l'état normal, cf. Eq. (2.59) :

$$g_{T\alpha}(\mathbf{R}) = 2\pi^3 k_F^2 g_Q \nu_{\alpha} \nu_S |t_{\alpha}(\mathbf{R})|^2 \quad (3.43)$$

où ν_A , ν_B et ν_S sont les densités d'état par unité de spin des réservoirs A, B et du supraconducteur dans l'état normal.

Les densités spectrales dans les électrodes normales K_{ξ_A} et K_{ξ_B} , se propageant dans des espaces distincts, ne peuvent interférer entre elles. De plus, c'est principalement pour une énergie proche de l'énergie de Fermi que ces densités spectrales contribuent donc $K_{\xi_{A/B}} \approx K_0 = \nu_{\alpha} g$ où g est donné par (2.54). Ainsi, les fonctions Ξ ne dépendent finalement que ζ et ζ' et en combinant les équations (3.36), (3.37) et (3.38) on constate que $A^{\text{And/cot}}(\xi_A, \xi_B) \approx A^{\text{And/cot}}(0, 0)$. Ceci a comme conséquence importante que les courants élémentaires de chaque processus sont nécessairement linéaires :

$$I_{CAR}^0(V_A + V_B, T) = (V_A + V_B) G_{CAR} \quad (3.44)$$

$$I_{EC}^0(V_A - V_B, T) = (V_A - V_B) G_{EC}, \quad (3.45)$$

ainsi la conductance croisée est donnée par $G_{AB} = G_{CAR} - G_{EC}$. Comme on l'a vu dans le chapitre 2, ce n'est pas le cas de $I_{CAR}^0(V_A)$ qui peut être fortement non-linéaire. Les conductances sont données par

$$G_{CAR} = g_Q A^{\text{And}}(0, 0) = g_Q \int d\zeta d\zeta' \phi^{CAR}(\zeta) \phi^{CAR}(\zeta') \Xi(\zeta, \zeta') \quad (3.46)$$

$$G_{EC} = g_Q A^{\text{cot}}(0, 0) = g_Q \int d\zeta d\zeta' \phi^{EC}(\zeta) \phi^{EC}(\zeta') \Xi(\zeta, \zeta') \quad (3.47)$$

avec

$$\Phi^{CAR}(\zeta) = 2\pi \frac{\Delta}{\zeta^2 + \Delta^2}, \quad \Phi^{EC}(\zeta) = 2\pi \frac{\zeta}{\zeta^2 + \Delta^2}. \quad (3.48a)$$

Elles suffisent pour déterminer la corrélation croisée car en utilisant l'équation (3.29), on a [78] :

$$S_{AB} = 2e \left[(V_A + V_B) G_{CAR} \coth \left(\frac{eV_A + eV_B}{2k_B T} \right) - (V_A - V_B) G_{EC} \coth \left(\frac{eV_A - eV_B}{2k_B T} \right) \right]. \quad (3.49)$$

On voit immédiatement à partir de cette relation que l'on peut changer le signe de la corrélation croisée en modifiant uniquement les potentiels des réservoirs :

- Si $V_A = V_B = V$ et que la température est suffisamment basse :

$$S_{AB} = 4e^2 (G_{CAR}|V| - k_B T G_{EC}) \approx 4e^2 G_{CAR}|V|, \quad (3.50)$$

la corrélation croisée est *positive* et elle est directement proportionnelle à l'amplitude de réflexion Andreev croisée.

- Si $V_A = -V_B = U$ et que la température est suffisamment basse :

$$S_{AB} = -4e^2 (G_{EC}|U| - k_B T G_{CAR}) \approx -4e^2 G_{EC}|U|, \quad (3.51)$$

la corrélation croisée est *négative* et proportionnelle à l'amplitude de cotunneling élastique. On peut ainsi accéder facilement et de façon indépendante à l'amplitude des processus CAR et EC.

Pour obtenir des résultats quantitatifs, nous devons maintenant faire des hypothèses plus précises sur la façon dont les électrons se propagent au voisinage de la jonction.

Transport balistique

On suppose donc qu'il y a très peu d'impuretés dans les électrodes, c'est la limite propre ou sans désordre, il n'y a pas de diffusion. Il faut pour cela que la longueur de cohérence balistique dans le supraconducteur $\xi_b = \hbar v_F / \Delta$ satisfasse $l \gg \xi_b$. Dans ce cas $\overline{K_\zeta K'_\zeta} = \overline{K_\zeta} \overline{K'_\zeta}$ et les modes propres sont des ondes planes. On en déduit que la densité spectrale dans le supraconducteur s'écrit en dimension 3 :

$$K_\zeta(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \delta(\zeta - \hbar^2 \mathbf{k}^2 / (2m) + \mu_F) \quad (3.52)$$

où μ_F est l'énergie de Fermi. On peut factoriser la dépendance en ζ, ζ' du noyau Ξ et ainsi effectuer les intégrales sur l'énergie des équations (3.48). On trouve, en utilisant $\Delta \ll \mu_F$:

$$\int d\zeta \phi^{CAR}(\zeta) K_\zeta(\mathbf{r}) = 2\pi^2 \nu_S \frac{\sin k_F r}{k_F r} e^{-|\mathbf{r}|/\xi_b} \quad (3.53a)$$

$$\int d\zeta \phi^{EC}(\zeta) K_\zeta(\mathbf{r}) = 2\pi^2 \nu_S \frac{\cos k_F r}{k_F r} e^{-|\mathbf{r}|/\xi_b}, \quad (3.53b)$$

où ν_S est la densité d'état au niveau de Fermi par unité de spin du supraconducteur dans l'état normal.

Il reste maintenant à intégrer sur les variables spatiales orthogonales aux barrières dans les fonctions Ξ données par les équations (3.41). Nous trouvons :

$$\begin{pmatrix} G_{CAR} \\ G_{EC} \end{pmatrix} = 4\pi^4 g_Q \nu_A \nu_B \nu_S^2 \int_{\mathcal{S}_A} d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_3 \int_{\mathcal{S}_B} d^2 \mathbf{r}_2 d^2 \mathbf{r}_4 \tilde{g}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \tilde{g}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \\ \times t_A(\mathbf{r}_1) t_A^*(\mathbf{r}_3) \begin{pmatrix} t_B(\mathbf{r}_2) t_B^*(\mathbf{r}_4) \tilde{f}_{CAR}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tilde{f}_{CAR}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \\ t_B^*(\mathbf{r}_2) t_B(\mathbf{r}_4) \tilde{f}_{EC}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tilde{f}_{EC}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

où les fonctions $\tilde{g}$ sont définies dans l'Eq. (2.56), les intégrales se font sur les surfaces $\mathcal{S}_\alpha$ des deux jonctions et

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_{CAR}(\mathbf{r}) \\ \tilde{f}_{EC}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} \sin(k_F r) e^{-r/\xi_b} / (k_F r) \\ \cos(k_F r) e^{-r/\xi_b} / (k_F r) \end{pmatrix} \approx k_F^2 \frac{e^{-r/\xi_b}}{(k_F r)^2} \begin{pmatrix} \cos(k_F r) \\ -\sin(k_F r) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

la seconde égalité venant de $\lambda_F \ll l, r$ car $r \approx R$ (R est la distance typique entre les deux jonctions).

On va considérer le cas où les jonctions ont un seul canal de transmission, c.-à-d. $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B \sim \lambda_F^2$. On calcule alors les conductances en fixant $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4$ et $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}$ dans l'équation (3.54) et on trouve [63] :

$$\begin{pmatrix} G_{CAR} \\ G_{EC} \end{pmatrix} = 4\pi^4 g_Q \nu_A \nu_B \nu_S^2 |t_A|^2 \mathcal{S}_A^2 |t_B|^2 \mathcal{S}_B^2 \frac{k_F^8}{9} \frac{e^{-2R/\xi_b}}{(k_F R)^4} \begin{pmatrix} \cos^2(k_F R) \\ \sin^2(k_F R) \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

En utilisant l'équation (3.43) on peut réécrire les conductances $G_{CAR/EC}$ en terme des conductances G_{TA} et G_{TB} des jonctions à un canal dans l'état normal² :

$$\begin{pmatrix} G_{CAR} \\ G_{EC} \end{pmatrix} = \frac{G_{TA} G_{TB}}{g_Q} \frac{\mathcal{S}_A k_F^2}{3\pi} \frac{\mathcal{S}_B k_F^2}{3\pi} \frac{e^{-2R/\xi_b}}{(k_F R)^4} \begin{pmatrix} \cos^2(k_F R) \\ \sin^2(k_F R) \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Ces deux conductances bien qu'apparemment différentes sont égales une fois moyennées sur quelques canaux car les fonctions $\sin^2(k_F r)$ et $\cos^2(k_F r)$ oscillent très vite. Ainsi dans la limite balistique l'amplitude de CAR et EC sont égales, $G_{CAR} = G_{EC}$, la conductance croisée est alors nulle $G_{AB} = 0$. Nous allons voir que c'est aussi le cas si le transport est diffusif. Notons que pour des interfaces transparentes, Mélin et Feinberg [80] ont montrés que la compensation EC et CAR ne tient plus et que le cotunneling élastique l'emporte sur la réflexion Andreev croisée.

Transport diffusif

On suppose maintenant que le transport dans les électrodes est diffusif. Cela revient à imposer que la longueur de cohérence diffusive du supraconducteur $\xi_d = \sqrt{\xi_b l} = \sqrt{\hbar D / \Delta}$ satisfasse $\xi_d \gg l$. On effectue donc la moyenne sur les différentes configurations du désordre dans chaque électrode des fonctions Ξ définies par les équations (3.41). On procède comme dans la section 2.3.2 du chapitre 2. Pour les deux électrodes normales, on a la moyenne sur le désordre une seule

²On ne trouve pas exactement les mêmes conductances que dans l'article [63] car ils utilisent une amplitude tunnel dans l'espace réel différente, mais une fois moyennées sur plusieurs canaux on trouve bien $G_{CAR} = G_{EC}$.

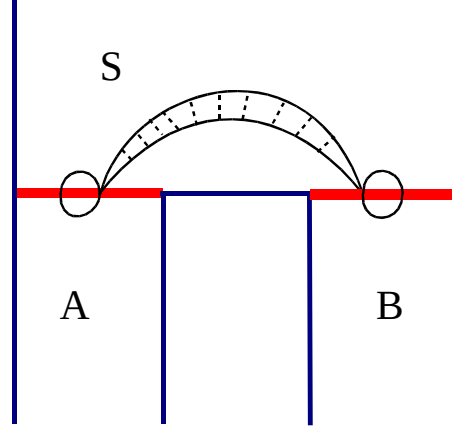


Fig. 3.5: Représentation diagrammatique de la contribution dominante de Ξ où le cooperon se propage dans le supraconducteur. On a utilisé les mêmes conventions que dans la figure 2.5 page 30.

fonction spectrale $\overline{K}$, dont la valeur est donnée par l'équation (2.54). On dispose aussi de la moyenne d'un produit de deux fonctions spectrales $\overline{K\overline{K}}$ dans le supraconducteur qui est donnée par une équation similaire à l'équation (2.60) qui fait apparaître un cooperon se propageant dans le supraconducteur. On utilise ensuite les amplitudes tunnel (3.42) qu'il faut intégrer sur les variables spatiales orthogonales aux jonctions. On constate alors que chaque fonction Ξ est la somme de 3 termes différents qui sont des produits de fonctions $\tilde{g}$ à courte portée (de l'ordre de λ_F) (cf. Eq. (2.56)) et de fonctions P à longue portée. Parmi ces trois termes on garde uniquement celui à longue portée car c'est lui qui domine. On trouve alors que $\Xi^{\text{And}} = \Xi^{\text{cot}} = \Xi$ avec

$$\begin{aligned} \Xi(\zeta - \zeta') &= \frac{1}{\pi} \nu_A \nu_B \nu_S \int_{S_A} d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_3 \int_{S_B} d^2 \mathbf{r}_2 d^2 \mathbf{r}_4 |t_A(\mathbf{r}_3)|^2 |t_B(\mathbf{r}_4)|^2 \\ &\quad \times \tilde{g}^2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \tilde{g}^2(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2) \text{Re} [P_{\zeta - \zeta'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] , \end{aligned} \quad (3.58)$$

cela correspond au diagramme Fig. 3.5. On effectue alors les intégrales sur $\mathbf{r}_3$ et $\mathbf{r}_4$ qui convergent (cf. Eq. (2.58)) et on utilise l'équation (3.43) qui relie les amplitudes tunnel aux conductances dans l'état normal (Eq. (3.43)), on obtient alors :

$$\Xi(\zeta - \zeta') = \frac{1}{16\pi^5 \nu_S g_Q^2} \int_{S_A} d^2 \mathbf{r}_A \int_{S_B} d^2 \mathbf{r}_B g_{TA}(\mathbf{r}_A) g_{TB}(\mathbf{r}_B) \text{Re} [P_{\zeta - \zeta'}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)] . \quad (3.59)$$

Il ne nous reste plus qu'à intégrer sur les énergies en utilisant l'équation (3.46) pour trouver les conductances. Comme Ξ ne dépend que de $\zeta - \zeta'$, on peut effectuer l'intégrale sur $(\zeta + \zeta')/2$. Bien que les fonctions ϕ^{CAR} et ϕ^{EC} soient différentes, l'intégrale donne le même résultat pour CAR et EC : $A^{\text{And}}(0, 0) = A^{\text{cot}}(0, 0) = A_d$ avec [78, 79] :

$$A_d = \frac{1}{2\pi^2 \nu_S g_Q^2} \int d\varepsilon \frac{\Delta}{\Delta^2 + \varepsilon^2} \iint_{S_A, S_B} d^2 \mathbf{r}_A d^2 \mathbf{r}_B g_{TA}(\mathbf{r}_A) g_{TB}(\mathbf{r}_B) \text{Re} [P_{\zeta - \zeta'}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)] \quad (3.60)$$

On en conclut d'abord que les courants élémentaires des processus CAR et EC, ont les mêmes amplitudes. Ainsi, $G_{CAR} = G_{EC}$, donc la conductance croisée est nulle $G_{AB} = \partial I_A / \partial V_B = \partial I_B / \partial V_A = 0$ car :

$$I_A(V_A, V_B) = I_A^0(V_A, T) + 2g_Q A_d V_A \quad (3.61)$$

$$I_B(V_A, V_B) = I_B^0(V_B, T) + 2g_Q A_d V_B. \quad (3.62)$$

Il n'y a pas de signature de la réflexion Andreev croisée et du cotunneling élastique dans la partie hors diagonale de la matrice de conductance ($G_{AB} = 0$) car les deux processus se contre-balaient exactement dans la limite faiblement désordonnée. Il est alors difficile d'extraire de mesures de conductance la contribution A_d qui dépend de la distance R entre les jonctions car ce ne sont que de petites corrections devant le terme de la conductance Andreev direct $I_{A/B}^0$. On constate alors que le grand intérêt de la mesure des corrélations croisées est qu'elle permet, par un ajustement judicieux des potentiels, de mesurer directement A_{CAR} ou A_{EC} .

Ceci est d'autant plus important qu'une expérience récente de mesure de conductance croisée [59] montre une légère différence entre G_{CAR} et G_{EC} qui reste à ce jour inexpliquée. En complétant ces mesures par des mesures de corrélation croisées, on pourrait extraire indépendamment G_{CAR} et G_{EC} .

Plusieurs méthodes ont été suggérées pour briser l'égalité des amplitudes CAR et EC : en utilisant des électrodes ferromagnétiques en configuration anti-parallèles à la place des électrodes normales [63], on peut diminuer l'amplitude de EC car elle met en jeu deux électrons de même spin sans affecter l'amplitude CAR. Il a aussi été proposé d'utiliser le blocage de Coulomb en insérant des points quantiques entre les jonctions pour éliminer la contribution EC [62].

Il reste une dernière étape pour achever le calcul. On peut remarquer que le pôle du cooperon P_ε (par rapport à la variable ε) est dans le demi-plan sous l'axe réel. Cela se voit en utilisant l'espace réciproque où $P_\varepsilon(\mathbf{q}) \sim 1/(-i\varepsilon + \hbar D q^2)$. On peut alors effectuer sans difficulté l'intégrale sur l'énergie de l'équation (3.60) en utilisant le théorème des résidus. On trouve [79, 81, 82] :

$$A_d = \frac{1}{4\pi \nu_S g_Q^2} \iint_{S_A, S_B} d^2\mathbf{r}_A d^2\mathbf{r}_B g_{TA}(\mathbf{r}_A) g_{TB}(\mathbf{r}_B) \text{Re} [P_{2i\Delta}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)] \quad (3.63)$$

Avec cette équation, il est maintenant possible de calculer quantitativement la corrélation croisée une fois que la géométrie de la jonction est connue.

Cas de la diffusion libre Le cooperon tel que nous l'avons définis dans l'équation (2.61) est la transformée de Fourier temporelle de la fonction de Green, au sens mathématique du terme, de l'équation différentielle de diffusion :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D \Delta_{\mathbf{r}} \right] P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \delta(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{avec} \quad P_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int dt e^{i\varepsilon t / \hbar} P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t). \quad (3.64)$$

Cette équation que l'on retrouve souvent en physique permet de décrire beaucoup de phénomènes de diffusion. Elle a notamment été utilisée par Fourier pour étudier la diffusion de la chaleur. On suppose maintenant que le supraconducteur est suffisamment grand devant l'échelle de variation caractéristique du cooperon ξ_d . On peut alors négliger les effets de bord et considérer que le

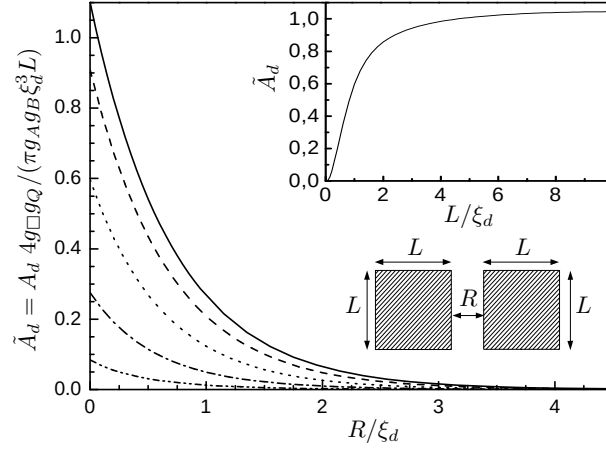


Fig. 3.6: Amplitude A_d pour deux contacts carrés normaux sur un film supraconducteur diffusif en fonction de la distance R entre les contacts. De haut en bas $L/\xi_d = \infty, 5, 2, 1, 0.5$. La courbe insérée donne la dépendance en L quand $R = 0$. La quantité $g_\square = 2e^2\nu_S Dd$ est la conductance du film supraconducteur dans l'état normal.

cooperon se propage dans un milieu infini. Il est donc invariant par translation spatiale ce qui nous permet de travailler dans l'espace réciproque $P_\varepsilon(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}^d P_\varepsilon(\mathbf{r}, 0) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$ où d est la dimension de l'espace. En utilisant l'équation (3.64), on trouve que $P_\varepsilon(\mathbf{q}) = 1/(-i\varepsilon + \hbar D q^2)$, donc à trois dimensions :

$$P_{2i\Delta}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{2\Delta + \hbar D q^2} = \frac{1}{4\pi\hbar D |\mathbf{r}|} e^{-\sqrt{2}|\mathbf{r}|/\xi_d}. \quad (3.65)$$

On voit que l'amplitude des corrélations croisées diminue exponentiellement par rapport à la distance entre les deux jonctions avec une échelle caractéristique de l'ordre de ξ_d . On a de plus calculé explicitement l'amplitude A_d dans un cas expérimentalement réalisable où le supraconducteur est un film métallique fin d'épaisseur $d \ll \xi_d$, connecté à deux électrodes normales carrées de côté L et séparées d'une distance R (cf. le dessin inséré Fig. 3.6). L'espace dans lequel se propage le cooperon est à deux dimensions. On trouve de la même façon que l'on a obtenu (3.65) que :

$$P_{2i\Delta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi\hbar D d} K_0(-\sqrt{2}|\mathbf{r}|/\xi_d), \quad (3.66)$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de second ordre. Comme on pouvait le prévoir, la dépendance est essentiellement dominée par $P_{2i\Delta}(R)$. La dépendance en fonction de la taille est plus intéressante. Pour de grandes valeurs de L/ξ_d , l'amplitude $A_d(R=0)$ pour des jonctions très voisines augmente linéairement avec L ; cela vient du fait que la contribution principale est due à de fines bandes de largeur ξ_d et de longueur L sur chaque contact. Cela peut être utilisé expérimentalement pour augmenter la valeur du signal en augmentant la taille latérale des contacts [79]. Pour de petits contacts, $L \ll \xi_d$, le contact en entier contribue avec la même valeur donnant $A_d \sim L^4 P_{2i\Delta}(R)$.

3.2 Effets d'un environnement électromagnétique

Une récente expérience de Russo *et al.* [59], où la conductance non-locale a été mesurée dans une structure multiterminale NIS semblable à celle que l'on a étudiée, montre que les amplitudes des processus CAR et EC seraient en fait légèrement différentes et que leur dépendance en voltage est non-linéaire. Or, ceci est contraire à ce que les calculs dans la limite balistique ou diffusive que l'on a présentés prédisent. Une idée pour améliorer le modèle est d'ajouter les interactions avec l'environnement électromagnétique au voisinage des jonctions qui, en général, rendent les caractéristiques $I(V)$ non-linéaires et pourraient aussi rendre le terme hors-diagonale de la matrice de conductance non nul.

Cependant, comme nous allons le voir, la conductance non-locale observée dans [59] ne peut s'expliquer par la présence d'un environnement électromagnétique car l'énergie de charge est trop petite devant la température dans cette expérience. Néanmoins, si dans l'avenir des mesures de conductance non locale ou de corrélation croisée sont faites sur des jonctions plus petites, les effets de l'environnement électromagnétique tels que nous les décrivons dans cette section doivent pouvoir être observés.

3.2.1 Modélisation de l'environnement

Une jonction tunnel se résume à deux métaux l'un en face de l'autre séparés par une fine couche d'isolant. Elle se comporte donc aussi comme un condensateur de capacité C qui peut ressentir l'environnement électromagnétique du circuit électrique auquel elle est connectée [83, 84]. Quand une charge élémentaire $-e$ traverse la jonction tunnel, le circuit extérieur doit fournir une charge additionnelle pour rétablir l'équilibre électrostatique. Ceci a un coût en énergie de l'ordre de l'énergie de charge $E_c = e^2/(2C)$. Plus les jonctions sont petites, plus l'énergie de charge est grande (la capacité C diminue quand la surface de la jonction diminue). À suffisamment basse température, il est possible d'avoir $k_B T < E_C$, les effets de charge deviennent importants. Par exemple, si l'énergie de charge est plus grande que les énergies disponibles eV et $k_B T$, les électrons ne peuvent pas traverser la jonction et la conductance est nulle, c'est ce que l'on appelle le blocage de Coulomb.

Les effets d'environnement électromagnétique sur la conductance sous le gap d'une jonction NIS ont été étudiés en détail par Hesse et Diener [85] et par Huck *et al.* [86] en incluant les effets d'interférence mésoscopiques. Le cas d'un supraconducteur connecté à deux jonctions tunnel (cf. Fig. 3.1) a été étudié par Recher et Loss [67] sans prendre en compte les interférences mésoscopiques et en s'intéressant uniquement à I_{CAR} . Nous allons étudier le terme de cotunneling élastique et la réflexion Andreev croisée en présence de faible désordre.

Pour modéliser ce type de phénomène, on utilise la théorie phénoménologique dit « $P(E)$ » dont on peut trouver une introduction claire et détaillée de Ingold et Nazarov dans [84]. Le supraconducteur étant fixé à la masse, il y a deux environnements électromagnétiques extérieurs indépendants que l'on caractérise par les deux impédances $Z_A(\omega)$ et $Z_B(\omega)$ en série entre les sources de voltage et les jonctions tunnel (cf. Fig. 3.7). Les fluctuations de chaque environnement sont modélisées par un bain d'oscillateurs harmoniques linéairement couplés avec la fluctuation $\tilde{Q}_\alpha = Q_\alpha - C_\alpha V_\alpha$ de la charge Q_α de la jonction capacitive ($\alpha = A, B$). Cette charge est induite par le transfert tunnel des électrons. On utilise donc un hamiltonien bosonique de type

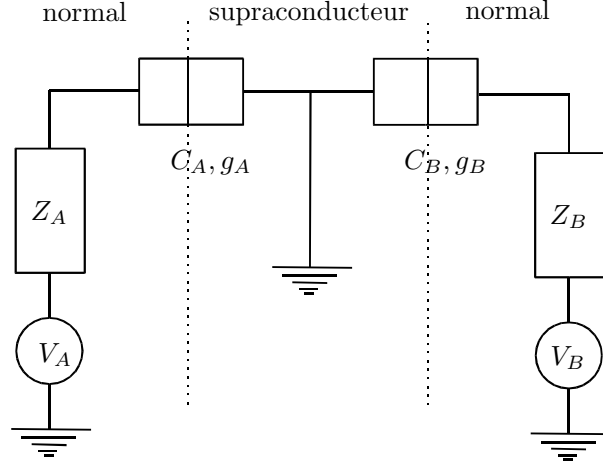


Fig. 3.7: Les jonctions tunnel NS de capacité C_α et de conductance tunnel dans l'état normal g_α ($\alpha = A, B$) sont en série avec une source de voltage V_α et une impédance extérieur Z_α .

Caldeira-Leggett [84, 87] :

$$H_{\text{env},\alpha} = \frac{\tilde{Q}_\alpha^2}{2C_\alpha} + \sum_{n=1}^N \left[\frac{q_{n,\alpha}^2}{2C_{n,\alpha}} + \left(\frac{\hbar}{e} \right)^2 \frac{1}{2L_{n,\alpha}} \left(\tilde{\psi}_\alpha - \psi_{n,\alpha} \right)^2 \right], \quad (3.67)$$

où la pulsation propre de chaque oscillateur de l'environnement est $\omega_{n,\alpha} = 1/\sqrt{L_{n,\alpha}C_{n,\alpha}}$. On considère ensuite la limite d'un nombre infini d'oscillateurs. Cela permet de simuler des effets dissipatifs dans un système à la dynamique quantique hermitienne donc a priori réversible. En effet, le temps mis par l'énergie donnée par les électrons au bain d'oscillateur pour revenir est tellement long que cette énergie semble perdue. La phase $\tilde{\psi}_\alpha$ est la variable conjuguée de $\tilde{Q}_\alpha$. Elle est reliée à la fluctuation de la différence de potentiel $U_\alpha = Q_\alpha/C_\alpha$ à travers la jonction α :

$$\tilde{\psi}_\alpha = \frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' U_\alpha(t') - \frac{e}{\hbar} V_\alpha t. \quad (3.68)$$

Ces opérateurs satisfont les relations de commutation $[\tilde{\psi}_\alpha, \tilde{Q}_\beta] = ie\delta_{\alpha,\beta}$. Ces hamiltoniens permettent de simuler n'importe quelle impédance $Z_\alpha(\omega)$ par l'intermédiaire de l'admittance Y_α qui est reliée aux grandeurs caractéristiques des bains d'oscillateurs :

$$(Z_\alpha(\omega))^{-1} = \int dt \exp(-i\omega t) Y_\alpha(t) \quad \text{avec} \quad Y_\alpha(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_{n,\alpha}} \cos\left(t/(\sqrt{L_{n,\alpha}C_{n,\alpha}})\right) \quad (3.69)$$

Le couplage entre l'environnement électromagnétique d'une jonction et les électrons qui la traversent se fait par l'intermédiaire de l'hamiltonien tunnel :

$$H_T^\alpha = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} \left[t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\alpha c_{\mathbf{k}\sigma}^{\alpha\dagger} d_{\mathbf{q}\sigma} e^{-i\tilde{\psi}} + t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\alpha*} d_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}^\alpha e^{+i\tilde{\psi}} \right]. \quad (3.70)$$

Ainsi l'environnement « voit » la charge de la jonction et la fluctuation de charge influe sur transfert tunnel des électrons.

Comme nous nous intéressons au transport de charge à des énergies inférieures au gap du supraconducteur, le durée de vie d'une quasi-particule dans le supraconducteur, qui est de l'ordre de $\hbar/\Delta \approx 10^{-12}$ s pour un gap de $200 \mu\text{eV}$, est un temps très petit devant les autres temps caractéristiques du système. On peut donc dire que quand deux électrons passent par effet tunnel dans le supraconducteur pour former une paire de Cooper, ils le font quasi-simultanément. Cela nous permet d'introduire de la façon suivante les phases $\tilde{\phi}_\alpha$ dans les opérateurs J et T de l'hamiltonien effectif (3.7) :

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} A_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\alpha\dagger} c_{\mathbf{p}\downarrow}^{\beta\dagger} e^{-i\tilde{\psi}_\alpha} e^{-i\tilde{\psi}_\beta} \quad \text{et} \quad T = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}\sigma} T_{\mathbf{k}\mathbf{p}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{A\dagger} c_{\mathbf{p}\sigma}^B e^{-i\tilde{\psi}_A} e^{i\tilde{\psi}_B}. \quad (3.71)$$

Le nouvel hamiltonien prenant en compte les interactions avec l'environnement électromagnétique s'écrit alors :

$$H_{\text{eff}} = \underbrace{H_N^A + H_N^B + H_{\text{env},A} + H_{\text{env},B}}_{\text{Partie libre}} + \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} [J_{\alpha\beta} + h.c.] + T + T^\dagger}_{\text{Partie perturbative}} \quad (3.72)$$

3.2.2 Taux de transition

Pour trouver les taux de transitions tunnel de tous les processus élémentaires, on procède de la même façon que dans le paragraphe 3.1.2. On obtient les même types de formules que les équations (3.15), à la différence près que les fonctions delta de Dirac qui prenaient en compte la conservation de l'énergie sont remplacées par de nouvelles fonctions P à cause des transferts d'énergie inélastique avec l'environnement :

$$N_{\rightleftharpoons}^{\alpha\alpha} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} |A_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{\alpha\alpha}|^2 H_{\rightleftharpoons}^{\text{And}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) P_{\rightleftharpoons}^{\alpha\alpha}(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{p}} + 2eV_\alpha), \quad (3.73a)$$

$$N_{\rightleftharpoons}^{AB} = \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} |A_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^{AB}|^2 H_{\rightleftharpoons}^{\text{And}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) P_{\rightleftharpoons}^{AB}(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{p}} + eV_A + eV_B), \quad (3.73b)$$

$$N_{\rightleftharpoons}^{EC} = \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{p}} |T_{\mathbf{k}\mathbf{p}}|^2 H_{\rightleftharpoons}^{\text{cot}}(\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{p}}) P_{\rightleftharpoons}^{EC}(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{p}} + eV_A - eV_B), \quad (3.73c)$$

avec

$$P_{\rightarrow}^{\alpha\alpha}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-itE/\hbar} \langle e^{-2i\tilde{\psi}_{\alpha}(0)} e^{2i\tilde{\psi}_{\alpha}(t)} \rangle_{\alpha} \quad (3.74a)$$

$$P_{\leftarrow}^{\alpha\alpha}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-itE/\hbar} \langle e^{2i\tilde{\psi}_{\alpha}(t)} e^{-2i\tilde{\psi}_{\alpha}(0)} \rangle_{\alpha} \quad (3.74b)$$

$$P_{\rightarrow}^{AB}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-itE/\hbar} \langle e^{-i\tilde{\psi}_A(0)} e^{i\tilde{\psi}_A(t)} \rangle_A \langle e^{-i\tilde{\psi}_B(0)} e^{i\tilde{\psi}_B(t)} \rangle_B \quad (3.74c)$$

$$P_{\leftarrow}^{AB}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-itE/\hbar} \langle e^{i\tilde{\psi}_A(t)} e^{-i\tilde{\psi}_A(0)} \rangle_A \langle e^{i\tilde{\psi}_B(t)} e^{-i\tilde{\psi}_B(0)} \rangle_B \quad (3.74d)$$

$$P_{\rightarrow}^{EC}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-itE/\hbar} \langle e^{-i\tilde{\psi}_A(0)} e^{i\tilde{\psi}_A(t)} \rangle_A \langle e^{i\tilde{\psi}_B(0)} e^{-i\tilde{\psi}_B(t)} \rangle_B \quad (3.74e)$$

$$P_{\leftarrow}^{EC}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-itE/\hbar} \langle e^{i\tilde{\psi}_A(t)} e^{-i\tilde{\psi}_A(0)} \rangle_A \langle e^{-i\tilde{\psi}_B(t)} e^{i\tilde{\psi}_B(0)} \rangle_B \quad (3.74f)$$

où $\langle \cdot \rangle_{\alpha} = \text{tr}[e^{-\beta H_{\text{env},\alpha}} \cdot] / Z_{\text{env},\alpha}$ avec $Z_{\text{env},\alpha} = \text{tr}[e^{-\beta H_{\text{env},\alpha}}]$. En l'absence d'environnement, les valeurs moyennes valent 1 et on retrouve bien les fonctions delta de Dirac. Comme l'hamiltonien de l'environnement est quadratique on peut utiliser le théorème de Wick généralisé. En le combinant avec la stationnarité des fluctuations à l'équilibre ($\langle \tilde{\psi}_{\alpha}^2(t) \rangle_{\text{env},\alpha} = \langle \tilde{\psi}_{\alpha}^2(0) \rangle_{\text{env},\alpha}$) on montre que [84] $\langle e^{ix\tilde{\psi}_{\alpha}(t)} e^{-ix\tilde{\psi}_{\alpha}(0)} \rangle_{\text{env},\alpha} = e^{x^2 J_{\alpha}(t)}$ où l'on a introduit les fonctions de corrélation de phase $J_{\alpha}(t) = \langle [\tilde{\psi}_{\alpha}(t) - \tilde{\psi}_{\alpha}(0)] \tilde{\psi}_{\alpha}(0) \rangle_{\text{env},\alpha}$. Elles sont données par

$$J_{\alpha}(t) = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{Re } Z_{t,\alpha}(\omega)}{R_Q} \left\{ \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right) [\cos(\omega t) - 1] - i \sin(\omega t) \right\} \quad (3.75)$$

où $Z_{t,\alpha} = (i\omega C_{\alpha} + Z_{\alpha}^{-1}(\omega))^{-1}$ est l'impédance totale de la branche α et $R_Q = 2/g_Q \sim 25.8 \text{ k}\Omega$ est la résistance quantique par unité de spin.

On réécrit alors les fonctions $P(E)$ de l'équation (3.74) de la façon suivante :

$$P_{\rightarrow}^{\alpha\alpha}(E) = P_{\leftarrow}^{\alpha\alpha}(-E) = P^{\alpha\alpha}(E) \quad (3.76)$$

$$P_{\rightarrow}^{AB}(E) = P_{\leftarrow}^{AB}(-E) = P_{\rightarrow}^{EC}(E) = P_{\leftarrow}^{EC}(-E) = P^{AB}(E) \quad (3.77)$$

avec

$$P^{\alpha\alpha}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp \left[4J_{\alpha}(t) + \frac{i}{\hbar} Et \right], \quad (3.78)$$

$$P^{AB}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp \left[J_A(t) + J_B(t) + \frac{i}{\hbar} Et \right]. \quad (3.79)$$

On constate donc que les environnements interviennent de la même manière pour la réflexion Andreev croisée et le cotunneling élastique. Les fonctions $P_{\alpha\alpha}(E)$ et $P_{AB}(E)$ ont des propriétés particulières :

- Elles sont réelles, car on a, à cause de la stationnarité, $J_{\alpha}(-t) = J_{\alpha}^*(t)$.
- Elles sont normées $\int dE P(E) = 1$, car $J_{\alpha}(0) = 0$.

- Elles satisfont une relation du type équilibre détaillé $P(-E) = e^{-\beta E} P(E)$, car en utilisant la permutation circulaire de la trace, on montre que $J(-t) = J(t - i\beta\hbar)$.
- Elles sont positives, cela se voit par exemple avec l'équation (3.97) que l'on utilisera dans la suite pour calculer P numériquement.

Tout cela nous amène à interpréter physiquement ces fonctions comme des probabilités d'exciter ($E > 0$) ou d'absorber ($E < 0$) des modes de l'environnement électromagnétique. À température nulle, $P(E) = 0$ pour $E < 0$, il est uniquement possible d'exciter des modes de l'environnement.

Nous allons maintenant nous consacrer à l'étude des effets de l'environnement sur la réflexion Andreev croisée et le cotunneling élastique car se sont les seuls processus qui contribuent aux corrélations croisées et à la conductance non locale $G_{AB} = \partial I_A / \partial V_B$. Pour une étude des effets de l'environnement sur la réflexion Andreev directe, nous invitons le lecteur à se reporter à l'article [86].

Pour obtenir les corrélations croisées, il nous suffit de calculer les courants élémentaires des processus CAR et EC (cf. Eq. (3.29)). Pour cela, on part des équations (3.73b), (3.73c) et (3.77). On change les sommes sur $\mathbf{k}, \mathbf{p}$ par des intégrales sur ξ_A, ξ_B en introduisant les fonctions $A^{\text{And/cot}}(\xi_A, \xi_B)$ définis par (3.34) et (3.35). On fait ensuite le changement de variable $\xi_A = -(E + \varepsilon)/2, \xi_B = -(E - \varepsilon)/2$ de jacobien $1/2$. On utilise finalement la relation d'équilibre détaillé de P_{AB} et les liens entre $H_{\leftarrow}$ et $H_{\rightarrow}$ (Eq. (3.25)). On aboutit à :

$$I_{CAR}^0 = \frac{g_Q}{2e} \int dE d\varepsilon A^{\text{And}}(-E/2 - \varepsilon/2, -E/2 + \varepsilon/2) H_{\rightarrow}^{\text{And}}(-E/2 - \varepsilon/2, -E/2 + \varepsilon/2) \times P_{AB}(eV_A + eV_B - E) [1 - \exp(-\beta(eV_A + eV_B))] , \quad (3.80)$$

$$I_{EC}^0 = \frac{g_Q}{2e} \int dE d\varepsilon A^{\text{cot}}(-E/2 - \varepsilon/2, -E/2 + \varepsilon/2) H_{\rightarrow}^{\text{cot}}(-E/2 - \varepsilon/2, -E/2 + \varepsilon/2) \times P_{AB}(eV_A - eV_B - \varepsilon) [1 - \exp(-\beta(eV_A - eV_B))] . \quad (3.81)$$

On va maintenant supposer que l'énergie caractéristique de P_{AB} , qui est de l'ordre de $\max(e^2/(2C_A), e^2/(2C_B))$ est beaucoup plus petite que le gap, on peut alors négliger la dépendance en énergie de $A^{\text{And/cot}}$ dans les équations ci-dessus, comme nous l'avons fait en l'absence d'environnement (on a toujours $(eV_A, eV_B, k_B T) \ll \Delta$) : $A^{\text{And/cot}}(-E/2 - \varepsilon/2, -E/2 + \varepsilon/2) \approx A^{\text{And/cot}}(0, 0)$. Dans ce cas, on peut effectuer dans I_{CAR}^0 (respectivement I_{EC}^0) l'intégrale sur ε (E). On trouve :

$$I_{CAR}^0 = \frac{G_{CAR}}{e} j_{\text{env}}(eV_A + eV_B), \quad I_{EC}^0 = \frac{G_{EC}}{e} j_{\text{env}}(eV_A - eV_B), \quad (3.82)$$

où la fonction j_{env} qui est donnée par :

$$j_{\text{env}}(eU) = \left(1 - e^{-\beta eU}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E}{1 - e^{-\beta E}} P_{AB}(eU - E) \quad (3.83)$$

et $G_{CAR} = g_Q A^{\text{And}}(0, 0)$, $G_{EC} = g_Q A^{\text{cot}}(0, 0)$. Hors comme nous l'avons vu dans la section précédente, les conductances G_{CAR} et G_{EC} sont égales que le transport des électrons soit balistique ou diffusif. On constate ainsi que l'unique différence entre les courants élémentaires CAR et EC vient du fait que la fonction j_{env} est évaluée à des valeurs différentes. Cette fonction ne dépend

que des environnements électromagnétiques des jonctions. On déduit de (3.82) les corrélations croisées et la conductance non-locale :

$$\begin{aligned} \frac{S_{AB}}{2eG_{CAR}} &= \left[j_{\text{env}}(V_A + V_B) \coth\left(\frac{eV_A + eV_B}{2k_B T}\right) - j_{\text{env}}(V_A - V_B) \coth\left(\frac{eV_A - eV_B}{2k_B T}\right) \right], \\ G_{AB} &= \frac{\partial I_A}{\partial V_B} = G_{CAR} \left[j'_{\text{env}}(eV_A + eV_B) - j'_{\text{env}}(eV_A - eV_B) \right]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

On constate ainsi que la présence d'un environnement électromagnétique peut expliquer une conductance croisée non-nulle, à cause des non-linéarités du courant élémentaire j_{env} qu'il engendre. Ce ne serait pas le cas en l'absence d'environnement car dans ce cas $j'_{\text{env}} = 0$. La conductance non-locale peut même changer de signe sur des échelles caractéristiques de l'ordre des énergies de charge en dehors des axes $V_A = 0$ et $V_B = 0$ où elle est nulle.

Ces effets de l'environnement ne peuvent cependant pas expliquer les résultats expérimentaux de Russo *et al.* [59]. En effet, même si l'environnement explique une dépendance en énergie de G_{AB} , les jonctions utilisées dans l'expérience ont des surfaces « grandes » ($4 \times 8 \mu\text{m}^2$), ce qui donne une énergie de charge très faible devant la température³ des mesures (1.6 K), les effets de l'environnement deviennent négligeables. Ensuite, l'environnement ne permet pas d'expliquer pourquoi ils observent le fait que EC domine CAR à faible voltage, car nous trouvons que $G_{AB}(V_A = 0, V_B \neq 0) = 0$. Pour expliquer ces différences, il faut peut-être prendre en compte les interactions électron-électron de façon locale et non globale comme on vient de le faire en utilisant la théorie de $P(E)$. C'est une piste à développer qui sort du cadre de cette thèse.

Notons tout de même : pour des jonctions plus petites, les effets de l'environnement que nous venons de décrire deviennent pertinents et doivent être pris en compte.

3.2.3 Environnements ohmiques

Pour obtenir des résultats plus quantitatifs sur la conductance non-locale ou les corrélations croisées, on doit préciser les impédances des environnements. On se place dans le cas d'environnement purement ohmiques : $Z_\alpha(\omega) = R_\alpha$. La conductance non-locale dépend uniquement de j_{env} (Eq. (3.83)) qui dépend de la probabilité P_{AB} . À température nulle, cette relation devient simplement :

$$j_{\text{env}}(eU) = \int_0^{eU} dE (eU - E) P_{AB}(E). \quad (3.85)$$

En partant de la définition (Eq. (3.79)) de P_{AB} , on remarque qu'elle est le produit de convolution des probabilités d'émission et d'absorption de chaque environnement :

$$P_{AB}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE' P_A(E') P_B(E - E') \quad (3.86)$$

avec $P_\alpha(E) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dt \exp(iEt/\hbar + J_\alpha(t))$. Ces fonctions ont été étudiées en détail dans la littérature [84].

³Une jonction tunnel de surface $0.1 \times 0.1 \mu\text{m}^2$ faite d'une couche d'oxyde de $10 \text{ \AA}$ a une énergie de charge qui correspond à environ 1 K.

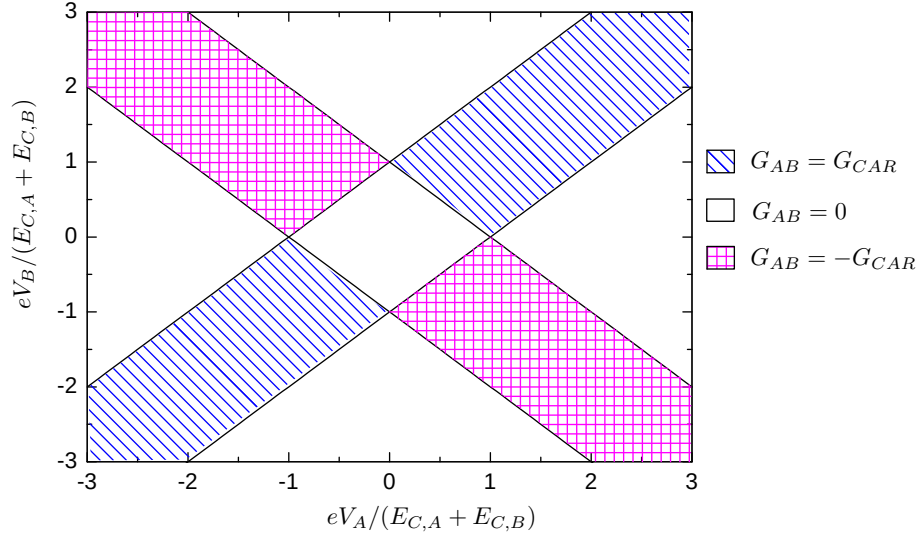


Fig. 3.8: Conductance non locale à température nulle dans le plan (V_A, V_B) dans la limite où les deux environnements ont de très grande impédance. Elle n'a que trois valeurs distinctes : $\pm G_{CAR}, 0$.

Faible impédance

Supposons qu'une des deux impédances soit faible devant la résistance quantique, par exemple $R_A \ll g_Q^{-1}$. Dans ce cas, $J_A = 0$ et $P_A(E) = \delta(E)$. Donc $P_{AB}(E) = P_B(E)$, cela revient à négliger les effets de l'environnement de la jonction A , seuls ceux de la jonction B comptent. Si les deux impédances sont faibles devant la résistance quantique g_Q^{-1} alors $P_{AB}(E) = \delta(E)$, les effets de l'environnement sont négligeables et la conductance non-locale est toujours nulle.

Forte impédance

Supposons maintenant qu'une des deux impédances est forte devant la résistance quantique, par exemple $R_A \gg g_Q^{-1}$. Dans la limite où $k_B T \ll E_{c,A} = e^2 / (2C_A)$, on montre que $P_A(E) = \delta(E - E_{c,A})$, on est dans le régime de fort blocage de Coulomb pour la jonction A . Alors $P_{AB}(E) = P_B(E - E_{c,A})$, ce sont les modes de l'environnement de la jonction B d'énergie supérieures à $E_{c,A}$ qui contribuent.

Quand les deux impédances sont grandes devant la résistance quantique on a $P_{AB}(E) = \delta(E - E_{c,A} - E_{c,B})$ à température nulle, ainsi :

$$j_{\text{env}}(eU) = (|eU| - E_{c,A} - E_{c,B}) \Theta(eU - E_{c,A} - E_{c,B}). \quad (3.87)$$

Il y a donc de régions du plan (V_A, V_B) où la conductance non locale est non nulle :

- quand $V_A = V_B > (E_{c,A} + E_{c,B})/2$, la conductance non-locale est positive,
- quand $V_A = -V_B > (E_{c,A} + E_{c,B})/2$, la conductance non-locale est négative.

Ces résultats sont résumés dans la figure 3.8 où nous avons tracé G_{AB} dans le plan (V_A, V_B) .

Cas général

On se place maintenant dans le cas où les impédances des électrodes sont quelconques. On suppose aussi que la température est nulle. La somme des deux fonctions de corrélation de phase (3.75) devient

$$J_{AB}(t) = J_A(t) + J_B(t) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{Re } Z_T(\omega)}{R_Q} (e^{-i\omega t} - 1), \quad (3.88)$$

$$\text{avec } \frac{\text{Re } Z_T(\omega)}{R_Q} = \frac{\text{Re } Z_{t,A}(\omega)}{R_Q} + \frac{\text{Re } Z_{t,B}(\omega)}{R_Q} = \frac{1}{g_A} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_A)^2} + \frac{1}{g_B} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_B)^2}, \quad (3.89)$$

où $g_\alpha = R_Q/R_\alpha$ est la conductance adimensionnée de l'environnement α et $\omega_\alpha = 1/(R_\alpha C_\alpha) = g_\alpha E_{c,\alpha}/(\pi\hbar)$ est l'inverse du temps de décharge classique d'un condensateur en série avec une résistance. Elle correspond à une fréquence de coupure de l'impédance totale provenant du comportement capacitif d'une jonction. En calculant la transformée de Fourier de l'exponentielle de cette fonction on obtient la probabilité P_{AB} puis $j_{\text{env}}(eU)$ qui est directement lié aux courants élémentaires de la réflexion Andreev croisée et du cotunneling. On peut obtenir analytiquement cette fonction dans la limite des petites ou grandes énergies. Pour des énergies intermédiaires, on doit procéder numériquement.

Pour obtenir le comportement de j_{env} à basse énergie, on voit que d'après (3.85), il suffit de connaître $P_{AB}(E)$ au voisinage de $E = 0^+$. Or à température nulle, le produit de convolution (3.86) donnant P_{AB} se réduit à :

$$P_{AB}(E) = \int_0^E dE' P_A(E') P_B(E - E'). \quad (3.90)$$

Il suffit donc d'utiliser la limite à basse énergie de fonctions P_α pour obtenir P_{AB} . Elles sont donnée par [88] :

$$P_\alpha(E) = \frac{\exp(-2\gamma/g_\alpha)}{\Gamma(2/g_\alpha)} \frac{1}{E} \left[\frac{\pi}{g_\alpha} \frac{E}{E_{c,\alpha}} \right]^{2/g_\alpha} \quad (3.91)$$

où $\gamma \simeq 0.577$ est la constante d'Euler. On substitue cela dans (3.90) et on obtient :

$$P_\alpha(E) = \Theta(E) \frac{\exp(-2\gamma/g_{AB})}{\Gamma(2/g_{AB})} \frac{1}{E} \left[\frac{\pi}{g_A} \frac{E}{E_{c,B}} \right]^{2/g_B} \left[\frac{\pi}{g_B} \frac{E}{E_{c,B}} \right]^{2/g_B}, \quad (3.92)$$

où on a posé $g_{AB} = (g_A^{-1} + g_B^{-1})^{-1}$. C'est la conductance adimensionnée des deux résistances R_A et R_B en série. Finalement, en utilisant (3.85) on en déduit la fonction $j_{\text{env}}(eU)$ à faible énergie :

$$j_{\text{env}}(eU) = \frac{\exp(-2\gamma/g_{AB})}{\Gamma(2 + 2/g_{AB})} eU \left[\frac{\pi e|U|}{(g_A E_{c,A})^{g_{AB}/g_A} (g_B E_{c,B})^{g_{AB}/g_B}} \right]^{2/g_{AB}}. \quad (3.93)$$

Cela donne une anomalie à potentiel nul de la conductance des courants élémentaires $dj_{\text{env}}/dV \sim V^{2/g_{AB}}$. Ainsi, au voisinage de $(0,0)$ dans le plan (V_A, V_B) la conductance non-locale est non

nulle uniquement sur les axes $V_A = 0$ et $V_B = 0$, elle est positive dans les quart de plan ($V_A > 0, V_B > 0$) et ($V_A < 0, V_B < 0$), elle est négative dans les quarts de plan ($V_A > 0, V_B < 0$) et ($V_A < 0, V_B > 0$).

Passons maintenant à la limite haute énergie de j_{env} . Comme $P_{AB}(E)$ est nul pour des énergies négatives, on peut étendre le domaine d'intégration de (3.85) sur $\mathbb{R}$:

$$j_{\text{env}}(eU) = \int_{-\infty}^{+\infty} dE (eU - E) P_{AB}(E). \quad (3.94)$$

Le premier terme de l'intégrale donne simplement eU à cause de la normalisation de P_{AB} . Pour obtenir le second terme, on calcule la dérivée de $\exp(J_{AB}(t)) = \int dE e^{iEt/\hbar} P_{AB}(E)$ à $t = 0$. On trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE E P_{AB}(E) = i\hbar J'_{AB}(0) = E_{c,A} + E_{c,B}. \quad (3.95)$$

Ainsi, dans la limite où la différence de potentiel eU est grande :

$$j_{\text{env}}(eU) = eU - (E_{c,A} + E_{c,B}). \quad (3.96)$$

La pente est la même qu'en absence d'environnement. Il y a de plus un décalage de $e^2/(2C_A) + e^2/(2C_B)$ provenant du gap de Coulomb.

Pour des différences de potentiel intermédiaires, on est obligé de procéder numériquement. Pour cela on utilise une méthode proposée par Ingold et Nazarov dans [84]. À température nulle, la fonction $P_{AB}(E)$ satisfait l'équation intégrale suivante :

$$EP_{AB}(E) = 2 \int_0^E dE' \frac{\text{Re}[Z_T(E - E')/\hbar]}{R_Q} P_{AB}(E'). \quad (3.97)$$

On part d'une valeur quelconque de $P_{AB}(0)$ puis avec l'équation (3.97) on calcule les valeurs suivantes de $P_{AB}(dE)$ par récurrence. Il faut ensuite normaliser la fonction obtenue. Cette méthode va nous permettre de calculer la conductance non-locale, car une fois que P_{AB} est connue, on a simplement :

$$j'_{\text{env}}(eU) = \int_0^{e|U|} dE P_{AB}(E) \quad \text{donc} \quad G_{AB} = G_{CAR} \int_{e|V_A - V_B|}^{e|V_A + V_B|} dE P_{AB}(E). \quad (3.98)$$

Pour illustrer la levée de dégénérescence de la conductance non-locale, nous avons tracé le contour G_{AB} dans le plan (V_A, V_B) (cf. Fig. 3.9) ainsi que G_{AB} en fonction de V_B pour différentes valeurs de V_A (cf. Fig. 3.10).

Nous avons pris des énergies de charge telles que $E_{c,A} = E_{c,B}$ ce qui revient à considérer que les deux jonctions ont des capacités égales ou des formes géométriques similaires. On a aussi choisi des environnements de résistances différentes. On constate ainsi que la conductance non-locale peut être positive ou négative selon la valeur des potentiels. Et dans le quart de plan ($V_A > 0, V_B > 0$), on voit que $G_{AB}(V_B)$ admet un maximum qui, quand on augmente V_A , se transforme en plateau de hauteur G_{CAR} centré en $V_B = V_A$.

Ainsi, nous avons pu montrer que la présence d'un environnement électromagnétique produit une conductance non-locale non nulle dans les jonctions tunnel métal normal - supraconducteur.

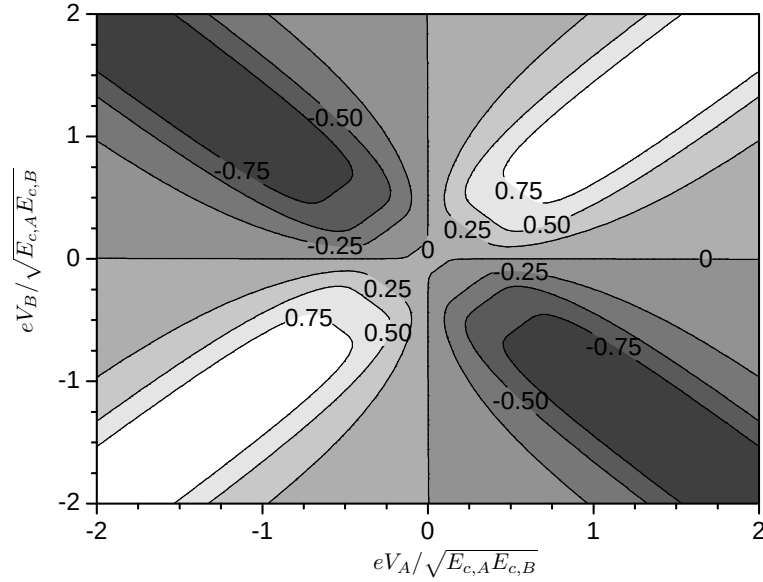


Fig. 3.9: Représentation en contour de la conductance non-locale G_{AB}/G_{CAR} dans le plan (V_A, V_B) pour des énergies de charge finies. On a fixé $E_{c,A} = E_{c,B}$, $g_A = 0.2$, $g_B = 5$ et $T = 0$.

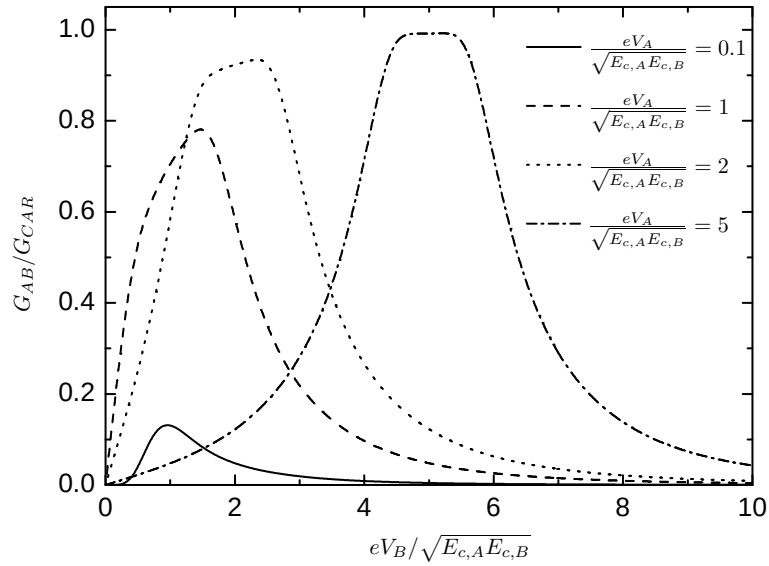


Fig. 3.10: Conductance non locale G_{AB} en fonction de eV_B pour différentes valeurs du potentiel V_A pour des énergies de charge finies. On a fixé $E_{c,A} = E_{c,B}$, $g_A = 0.2$, $g_B = 5$ et $T = 0$.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons calculé la corrélation croisée courant - courant dans une structure hybride multiterminale supraconducteur constituée d'une électrode supraconductrice connectée à deux électrodes normales. Nous avons montré que l'on pouvait sonder séparément deux mécanismes de transport non-local, la réflexion Andreev croisée et le cotunneling élastique, uniquement en modifiant les différences de potentiel entre les électrodes. Nous avons ensuite calculé l'amplitude de cet effet dans une structure réaliste et nous avons montré qu'ils peuvent être mesurés dans des structures diffusives pourvu que la distance entre les électrodes normales soit inférieure ou de l'ordre de la longueur de cohérence dans le supraconducteur.

Aux vues de récentes mesures du doublement du bruit de grenaille dans une jonction tunnel métal normal - supraconducteur [15], nous pensons que la mesure des corrélations croisées dans une telle structure est possible avec la technologie actuelle. Cela permettrait de compléter de récentes mesures de conductance croisée [59] où il a été observé une amplitude de cotunneling élastique plus grande que celle de la réflexion Andreev, ce qui reste encore inexpliqué.

Nous avons aussi calculé la statistique complète du courant permettant d'obtenir l'ensemble des corrélateurs courant - courant. Nous avons finalement étudié l'effet d'un environnement électromagnétique sur le transport de charge dans cette structure et nous avons montré que cela peut expliquer une conductance croisée non nulle à énergie finie.

Chapitre 4

Supraconducteurs mésoscopiques diffusifs

Introduction

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés au transport de charge à travers des jonctions tunnel où la probabilité qu'un électron traverse la barrière est très faible. On a ainsi vu dans le chapitre 2 que pour une jonction tunnel entre un métal normal et un supraconducteur il existe une relation universelle de type fluctuation - dissipation (2.42) entre le courant et le bruit à voltage et température finis en présence de désordre. On est ensuite amené à se demander comment cette relation est modifiée si la barrière n'est pas tunnel et que le désordre est toujours présent. Pour répondre à cette question, on ne peut pas utiliser des calculs perturbatifs comme dans les chapitres 2 et 3, l'amplitude tunnel n'étant plus un petit paramètre. Dans ce chapitre, nous allons donc utiliser des techniques quasi-classiques pour décrire les phénomènes de transport dans les conducteurs hybrides supraconducteurs diffusifs. Ces méthodes ont été introduites par Eilenberger [89] et Larkin et Ovchinnikov [90]. Elles sont très utilisées pour décrire le transport de charge dans les structures hybrides diffusives car elles permettent de garder uniquement les degrés de liberté pertinents. Il existe plusieurs articles de revue décrivant ces méthodes [91–94] auxquelles le lecteur peut se reporter pour obtenir plus de détails.

Nous allons procéder de la façon suivante : dans un premier temps nous introduirons l'hamiltonien qui décrit la dynamique des électrons, puis l'équation de Dyson associée aux fonctions de Green. Dans la limite quasi-classique, on en déduira l'équation d'Eilenberger [89] qui dans la limite diffusive donne l'équation d'Usadel [95]. Nous utiliserons ce résultat dans le chapitre suivant pour décrire le transport de charge dans une double barrière N-N'-S où les transparences sont quelconques.

4.1 Modélisation

Pour décrire un supraconducteur de type s , nous partons de l'hamiltonien champ moyen BCS qui a la forme suivante (on pose $\hbar = k_B = 1$ dans tout ce chapitre) :

$$H_{\text{BCS}} = \int d^3\mathbf{r} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[\frac{-\nabla^2}{2m} - \mu \right] \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

où les opérateurs de champ $\psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r})$ et $\psi_{\sigma}(\mathbf{r})$ créent et détruisent des électrons de spin σ à la position $\mathbf{r}$. Ils satisfont les relations d'anticommutation usuelles pour des opérateurs fermioniques :

$$\{\psi_{\sigma_1}(\mathbf{r}), \psi_{\sigma_2}^{\dagger}(\mathbf{r}')\} = \delta_{\sigma_1\sigma_2} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4.2)$$

$$\{\psi_{\sigma_1}(\mathbf{r}), \psi_{\sigma_2}(\mathbf{r}')\} = \{\psi_{\sigma_1}^{\dagger}(\mathbf{r}), \psi_{\sigma_2}^{\dagger}(\mathbf{r}')\} = 0. \quad (4.3)$$

Le potentiel de paire $\Delta(\mathbf{r})$ est déterminé de façon auto-consistante $\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle$, λ étant le potentiel d'appariement attractif des électrons qui provient d'une interaction effective des électrons via les phonons du réseau cristallin. Dans un métal normal, ce potentiel d'appariement est nul, donc $\Delta = 0$. Mais si ce métal est à proximité d'un supraconducteur, les corrélations supraconductrices $\langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle$ peuvent être non-nulles bien que le potentiel de paire soit lui strictement nul. C'est ce que l'on appelle l'effet de proximité. Il influence beaucoup les propriétés de transport dans les systèmes hybrides. On introduit à ce stade la notation compacte de Nambu-Gorkov. On utilise un nouveau opérateur de champ Ψ , combinaison de deux opérateurs de champs à un électron :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

L'hamiltonien BCS peut ainsi s'écrire de façon plus compacte :

$$H_{\text{BCS}} = \int d^3\mathbf{r} \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} -\frac{\nabla^2}{2m} - \mu & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \Psi(\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

L'opérateur de champ Ψ est l'opérateur de champs naturel pour l'hamiltonien BCS.

4.1.1 Modélisation du désordre

Dans les métaux, il y a généralement des impuretés comme par exemple des défauts dans le réseau cristallin sur lesquelles les électrons diffusent. Ces impuretés sont a priori disposées aléatoirement. Pour prendre en compte ce phénomène, on ajoute à l'hamiltonien BCS le terme suivant :

$$H_{\text{imp}} = \sum_{\sigma} \int d^3\mathbf{r} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) V_{\text{imp}}(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

où $V_{\text{imp}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_i} v(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ correspond à N_i impuretés identiques localisées en $\mathbf{r}_i$ distribuées uniformément. C'est le modèle d'Edwards [96]. Il faut ensuite prendre la limite thermodynamique, où le volume Ω du métal tend vers l'infini tout en gardant la concentration en impuretés $n_i = N_i/\Omega$ constante.

$$H = H_{\text{BCS}} + H_{\text{imp}}. \quad (4.7)$$

Les impuretés seront par la suite traitées perturbativement.

4.1.2 Fonctions de Green

Maintenant que l'hamiltonien est spécifié, nous allons utiliser des méthodes de calcul basées sur les fonctions de Green. C'est un outil très puissant pour les problèmes à N corps et une fois les fonctions de Green connues, on pourra en déduire les propriétés de transport de charge.

Dans le cas qui nous intéresse, les fonctions de Green sont des matrices 4×4 , résultant du produit tensoriel de matrices 2×2 dans l'espace de Keldysh, noté $(\bar{\cdot})$ et de matrices 2×2 de l'espace de Nambu noté $(\cdot)$. Les éléments de l'espace produit seront notés $(\bar{\cdot})$. Nous utilisons l'espace de Keldysh [97] car nous voulons décrire des phénomènes de transport hors-équilibre où notamment la différence de potentiel à travers l'échantillon est non nulle. Quelques détails sur cette approche sont donnés dans l'annexe A. L'espace de Nambu apparaît à cause de la supraconductivité, car comme on vient de le voir, l'opérateur de champ naturel est la composition de deux opérateurs de champ électroniques.

On utilise les conventions usuelles, la fonction de Green est donnée par :

$$\check{G}(1, 2) = \begin{pmatrix} \hat{G}_R(1, 2) & \hat{G}_K(1, 2) \\ 0 & \hat{G}_A(1, 2) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

où $\hat{G}_R$, $\hat{G}_A$ et $\hat{G}_K$ sont les fonctions de Green retardée, avancée et Keldysh dans l'espace de Nambu. Elles sont données par

$$\hat{G}_R(1, 2) = \theta(t_1 - t_2) \left(\hat{G}^>(1, 2) - \hat{G}^<(1, 2) \right) \quad (4.9a)$$

$$\hat{G}_A(1, 2) = -\theta(t_2 - t_1) \left(\hat{G}^>(1, 2) - \hat{G}^<(1, 2) \right) \quad (4.9b)$$

$$\hat{G}_K(1, 2) = \hat{G}^>(1, 2) + \hat{G}^<(1, 2) \quad (4.9c)$$

avec

$$\hat{G}^>(1, 2) = -i \begin{pmatrix} \langle \psi_\uparrow(1) \psi_\uparrow^\dagger(2) \rangle & \langle \psi_\uparrow(1) \psi_\downarrow(2) \rangle \\ -\langle \psi_\downarrow^\dagger(1) \psi_\uparrow^\dagger(2) \rangle & -\langle \psi_\downarrow^\dagger(1) \psi_\downarrow^\dagger(2) \rangle \end{pmatrix} \quad (4.10a)$$

$$\hat{G}^<(1, 2) = i \begin{pmatrix} \langle \psi_\uparrow^\dagger(2) \psi_\uparrow(1) \rangle & \langle \psi_\downarrow(2) \psi_\uparrow(1) \rangle \\ -\langle \psi_\uparrow^\dagger(2) \psi_\downarrow(1) \rangle & -\langle \psi_\downarrow(2) \psi_\downarrow^\dagger(1) \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.10b)$$

On a utilisé dans ces expressions la notation compacte $1 \equiv (t_1, \mathbf{r}_1)$ et $2 \equiv (t_2, \mathbf{r}_2)$ où $\langle \dots \rangle = \text{tr} [e^{-\beta H} \dots] / [e^{-\beta H}]$ désigne la moyenne statistique quantique. On définit de la même façon la fonction de Green libre $\check{G}_0$ dont l'évolution des opérateurs de champ ainsi que la moyenne statistique se fait avec H_{BCS} .

On va maintenant chercher l'équation d'évolution des fonctions de Green. Pour cela, on utilise le fait que les opérateurs de champ évoluent avec l'équation d'Heisenberg :

$$i \frac{d\psi}{dt} = [\psi, H]. \quad (4.11)$$

On commence par la fonction de Green libre, en absence d'impuretés on obtient :

$$\check{G}_0^{-1}(1) \check{G}_0(1, 2) = \mathbb{1} \delta(1 - 2) \quad (4.12)$$

avec

$$\check{G}_0^{-1}(1) = i\check{\tau}_3 \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} + \mu + \check{\Delta} \quad (4.13)$$

et

$$\check{\tau}_3 = \hat{\tau}_3 \otimes \bar{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_3 & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\check{\Delta} = \begin{pmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & \hat{\Delta} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

où $\hat{\tau}_i, \hat{\sigma}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli. La fonction de Green libre satisfait aussi une équation d'évolution conjuguée de la précédente :

$$\check{G}_0(1, 2) \check{\check{G}}_0^{-1}(2) = \mathbb{1} \delta(1 - 2) \quad (4.16)$$

avec

$$\check{\check{G}}_0^{-1}(2) = -i\check{\tau}_3 \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\nabla_2^2}{2m} + \mu + \check{\Delta}. \quad (4.17)$$

où cette fois les dérivées agissent à gauche sur les coordonnées indicées 2 de $\check{G}_0(1, 2)$.

Passons maintenant au calcul de la fonction de Green en présence d'impuretés. Pour le moment, on n'effectue pas la moyenne sur les différentes configurations du désordre. On calcule la fonction de Green perturbativement et on présente le résultat sous la forme compacte usuelle

$$\check{G}(1, 2) = \check{G}_0(1, 2) + \int d3 d4 \check{G}_0(1, 3) \check{V}(3, 4) \check{G}(4, 2) \quad (4.18a)$$

$$\check{G}(1, 2) = \check{G}_0(1, 2) + \int d3 d4 \check{G}(1, 3) \check{V}(3, 4) \check{G}_0(4, 2) \quad (4.18b)$$

où $\check{V}(1, 2) = \mathbb{1} V_{\text{imp}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$. Les intégrales se font sur les coordonnées spatiales et temporelles. On applique ensuite $\check{G}_0^{-1}(1)$ à gauche de (4.18a), ce qui nous permet d'obtenir l'équation de Dyson :

$$\check{G}_0^{-1}(1) \check{G}(1, 2) = \mathbb{1} \delta(1 - 2) + \int d3 \check{V}(1, 3) \check{G}(3, 2). \quad (4.19)$$

L'équation de Dyson conjuguée est obtenue en appliquant $\check{\check{G}}_0^{-1}(2)$ à droite de (4.18b) :

$$\check{G}(1, 2) \check{\check{G}}_0^{-1}(2) = \mathbb{1} \delta(1 - 2) + \int d3 \check{G}(1, 3) \check{V}(3, 2). \quad (4.20)$$

L'étape suivante est de faire la différence entre ces deux équations ce qui élimine le terme non-homogène en delta de Dirac. Nous verrons par la suite en quoi ceci est important pour l'approximation quasi-classique. On obtient finalement :

$$\check{G}_0^{-1}(1) \check{G}(1, 2) - \check{G}(1, 2) \check{\check{G}}_0^{-1}(2) = \int d3 [\check{V}(1, 3) \check{G}(3, 2) - \check{G}(1, 3) \check{V}(3, 2)]. \quad (4.21)$$

Le second membre de cette équation est ce que l'on appelle l'intégrale de collision. Cette équation va être le point de départ de l'approximation quasi-classique.

Le courant électrique L'utilité des fonctions de Green vient du fait que l'on connaît des méthodes systématiques pour les calculer et que l'on sait les relier aux quantités physiques mesurables. Prenons l'exemple du courant électrique qui va nous servir par la suite. L'opérateur densité de courant est donné par :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\frac{e}{2im} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \left[\nabla \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \psi_{\sigma}(\mathbf{x}) - \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x}) \nabla \psi_{\sigma}(\mathbf{x}) \right] \quad (4.22)$$

On remarque alors à l'aide des définitions (4.10) des fonctions de Green que la valeur moyenne de l'opérateur densité est :

$$\langle \mathbf{J} \rangle(\mathbf{x}_1) = -\frac{e}{2m} \lim_{2 \rightarrow 1} \left[(\nabla_1 - \nabla_2) \text{tr} \left(\hat{\tau}_3 \hat{G}^{<}(\mathbf{x}_1, t, \mathbf{x}_2, t) \right) \right] . \quad (4.23)$$

Mais on a aussi $\hat{G}^{<} = (\hat{G}_K + \hat{G}_A - \hat{G}_R)/2$, or $\hat{G}_A - \hat{G}_R$ est proportionnel à la densité spectrale qui ne dépend que des propriétés à l'équilibre du système. Ce terme ne contribue donc pas au courant hors-équilibre. On va donc retirer ce terme de l'expression de la densité de courant, qui devient :

$$\langle \mathbf{J} \rangle(\mathbf{x}_1) = -\frac{e}{4m} \lim_{2 \rightarrow 1} \left[(\nabla_1 - \nabla_2) \text{tr} \left(\check{\tau}_K \check{G}(\mathbf{x}_1, t, \mathbf{x}_2, t) \right) \right] . \quad (4.24)$$

où $\check{\tau}_K = \hat{\tau}_3 \bar{\sigma}_1$, les matrices $\bar{\sigma}_i, \hat{\tau}_{j(i,j=1,2,3)}$ sont les matrices de Pauli dans l'espace de Keldysh ($\bar{\cdot}$) - Nambu ($\hat{\cdot}$). On constate ainsi que connaissant la fonction de Green on peut en déduire le courant.

4.2 Approximation quasi-classique

4.2.1 Représentation de Wigner

La fonction de Green $\check{G}(1,2)$ oscille par rapport à la variable $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ sur une échelle de longueur caractéristique de l'ordre de la longueur d'onde de Fermi λ_F . C'est une échelle très petite comparée à la taille typique d'un échantillon mésoscopique. On s'intéresse donc surtout aux variations de la fonction de Green sur des échelles plus grandes que λ_F . On fait alors un changement de variables spatiales en introduisant la coordonnée du centre de masse $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ et la coordonnée relative $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \mathbf{r}/2 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \mathbf{r}/2 \end{cases} \quad (4.25)$$

Pour les variables temporelles, on effectue le même type de changement de variables :

$$\begin{cases} t_1 &= T + t/2 \\ t_2 &= T - t/2 \end{cases} \quad (4.26)$$

Cependant, on s'intéresse surtout aux phénomènes de transport stationnaire. La fonction de Green dépend alors en pratique uniquement de la variable temporelle relative t . Par la suite, nous ignorerons donc la dépendance en T .

On effectue ensuite la transformée de Fourier de la fonction de Green par rapport aux deux variables $\mathbf{r}$ et t :

$$\check{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, E) = \int d^3\mathbf{r} dt e^{iEt} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \check{G}(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2, t/2; \mathbf{R} - \mathbf{r}/2, -t/2). \quad (4.27)$$

La nouvelle fonction de Green $\check{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, E)$ est la *transformée de Wigner* de $\check{G}$. Cette fonction est très piquée au niveau de l'énergie de Fermi $\mu = p_F^2/(2m)$. De plus l'énergie de Fermi est de loin l'échelle d'énergie la plus grande, même devant le gap supraconducteur Δ . On aura donc toujours des variations d'énergie $\delta\xi_p \ll \mu$ donc des variations d'impulsion $\delta p \ll p_F$. On peut donc en pratique fixer le module de l'impulsion à p_F dans tous les pré-facteurs de la fonction de Green. Seul ce qui se passe au voisinage de la surface de Fermi compte.

4.2.2 Moyenne sur les différentes configuration du désordre

Avant de poursuivre et d'arriver réellement à l'approximation quasi-classique, nous allons nous intéresser à la contribution des impuretés dans l'énergie propre. On va voir qu'elle fait intervenir la représentation de Wigner de la fonction de Green.

On a considéré avec l'hamiltonien H_{imp} des impuretés statiques non magnétiques. Il nous faut alors moyenner sur les différentes configurations du désordre les équations de Dyson (4.19) et (4.20). La méthode a été développée par Abrikosov et Gorkov [98], on peut en trouver une explication détaillée dans [93]. On part de l'équation (4.28), la moyenne sur le désordre du terme de gauche est trivial, $\check{G}$ étant dorénavant la fonction de Green moyennée sur le désordre. Le terme de droite de (4.21) est un peu plus compliqué à moyenner sur le désordre. Il faut développer $\check{G}$ ordre par ordre en V_{imp} à l'aide des équations de Dyson (4.18a) et (4.18b) puis moyenner cette série perturbative sur les différentes réalisations du désordre. À l'ordre le plus bas en $1/(k_F l)$, on obtient dans le cadre de l'approximation de Born auto-consistante

$$\check{G}_0^{-1}(1)\check{G}(1,2) - \check{G}(1,2)\check{G}_0^{-1}(2) = \int d3 [\check{\Sigma}_{\text{imp}}(1,3)\check{G}(3,2) - \check{G}(1,3)\check{\Sigma}_{\text{imp}}(3,2)] . \quad (4.28)$$

$\check{\Sigma}_{\text{imp}}$ est l'énergie-propre, « self energy » en anglais, qui est donnée en représentation de Wigner par

$$\check{\Sigma}_{\text{imp}}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, E) = n_i \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} |v(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|^2 \check{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}_1, E), \quad (4.29)$$

elle correspond au diagramme de la figure 4.1. Maintenant, la fonction de Green $\check{G}$ dans l'équation (4.28) est celle moyennée sur le désordre.

Comme on en a fait la remarque précédemment, les deux vecteurs d'onde de (4.29) sont sur la surface de Fermi, donc $v(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)$ ne dépend en fait que de l'angle θ entre $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}$. De plus, comme on suppose que la diffusion des impuretés est isotrope, on a $v(\theta) = v_0 = \text{cst}$. On utilise de plus le changement de variable :

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \rightarrow \nu_0 \int \frac{d^2\Omega_{\mathbf{p}_1}}{4\pi} \int d\xi_{p_1}, \quad (4.30)$$

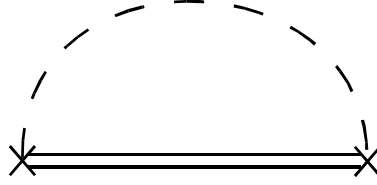


Fig. 4.1: Représentation graphique de l'énergie propre $\check{\Sigma}_{\text{imp}}$. La double ligne représente la fonction de Green complète, la ligne en pointillés les impuretés.

où $\xi_p = p^2/(2m) - \mu$, $d^2\Omega_{\mathbf{p}_1}$ est l'angle solide élémentaire et ν_0 est la densité d'états par unité de spin. On obtient ainsi

$$\check{\Sigma}_{\text{imp}}(\mathbf{R}, E) = \frac{1}{2\pi\tau_i} \int \frac{d^2\Omega_{\mathbf{p}_1}}{4\pi} \int d\xi_{p_1} \check{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}_1, E), \quad (4.31)$$

où $\tau_i^{-1} = 2\pi n_i \nu_0 |v_0|^2$ est le temps entre deux diffusions élastiques. L'énergie propre fait donc intervenir la fonction de Green intégrée sur l'énergie et moyennée sur les directions de $\mathbf{p}_F$.

4.2.3 L'approximation quasi-classique

Comme nous l'avons déjà remarqué, l'échelle caractéristique de variation de la variable relative $\mathbf{r}$ est beaucoup plus petite que l'échelle de variation du centre de masse $\mathbf{R}$. On peut donc écrire que $|\nabla_{\mathbf{R}} \check{G}| \ll p_F$. La première étape de l'approximation quasi-classique va donc être de développer la différence des équations de Dyson (4.28) à l'ordre le plus bas en fonction du petit paramètre $\lambda_F |\nabla_{\mathbf{R}} \check{G}|$.

Commençons par le terme de gauche de (4.28). On exprime d'abord les opérateurs Laplacien $\nabla_{1,2}^2$ présents dans $\check{G}_0^{-1}$ et $\check{\check{G}}_0^{-1}(2)$ en fonction des nouvelles variables $\mathbf{R}$ et $\mathbf{p}$:

$$\frac{\nabla_{1,2}^2}{2m} = \frac{\nabla_{\mathbf{R}}^2}{8m} \pm i \frac{\mathbf{p}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}}}{2m} - \frac{p_F^2}{2m} \approx \pm i \frac{\mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}}}{2} - \frac{p_F^2}{2m}, \quad (4.32)$$

où pour la seconde égalité, nous avons utilisé le critère quasi-classique. On obtient ainsi :

$$\left[\check{G}_0^{-1}(1) \check{G}(1, 2) - \check{G}(1, 2) \check{\check{G}}_0^{-1}(2) \right] \Big|_{\mathbf{R}, \mathbf{p}, E} = [E\check{\tau}_3 + \check{\Delta}, \check{G}] + i\mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \check{G}. \quad (4.33)$$

Il nous reste maintenant à calculer l'intégrale de collision avec comme énergie propre (4.31). Pour ce faire, on utilise le développement en gradient du produit de convolution de deux fonctions $\check{A}$ et $\check{B}$:

$$\int d3 \check{A}(1, 3) \check{B}(3, 2) \Big|_{\mathbf{R}, \mathbf{p}, E} = \exp \left[\frac{i}{2} (\nabla_{\mathbf{R}}^A \cdot \nabla_{\mathbf{p}}^B - \nabla_{\mathbf{p}}^A \cdot \nabla_{\mathbf{R}}^B) \right] \check{A}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, E) \check{B}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, E) \quad (4.34)$$

où ∇^A agit uniquement sur $\check{A}$. Dans la limite quasi-classique, on garde uniquement le premier terme de ce développement, soit $\check{A}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, E) \check{B}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, E)$. La différence des équation de Dyson (4.28) devient alors :

$$[E\check{\tau}_3 + \check{\Delta}, \check{G}] + i\mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \check{G} - [\check{\Sigma}_{\text{imp}}, \check{G}] = 0. \quad (4.35)$$

On peut alors passer à la seconde étape en introduisant la fonction de Green quasi-classique $\check{g}$:

$$\check{g}(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{p}}_F, E) = \frac{i}{\pi} \int d\xi_p \check{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, E) \quad (4.36)$$

Elle dépend uniquement de la direction $\hat{\mathbf{p}}_F$ de l'impulsion à l'énergie de Fermi. Il faut faire un peu attention au domaine d'intégration de (4.36), sinon l'intégrale diverge. On peut soit introduire une fréquence de coupure [99] ou un contour d'intégration spécial prenant en compte uniquement les pôles au voisinage de l'énergie de Fermi [89].

Nous allons donc maintenant intégrer (4.35) sur l'énergie pour faire apparaître la fonction de Green quasi-classique. On constate alors l'importance d'avoir soustrait les équations de Dyson, ce qui a éliminé le terme en ξ_p^2 .

On obtient finalement l'équation d'Eilenberger [89] :

$$[E\check{\tau}_3 + \check{\Delta}, \check{g}] + i\mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \check{g} + \frac{i}{2\tau_1} [\langle \check{g} \rangle_{\hat{\mathbf{p}}_F}, \check{g}] = 0 \quad (4.37)$$

où $\langle \dots \rangle_{\hat{\mathbf{p}}_F}$ désigne la moyenne angulaire au niveau de la surface de Fermi.

Condition de normalisation L'équation d'Eilenberger ne permet de trouver la fonction de Green quasi-classique qu'à une constante multiplicative près. Cela vient du fait que l'on a éliminé le terme homogène de l'équation de Dyson. Il nous faut donc une condition supplémentaire pour trouver $\check{g}$. On remarque alors que dans un milieu homogène la fonction de Green quasi-classique est normée :

$$\check{g}^2 = \check{\mathbb{I}}. \quad (4.38)$$

Cette condition est compatible avec l'équation d'Eilenberger en milieu non-homogène [89, 100]. En effet, supposons que $\check{g}$ est solution de l'équation d'Eilenberger, multiplions ensuite à gauche l'équation (4.37) par $\check{g}$ et additionnons ceci avec (4.37) multipliée à droite par $\check{g}$. On obtient l'équation suivante pour $\check{g}^2$:

$$[E\check{\tau}_3 + \check{\Delta}, \check{g}^2] + i\mathbf{v}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}^2 + \frac{i}{2\tau_1} [\langle \check{g} \rangle_{\hat{\mathbf{p}}_F}, \check{g}^2] = 0. \quad (4.39)$$

On constate alors qu'une solution triviale de cette équation intégral-différentielle en $\check{g}^2$ est $\check{\mathbb{I}}$. Comme on a aussi $\check{g}^2 = \check{\mathbb{I}}$ dans les réservoirs, nous allons imposer $\check{g}^2 = \check{\mathbb{I}}$ dans tout le métal. On aurait pu choisir une autre condition de normalisation [101, 102], cependant celle-ci est pratique et utilisée pratiquement dans toute la littérature.

Courant électrique Nous allons maintenant exprimer la densité de courant électrique (4.24) à l'aide de la fonction de Green quasi-classique. On utilise le fait que $\nabla_1 - \nabla_2 = 2\nabla_{\mathbf{r}}$, alors :

$$\langle \mathbf{J} \rangle(\mathbf{R}) = -\frac{e\nu_0}{4m} \int dE \int \frac{d^2\Omega_p}{4\pi} \mathbf{p}_F \text{tr}[\check{\tau}_K \check{g}(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{p}}_F, E)]. \quad (4.40)$$

Le courant est donc lié à la moyenne sur la surface de Fermi de la fonction de Green quasi-classique.

4.3 Limite diffusive

L'équation d'Eilenberger (4.37) peut se simplifier énormément quand le libre parcours moyen $l = v_F \tau_i$ est beaucoup plus petit que la plus petite des longueurs typiques du problème $v_F/E, v_F/\Delta, L$ où L est la taille de l'échantillon. Dans ce cas les électrons subissent un grand nombre de diffusions avant de perdre l'information sur leur phase, ce qui rend aléatoire la direction de l'impulsion $\hat{\mathbf{v}}_F$. C'est la limite diffusive. Les fonctions de Green sont alors presque isotropes.

L'idée est donc de développer la fonction de Green quasi-classique en fonction de la direction $\hat{\mathbf{v}}_F$, ce qui est formellement équivalent à un développement en harmoniques sphériques :

$$\check{g}(\hat{\mathbf{v}}_F) = \check{g}_0 + \hat{\mathbf{v}}_F \cdot \check{\mathbf{g}}_1 + \dots \quad (4.41)$$

où $\check{g}_0$ et $\check{\mathbf{g}}_1$ sont indépendants de $\hat{\mathbf{v}}_F$ et on a $\check{g}_0 = \langle \check{g} \rangle_{\hat{\mathbf{p}}_F}$. La condition de normalisation (4.38) devient :

$$\check{g}_0 \check{g}_0 = \mathbb{1} \quad (4.42a)$$

$$\check{g}_0 \check{\mathbf{g}}_1 + \check{\mathbf{g}}_1 \check{g}_0 = 0. \quad (4.42b)$$

On substitue ensuite ce développement dans l'équation d'Eilenberger. On moyenne sur toutes les directions de l'espace la partie paire en $\hat{\mathbf{v}}_F$. Cela donne en dimension 3 :

$$[E\check{\tau}_3 + \check{\Delta}, \check{g}_0] + i\frac{v_F}{3} \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \check{\mathbf{g}}_1 = 0. \quad (4.43)$$

L'ordre impair donne :

$$[E\check{\tau}_3 + \check{\Delta}, \hat{\mathbf{v}}_F \cdot \check{\mathbf{g}}_1] + iv_F \hat{\mathbf{v}}_F \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}_0 + \frac{i}{2\tau_i} [\check{g}_0, \hat{\mathbf{v}}_F \cdot \check{\mathbf{g}}_1] = 0. \quad (4.44)$$

L'approximation diffusive consiste alors à négliger le premier terme de cette équation devant le troisième. On multiplie ensuite (4.44) à gauche par $\check{g}_0$ puis on utilise les conditions de normalisation (4.42). On trouve alors :

$$\check{\mathbf{g}}_1 = -l \check{g}_0 \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}_0. \quad (4.45)$$

On aboutit finalement en injectant cela dans (4.43) à l'équation d'Usadel [95] :

$$[E\check{\tau}_3 + \check{\Delta}, \check{g}_0] - iD \nabla_{\mathbf{R}} (\check{g}_0 \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}_0) = 0, \quad (4.46)$$

où $D = v_F l / 3$ est la constante de diffusion en dimension 3.

Le courant électrique Il nous reste maintenant à écrire la densité de courant dans la limite diffusive. On part de l'expression (4.40) et on utilise le développement en harmoniques sphériques de $\mathbf{g}$. Seul le terme en $\check{\mathbf{g}}_1$ contribue, à cause de la moyenne sur toutes les directions de $\hat{\mathbf{v}}_F$. Ainsi, en utilisant (4.45), on trouve :

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) = \frac{e\nu_0 D}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dE \operatorname{tr} [\check{\tau}_K \check{g}_0 \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}_0]. \quad (4.47)$$

4.4 Conditions aux bords

Pour résoudre l'équation d'Usadel couplée à la condition de normalisation, il est nécessaire de préciser les conditions aux bords de la fonction de Green. Pour un métal diffusif très bien connecté à un réservoir, il suffit d'imposer que la fonction de Green soit égale à celle du réservoir aux bords.

Dans les réservoirs, les fonction de Green sont homogènes et connues, mais à cause de problèmes de divergence leur évaluation est un peu délicate, voir le livre de Kopnin [93] pour plus de détails. Pour un réservoir normal, on obtient :

$$\check{g}_N = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_3 & 2(f_{T0} + f_{L0}\hat{\tau}_3) \\ 0 & -\hat{\tau}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Ici, $f_{T0} = f(E - eV) - f(E + eV)$, $f_{L0} = 1 - f(E + eV) - f(E - eV)$, le potentiel du réservoir étant V .

Si le réservoir est supraconducteur, la fonction de Green devient :

$$\check{g}_S = \begin{pmatrix} \hat{R}_S & \hat{K}_S \\ 0 & \hat{A}_S \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

La partie retardée $\hat{R}_S$ est donnée par :

$$\hat{R}_S = \frac{1}{\sqrt{(E + i\eta)^2 - |\Delta|^2}} \begin{pmatrix} E & \Delta \\ -\Delta^* & -E \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

où ici la coupure de la racine carrée va de $-|\Delta|$ à $|\Delta|$ sur l'axe réel E . La partie avancée est reliée de la façon suivante à la partie retardée :

$$\hat{A}_S = -\hat{\tau}_3 \hat{R}_S^\dagger \hat{\tau}_3 \quad (4.51)$$

et la partie Keldysh vient de la condition d'équilibre du réservoir :

$$\hat{K}_S = [f(E) - f(-E)] (\hat{A}_S - \hat{R}_S) \quad (4.52)$$

où $f(E)$ est la fonction de Fermi (par convention, on a fixé le potentiel du supraconducteur à la masse).

Si le métal diffusif n'est pas parfaitement connecté avec le métal voisin, la condition de continuité n'est plus si simple. Zaitsev [103] calcula les conditions aux bords pour une interface de transparence quelconque. Kuprianov et Lukichev [58] simplifièrent ces conditions dans la limite diffusive pour des barrières tunnel puis Nazarov dans [104] les généralisa à des barrières de transparence quelconque toujours dans le cas diffusif.

On peut résumer ces conditions aux bords de la façon suivante. Pour une barrière le long de la surface $\mathcal{S}$ quelconque caractérisée par des canaux de transparence $\{\Gamma_n\}$ qui sépare deux métaux diffusifs, on a :

$$\int_{\mathcal{S}} d^2\mathbf{S}_{12} \cdot (\sigma_1 \check{g}_1 \nabla \check{g}_1) = \check{I}_{12} = - \int_{\mathcal{S}} d^2\mathbf{S}_{12} \cdot (\sigma_2 \check{g}_2 \nabla \check{g}_2) \quad (4.53)$$

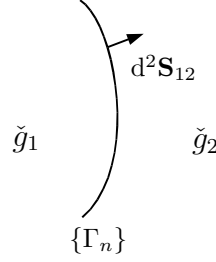


Fig. 4.2: Schéma d'une barrière entre deux métaux permettant de mettre en place les notations de la formule (4.2) de condition aux bords.

où $\check{g}_1$ est la fonction de Green à gauche de la barrière, $\check{g}_2$ est la fonction de Green à droite (cf. figure(4.2)), $d^2\mathbf{S}_{12}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface orienté de 1 vers 2 et $\sigma_i = 2e^2 D_i \nu_i$ est la conductivité dans l'état normal du métal de gauche ($i = 1$) et de droite ($i = 2$). On a introduit dans (4.53) une matrice courant $\check{I}_{12}$ définie par

$$\check{I}_{12} = g_Q \sum_n \frac{2\Gamma_n[\check{g}_1, \check{g}_2]}{4 + \Gamma_n(\{\check{g}_1, \check{g}_2\} - 2)}. \quad (4.54)$$

Finalement, en utilisant (4.47) et (4.53) on voit que le courant électrique traversant la barrière est donné par

$$I_{12} = - \int_S d^2\mathbf{S}_{12} \mathbf{J}(\mathbf{R}) = - \frac{1}{8e} \int dE \text{tr}[\check{\tau}_K \check{I}_{12}]. \quad (4.55)$$

Avec l'équation d'Usadel (4.46), la condition de normalisation (4.42a) et les conditions aux bords que l'on vient de décrire, nous avons tous les outils pour calculer les caractéristiques courant-tension de conducteurs mésoscopiques diffusifs.

4.5 Statistique complète du courant

Comme nous l'avons déjà vu, l'étude du courant d'un circuit mésoscopique peut être efficacement complétée par l'étude du bruit en courant ainsi que les corrélateurs d'ordre supérieurs. Cela permet d'accéder à de nouvelles informations sur le transport de charge.

On va donc chercher à calculer la fonction génératrice des cumulants ϕ associée à la variable aléatoire N : *nombre de charges ayant traversé le dispositif pendant un temps t_0* . Cette fonction est définie de la façon suivante :

$$\phi(\lambda) = -\ln\langle e^{iN\lambda} \rangle = -\ln \left[\sum_n p_n e^{in\lambda} \right] \quad (4.56)$$

où $p(n)$ est la probabilité que n charges aient traversé l'échantillon pendant le temps t_0 . On a légèrement modifié nos définitions de la section 1.3, cela permet notamment que le champ de

comptage λ soit sans dimension. Le nombre de charges N ayant traversé l'échantillon est lié au courant $I(t)$ qui le traverse par

$$N = -\frac{1}{e} \int_0^{t_0} dt I(t). \quad (4.57)$$

Ainsi, comme nous l'avons vu dans la section 1.3, quand le temps de mesure t_0 est suffisamment long on a :

$$-\frac{1}{i} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \langle \langle N \rangle \rangle = -\frac{t_0}{e} \langle I \rangle \quad (4.58)$$

$$-\frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=0} = \langle \langle N^2 \rangle \rangle = \frac{t_0}{2e^2} S \quad (4.59)$$

où $S = \int dt \langle \langle \{I(0), I(t)\} \rangle \rangle$ est par définition le bruit en courant à fréquence nulle. On en déduit donc la relation suivante :

$$S = 2ei \frac{\partial I(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \quad \text{avec} \quad I(\lambda) = -\frac{ie}{t_0} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}. \quad (4.60)$$

Cette formule nous sera utile par la suite car elle permet de calculer le bruit à partir du courant sans avoir à calculer explicitement ϕ .

La fonction génératrice des cumulants réécrite à l'aide de la mécanique quantique à été proposée pour la première par Levitov *et al.* [17] en utilisant un spin 1/2 couplé au courant pour compter les charges qui passent à travers le circuit. Elle est donnée par [17, 22, 24, 26] :

$$e^{-\phi(\lambda)} = \langle T_C \exp \left[-\frac{i}{2e} \int_{C_0} dt \lambda(t) I_C(t) \right] \rangle \quad (4.61)$$

où I_C est l'opérateur courant qui traverse la surface $\mathcal{C}$ et T_C désigne l'ordonnement temporel de Keldysh sur le contour C de Keldysh (cf. annexe A.3.2). Ce contour va de 0 à t_0 sur la branche + où $\lambda(t) = \lambda$ puis va de t_0 à 0 sur la branche - où $\lambda(t) = \lambda$. On prenant les deux premières dérivées de ϕ , on vérifie sans difficulté que l'on obtient bien le courant et le bruit. On constate alors que pour calculer $I(\lambda)$ il suffit de calculer la valeur moyenne de l'opérateur I_C quand on ajoute à l'hamiltonien initial la perturbation extérieure dépendante du temps $H_c(t) = \lambda(t)/(2e)I_C(t)$, l'opérateur courant étant donné par :

$$I_C = -\frac{e}{2im} \int d^2\mathbf{r} \nabla F(\mathbf{r}) \cdot \left[\sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} \nabla \psi^\dagger \psi_\sigma - \psi^\dagger \nabla \psi_\sigma \right] \quad (4.62)$$

où la fonction $F(\mathbf{r})$ est choisie de façon à ce qu'elle passe de 0 à 1 en traversant la surface $\mathcal{C}$. Alors, de la même façon que l'on a obtenu le courant (4.24), on trouve [24, 57] :

$$I(\lambda) = \langle I \rangle_{H+H_c} = -\frac{e}{4m} \int d^2\mathbf{r}_1 \nabla F(\mathbf{r}_1) \cdot \lim_{2 \rightarrow 1} [(\nabla_1 - \nabla_2) \text{tr} (\tilde{\tau}_K \check{G}(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t; \lambda))] \quad (4.63)$$

où la fonction de Green $\check{G}(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t; \lambda)$ est celle de l'hamiltonien total $H + H_c$. On a ainsi pratiquement obtenu la fonction génératrice car on a $\partial \phi / \partial \lambda = it_0 / e I(\lambda)$.

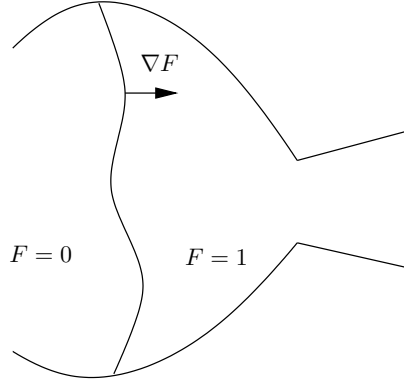


Fig. 4.3: Dans le réservoir la fonction F qui caractérise la surface de comptage $\mathcal{C}$ passe de 0 à 1 en la traversant. Le circuit mésoscopique est connecté à droite du réservoir sur cette figure.

Le calcul de l'expression (4.63) est la méthode générale d'obtenir la statistique complète du courant. On va maintenant essayer de la calculer dans un réservoir, on impose donc que la surface de comptage $\mathcal{C}$ caractérisée par la fonction $F(\mathbf{r})$ est située à l'intérieur d'un réservoir homogène. Ceci est bien possible car on peut toujours séparer l'échantillon mésoscopique en réservoir et éléments diffuseurs. On suppose de plus que l'échelle caractéristique $\Lambda \simeq |\nabla F|^{-1}$ sur laquelle F passe de 0 à 1 est telle que $\lambda_F \ll \Lambda \ll l, v_F/\Delta$. Sous ces hypothèses on utilise l'approximation quasi-classique. On dérive donc à nouveau l'équation d'Eilenberger (4.37) en présence de H_c et on obtient :

$$[E\check{\tau}_3 + \check{\Delta} - \frac{\lambda}{2}\nabla F \cdot \mathbf{v}_F \check{\tau}_K, \check{g}] + i\mathbf{v}_F \cdot \nabla \mathbf{R} \check{g} + \frac{i}{2\tau_i}[\langle \check{g} \rangle_{\hat{\mathbf{p}}_F}, \check{g}] = 0. \quad (4.64)$$

Compte tenu des hypothèses sur Λ , ce sont les termes en gradient qui dominent dans l'équation (4.64) qui devient ainsi :

$$\mathbf{v}_F \cdot \nabla \check{g}(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{v}}_F, E; \lambda) = [-i\frac{\lambda}{2}\nabla F(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{v}_F \check{\tau}_K, \check{g}(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{v}}_F, E; \lambda)] \quad (4.65)$$

C'est une équation différentielle linéaire en $\check{g}$, la solution est donc entièrement déterminée par la donnée de $\check{g}$ aux bords du réservoir. Or la fonction de Green loin de la surface de comptage $\mathcal{C}$ est connue : c'est la solution de l'équation (4.65) avec $\lambda = 0$ car loin de $\mathcal{C}$ on a $\nabla F = 0$. C'est donc la fonction de Green du réservoir $\check{g}(\hat{\mathbf{v}}_F, E; 0)$, en l'absence de champ de comptage, qui ne dépend plus de la position $\mathbf{R}$. On en déduit que la solution de l'équation (4.65) est

$$\check{g}(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{v}}_F, E; \lambda) = e^{-i\lambda F(\mathbf{R})\check{\tau}_K/2} \check{g}(\hat{\mathbf{v}}_F, E; 0) e^{i\lambda F(\mathbf{R})\check{\tau}_K/2}. \quad (4.66)$$

On prend ensuite la limite diffusive suffisamment loin de la surface de comptage $\mathcal{C}$ où $F = 1$ et on trouve finalement que :

$$\check{g}_0(E; \lambda) = e^{-i\lambda\check{\tau}_K/2} \check{g}_0(E; 0) e^{i\lambda\check{\tau}_K/2}. \quad (4.67)$$

Ainsi le champ de comptage intervient uniquement par la modification des conditions aux bords en modifiant les fonctions de Green des réservoirs. De plus, d'après (4.65) et (4.62), on constate

que le champ de comptage ne modifie pas l'équation du mouvement du système mésoscopique en l'absence de champ de comptage (4.46) car on a $\nabla F = 0$ loin de la surface $\mathcal{C}$.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit une méthode générale pour étudier le transport de charge dans les systèmes hybrides mésoscopiques supraconducteur - métal normal diffusifs. On a pour cela d'abord utilisé l'approximation quasi-classique qui se justifie par le fait que la longueur de Fermi est de loin la plus petite échelle du problème. On a ensuite utilisé le fait que si la diffusion est suffisamment importante, les fonctions de Green sont isotropes. Cela nous a permis d'obtenir l'équation d'Usadel (4.46), qui, complétée par les conditions aux bords (4.53), (4.54) et (4.67), permet d'obtenir la statistique complète du courant dans un circuit mésoscopique a priori quelconque.

L'équation d'Usadel a été discrétisée par Nazarov [104] ce qui a donné lieu à la *théorie des circuits*. Elle revient à décomposer le circuit en nœuds et connecteurs. À chaque nœud, on a une relation de type conservation d'une matrice courant spectral ressemblant aux lois de Kirchhoff qui permet de déterminer le courant dans tout le circuit. Cette approche simple et systématique permet de s'affranchir de la résolution de l'équation différentielle diffusive présente dans l'équation d'Usadel.

Nous allons utiliser cette méthode dans le chapitre suivant pour étudier la dépendance en énergie du bruit en courant d'une double jonction métal normal - métal normal - supraconducteur.

Chapitre 5

Bruit en courant dans une double barrière métal normal - supraconducteur

Introduction

Il été récemment montré que dans des structures métal normal - supraconducteur le bruit en courant peut avoir une dépendance en énergie non triviale car différente de celle du courant [23, 26, 105, 106]. Diverses structures montrant cet effet ont été étudiés dans la littérature : un long fil diffusif [26, 107], une jonction tunnel [29, 78] quand les réservoirs sont hors équilibre (cf. le chapitre 2) ainsi qu'une double barrière tunnel [32]. Cette dernière structure est particulièrement intéressante car les effets d'interférences deviennent plus importants quand on augmente le nombre d'allers - retours des électrons dans le métal diffusif. On s'attend donc à ce qu'une structure de type Fabry-Perot constituée de deux barrières entre un supraconducteur et un métal normal présente une forte dépendance en énergie de la conductance et du bruit. Ceci a été prédit il y a une dizaine d'année par Volkov *et al.* [108] pour une structure du type N-I-N'-I-S à l'aide des fonctions de Green quasi-classiques (ici N et N' sont des métaux normaux, S un supraconducteur et I est une fine barrière d'isolant). Ces résultats ont ensuite été confirmés expérimentalement par Quirion *et al.* [109] pour métaux diffusifs et observé par Giazotto *et al.* [110] pour des métaux balistiques. Quant au bruit, il a été récemment étudié théoriquement dans cette structure tunnel par Samuelsson [32], l'hypothèse que les jonctions sont tunnel simplifiant beaucoup le calcul théorique. Cependant, on peut s'attendre à ce que le courant et le bruit dépendent aussi de la transparence des barrières. Nous allons montrer dans ce chapitre que pour le bruit cette dépendance peut être importante dans certains cas limites. Pour le courant, ces effets des transparences ont été confirmés par Clerk *et al.* [111] en utilisant la théorie des matrices aléatoires. Mais jusqu'à présent le comportement du bruit n'a jamais été étudié lorsque les barrières ne sont pas tunnel, c'est ce que nous allons faire maintenant.

Nous allons donc calculer dans ce chapitre le bruit en courant dans une structure N-N'-S sans restriction sur la transparence des deux barrières. On utilise la technique des fonctions de Green quasi-classiques [89, 90, 95] décrite dans le chapitre précédent. On utilisera des conditions aux

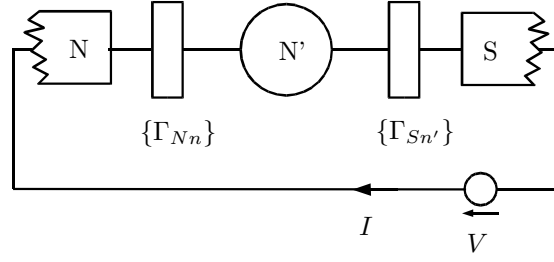


Fig. 5.1: Vue schématique de la double jonction N-N'-S. $\{\Gamma_{Nn}\}$ et $\{\Gamma_{Sn'}\}$ sont les transparences des barrières N-N' et N'-S.

bords modifiées introduisant le champ de comptage [17, 22, 24] ainsi qu'une paramétrisation de la fonction de Green proposée par Houzet et Pistoiesi dans l'article [107], ce qui nous permettra de donner une expression de la dépendance en voltage du bruit en fonction d'un paramètre complexe qui doit être trouvé numériquement. Nous avons aussi obtenu des résultats analytiques dans certains cas limites, dans tous les autres cas le calcul numérique est immédiat. Nous montrerons aussi que pour des conductances de même ordre de grandeur dans l'état normal, la transparence des barrières joue un rôle important dans la dépendance en énergie du bruit. Pourtant, il est souvent difficile de contrôler la transparence lors du processus de fabrication des échantillons. On peut certes obtenir une estimation de la transparence moyenne $\bar{\Gamma}$ connaissant la taille de la jonction S et sa conductance g_0 : $\bar{\Gamma} \approx g_0 \lambda_F^2 / (g_Q S)$, mais on ne peut rien savoir sur la distribution des transparences. Il suffit pourtant d'une très faible proportion de canaux ouverts pour changer le comportement d'une jonction a priori tunnel. Nous pensons donc qu'en mesurant le courant et le bruit, puis en le comparant avec les expressions que l'on obtient dans ce chapitre, on peut obtenir des informations importantes sur la distribution de transparence des barrières. C'est pourquoi, à nos yeux, une théorie qui prédit le courant et le bruit pour des transparences quelconques est un outil très utile.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. On commencera par introduire le modèle puis dériver les équations principales dans la section 5.1. Nous donnerons ensuite les expressions du courant et du bruit dans les sections 5.2 et 5.3 tout en discutant les limites haute et basse énergies. Finalement on étudiera le transport quand l'une des conductances domine dans la section 5.4 avant de conclure.

5.1 Modélisation

On considère donc une double jonction N-N'-S avec deux jonctions que l'on caractérise de la façon la plus générale possible par un ensemble de canaux de transmission de transparence : $\{\Gamma_{Nn}\}$ pour la barrière N-N' et $\{\Gamma_{Sn'}\}$ pour la barrière N'-S, n et n' labélisant les canaux (voir la figure 5.1). Ainsi les conductances des barrières sont données par $g_{N(S)} = g_Q \sum_n \Gamma_{N(S)n}$, où $g_Q = 2e^2/h$ est la conductance quantique. On suppose que les résistances $g_{N/S}^{-1}$ des barrières sont beaucoup plus grandes que la résistance du métal diffusif N', on néglige donc la chute de potentiel dans le grain N'. Cela revient à dire que l'on suppose que le temps τ_D mis par un électron venant des électrodes pour visiter entièrement N' est beaucoup plus petit que le temps

de sortie τ , le temps que met l'électron pour sortir de N'. L'électron a donc le temps de voir toute la région centrale avant de ressortir. En termes d'énergie, cela revient à dire que l'énergie de Thouless $E_{\text{Th}} \equiv \hbar/\tau_D = \hbar D/L^2$ (D est la constante de diffusion et L la taille typique de N') doit être beaucoup plus grande que $E_\tau \equiv \hbar/\tau = (g_N + g_S)\delta/(4\pi g_Q)$, δ étant l'écart moyen entre les niveaux énergétiques de N'. Nous allons aussi supposer que le grain central est suffisamment petit pour $L \ll \xi_d = \sqrt{\hbar D/\Delta}$ ¹ (ce qui est équivalent à $E_{\text{Th}} \gg \Delta$) où Δ est le gap du supraconducteur. On peut ainsi négliger la dépendance spatiale de l'effet de proximité dans N'. L'effet de proximité est alors entièrement contrôlé par E_τ et le transport de charge ne dépend pas de la forme de N'. On peut ainsi considérer que N' est un conducteur isotrope de dimension zéro.

Nous allons aussi supposer que $g_{N'} \gg g_Q$ où $g_{N'}$ est la conductance de N' seul, ce qui permet de négliger des effets de localisation faible. Puis, pour éviter les phénomènes de blocage de Coulomb, on suppose que l'on n'a pas simultanément $g_N \ll g_Q$ et $g_S \ll g_Q$. Finalement on requiert que le temps de sortie soit beaucoup plus petit que les temps de mémoire de phase et inélastique. Toutes ses conditions peuvent être remplies expérimentalement, elles le sont par exemple dans [109].

Avec toutes ces hypothèses, nous allons pouvoir appliquer la version discrétisée de l'équation d'Usadel, *la théorie des circuits* [23, 24, 26, 57, 104], pour calculer le courant, le bruit et les autres cumulants. Comme la dépendance spatiale interne de N' est négligeable, on peut modéliser la région centrale par un seul nœud. On discrétise donc le conducteur en trois nœuds caractérisés par des fonctions de Green quasi-classiques isotropes dans l'espace de Nambu-Keldysh (voir le chapitre 4), $\check{G}_{N/S}^2$ pour les réservoirs N et S et $\check{G}$ pour N' qui dépendent l'énergie E et du champ de comptage λ . Dans notre cas, le champ de comptage est introduit par la modification de la fonction de Green du réservoir normal comme suit, cf. (4.67) [22] :

$$\check{G}_N(\lambda) = e^{i\lambda\tilde{\tau}_K/2} \check{G}_{N0} e^{-i\lambda\tilde{\tau}_K/2}, \quad (5.1)$$

où $\check{G}_{N0}$ est la fonction de Green quasi-classique dans la limite diffusive, cf. (4.48) :

$$\check{G}_{N0} = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_3 & 2(f_{T0} + f_{L0}\hat{\tau}_3) \\ 0 & -\hat{\tau}_3 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$f_{T0} = f(E - eV) - f(E + eV)$, $f_{L0} = 1 - f(E + eV) - f(E - eV)$, f étant la fonction de Fermi à la température T du circuit et V le potentiel du réservoir du réservoir N. Pour des énergies plus petites que le gap, la fonction de Green du réservoir supraconducteur est donnée par $\check{G}_S = \hat{\tau}_2 \mathbb{I}$, cf. (4.49).

La fonction de Green du nœud central satisfait la condition de normalisation $\check{G}^2 = \mathbb{I}$ et la propriété de symétrie [107]³

$$\check{G}^\dagger(-\lambda) = -\tilde{\tau}_L \check{G}(\lambda) \tilde{\tau}_L \quad (5.3)$$

¹Pour un grain de cuivre $D \simeq 64 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et si le supraconducteur est de l'aluminium, $\Delta \simeq 200 \mu\text{eV}$, la condition devient $L \ll 100 \text{ nm}$.

²Dans ce chapitre, nous noterons $\check{G}$ les fonctions de Green quasi-classiques isotropes et non $\check{g}_0$ comme dans le chapitre 4 pour éviter toute confusion avec les conductances $g_{N/S}$.

³Dans l'article [107] il y a une erreur de frappe dans la propriété de symétrie.

avec $\check{\tau}_L = \hat{\tau}_3 \otimes \bar{\sigma}_2$. (On a le même type de relation pour $\check{G}_{N/S}$). Elle est solution de l'équation d'Usadel [95], cf. (4.46) (on a $\check{\delta} = 0$ car N' est un métal normal) :

$$\hbar D \nabla (\check{G} \nabla \check{G}) + iE [\check{G}_E, \check{G}] = 0, \quad \check{G}_E = \hat{\tau}_3 \otimes \bar{1}. \quad (5.4)$$

On intègre ensuite cette équation sur le volume $\mathcal{V}$ de N' et on utilise le théorème de Green-Ostrogradski. On trouve :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} d^2\mathbf{S} \cdot (\sigma_0 \check{G} \nabla \check{G}) + 2i \frac{e^2 \nu_0 \mathcal{V} E}{\hbar} [\check{G}_E, \check{G}] = 0, \quad (5.5)$$

où ν_0 est la densité d'état par unité de spin N', et $\sigma_0 = 2e^2 D \nu_0$ est sa conductivité dans l'état métallique normal. On utilise ensuite les conditions aux bords $\partial\mathcal{V}$ du grain N', cf. (4.53) [104] :

$$- \int_{\partial\mathcal{V}} d^2\mathbf{S} \cdot (\sigma_0 \check{G} \nabla \check{G}) = \check{I}_N + \check{I}_S \quad (5.6)$$

avec

$$\check{I}_N = g_Q \sum_n \frac{2 \Gamma_{Nn} [\check{G}_N(\lambda), \check{G}(\lambda)]}{4 + \Gamma_{Nn} (\{\check{G}_N(\lambda), \check{G}(\lambda)\} - 2)}, \quad (5.7a)$$

$$\check{I}_S = g_Q \sum_n \frac{2 \Gamma_{Sn} [\check{G}_S, \check{G}(\lambda)]}{4 + \Gamma_{Sn} (\{\check{G}_S, \check{G}(\lambda)\} - 2)}. \quad (5.7b)$$

Ainsi $\check{G}$ est entièrement déterminé par l'équation (5.4) qui prend la forme d'une équation de conservation de la matrice densité de courant :

$$\check{I}_N + \check{I}_S + \check{I}_E = 0, \quad (5.8)$$

où

$$\check{I}_E = -g_Q \frac{2i\pi E}{\delta} [\check{G}_E, \check{G}(\lambda)]. \quad (5.9)$$

Ici $\check{I}_E$ est ce que l'on appelle le courant de « fuite ». Il permet de prendre en compte le déphasage relatif électron - trou quand ils se propagent dans N' dont le l'écart moyen entre niveau est $\delta = 1/(\nu_0 V)$. L'estimation du temps de sortie $E_\tau/\hbar = \delta(g_N + g_S)/(4\pi\hbar g_Q)$ vient de la comparaison du poids des termes $\check{I}_N + \check{I}_S$ et $\check{I}_E$.

Une fois que la matrice $\check{G}$ est connue, on obtient le courant, le bruit à fréquence nulle et tous les autres cumulants d'ordre plus élevé en dérivant $I(\lambda)$ définie par, cf. (4.54) :

$$I(\lambda) = -\frac{1}{8e} \int dE \operatorname{tr}[\check{\tau}_K \check{I}_N] = \frac{1}{8e} \int dE \operatorname{tr}[\check{\tau}_K \check{I}_S]. \quad (5.10)$$

La seconde égalité provient de l'équation de conservation de la matrice courant (5.8) sachant que $\operatorname{tr}[\check{\tau}_K \check{I}_E] = 0$. Les deux premiers cumulants sont le courant moyen :

$$I = I(\lambda)|_{\lambda=0}, \quad (5.11)$$

et le bruit en courant, cf. (4.60)

$$S = 2ie \left. \frac{\partial I(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (5.12)$$

Si les barrières sont tunnel, $\Gamma_n \ll 1 \forall n$, les conditions aux bords se simplifient beaucoup car on peut négliger le dénominateur des équations (5.7a) et (5.7b). Dans ce cas la matrice $\check{G}(\lambda)$ peut être trouvée analytiquement [30, 32]. Il est alors possible d'étudier non seulement le courant et le bruit mais aussi tous les autres cumulants. Dans le cas de transparences arbitraires, aucune solution analytique de $\check{G}(\lambda)$ n'est connue pour l'instant.

Cependant, si l'on se restreint à l'étude des deux premiers cumulants, I et S , qui sont en pratique les plus accessibles expérimentalement, il suffit de développer $\check{G}(\lambda)$ au voisinage de $\lambda = 0$:

$$\check{G}(\lambda) = \check{G}_0 - i\frac{\lambda}{2}\check{G}_1 + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (5.13)$$

Il est alors possible de trouver $\check{G}_0$ donnant le courant puis $\check{G}_1$ donnant le bruit quelle que soit la transparence des barrières. C'est ce que nous allons faire dans la suite.

5.2 Le courant

Pour calculer le courant, il nous faut trouver $\check{G}_0$ à partir de (5.8) puis le substituer dans (5.11). Le point important est prendre en compte la condition de normalisation sans redondance dans la paramétrisation de la matrice. Quand le champ de comptage est nul, la forme générale de la solution est bien connue. Elle correspond à la paramétrisation suivante de $\check{G}_0$:

$$\check{G}_0 = \begin{pmatrix} \hat{R} & \hat{K} \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

avec

$$\hat{R} = \hat{\tau}_3 \cosh \theta + i\hat{\tau}_2 \sinh \theta, \quad \hat{A} = -\hat{\tau}_3 \hat{R}^\dagger \hat{\tau}_3, \quad (5.15)$$

$$\hat{K} = \hat{R}\hat{f} - \hat{f}\hat{A}, \quad \hat{f} = f_L + \hat{\tau}_3 f_T. \quad (5.16)$$

Ici, les paramètres f_T et f_L sont réels comme l'impose la relation de symétrie (5.3) quand $\lambda = 0$. Le paramètre complet θ caractérise l'appariement dans l'îlot central N' :

- $\theta = -i\pi/2$ correspond à état supraconducteur BCS,
- $\theta = 0$ correspond à un état normal.

Pour constater cela, il suffit par exemple de comparer la paramétrisation de $\check{G}_0$ aux fonctions de Green dans les réservoirs. La densité d'état de la région N' est donnée par la partie réelle de θ : $\nu = \nu_0 \operatorname{Re} \cosh \theta$.

On substitue ensuite cette forme de $\check{G}_0$ dans (5.8) ce qui nous permet d'obtenir les équations donnant f_T , f_L et θ . La partie retardée ou avancée de cette équation donne l'équation pour θ :

$$g_N \langle Z_N \rangle \sinh \theta - i\varepsilon g_D \sinh \theta + i g_S \langle Z_S \rangle \cosh \theta = 0, \quad (5.17)$$

où on a posé $\varepsilon = E/E_\tau$, $g_D = g_N + g_S$, $Z_N = [1 + \Gamma_N(\cosh \theta - 1)/2]^{-1}$ et $Z_S = [1 + \Gamma_S(i \sinh \theta - 1)/2]^{-1}$. Ici,

$$\langle f(\Gamma_\alpha) \rangle = \frac{\sum_n \Gamma_{\alpha n} f(\Gamma_{\alpha n})}{\sum_n \Gamma_{\alpha n}} \quad (5.18)$$

correspond à la moyenne sur la transparence des canaux de la jonction $\alpha = N$ ou S . La partie Keldysh de (5.8) donne :

$$f_L = f_{L0} \quad (5.19)$$

$$f_T/f_{T0} = c = -\frac{g_N \tanh \theta_1}{2 \varepsilon g_D \sin \theta_2} \langle [(2 - \Gamma_N) \cos \theta_2 + \Gamma_N \cosh \theta_1] |Z_N|^2 \rangle. \quad (5.20)$$

Ici, on a décomposé $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ en partie réelle et imaginaire. Finalement, avec (5.11) on obtient le courant moyen [112] :

$$I = \frac{1}{2e} \int_{-\infty}^{\infty} dE f_{T0}(E) \mathcal{G}(E) \quad (5.21)$$

avec

$$\mathcal{G}(E) = c g_S \cosh \theta_1 \langle [-\sin \theta_2 + \Gamma_S (\cosh \theta_1 + \sin \theta_2)/2] |Z_S|^2 \rangle. \quad (5.22)$$

Ce résultat est en accord avec celui obtenu à l'aide des matrices aléatoires par Clerk *et al.* dans [111] lorsque les barrières ont des transparences constantes. À température nulle, la conductance différentielle $G \equiv dI/dV$ est simplement égale à $\mathcal{G}(eV)$.

Par la suite nous allons nous intéresser à la dépendance en énergie de la conductance à température nulle, la température ayant comme unique effet de moyenniser $\mathcal{G}(E)$ sur une largeur de l'ordre de $k_B T$.

5.2.1 Limite cohérente

Commençons par étudier la limite basse énergie, soit le cas complètement cohérent. On trouve que le paramètre θ est imaginaire pur et que l'équation (5.17) devient :

$$G_{\text{coh}}^{-1} = (\tilde{g}_N)^{-1} + (\tilde{g}_S)^{-1}, \quad (5.23)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{g}_N &= g_N \cos \alpha \langle \tilde{Z}_N^2 \rangle + g_N \langle \Gamma_N \tilde{Z}_N^2 \rangle (1 - \cos \alpha)/2, \\ \tilde{g}_S &= g_S \sin \alpha \langle \tilde{Z}_S^2 \rangle + g_S \langle \Gamma_S \tilde{Z}_S^2 \rangle (1 - \sin \alpha)/2, \end{aligned}$$

avec $\tilde{Z}_N = [1 + \Gamma_N (\cos \alpha - 1)/2]^{-1}$ et $\tilde{Z}_S = [1 + \Gamma_S (\sin \alpha - 1)/2]^{-1}$. Le paramètre $\alpha = -\text{Im } \theta$ est solution de

$$g_N \sin \alpha \langle \tilde{Z}_N \rangle = g_S \cos \alpha \langle \tilde{Z}_S \rangle. \quad (5.24)$$

La conductance du circuit dépend alors fortement du quotient g_N/g_S .

Quand le grain central est bien connecté au réservoir normal ($g_N \gg g_S$), la solution de l'équation (5.24) est $\alpha = 0 = \theta$, N' est donc dans l'état normal. La conductance différentielle est alors donnée par :

$$G_{\text{coh}} \simeq g_S^{\text{And}} = 2g_S \langle \Gamma_S / (2 - \Gamma_S)^2 \rangle = 2g_Q \sum_n \frac{\Gamma_{Sn}^2}{(2 - \Gamma_{Sn})^2}. \quad (5.25)$$

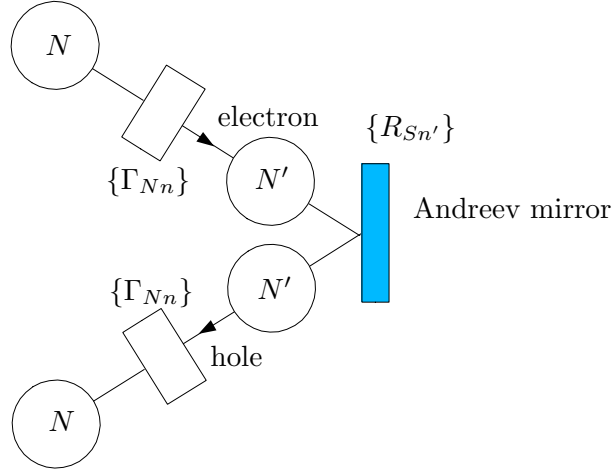


Fig. 5.2: Représentation de la double jonction N-N'-S dans le régime incohérent. Les électrons sont réfléchis en trou au niveau de la barrière N'-S par le mécanisme de la réflexion Andreev.

La conductance est dominée par la réflexion Andreev au niveau de la barrière N'-S [113].

Dans la limite opposée quand le grain N' est bien connecté avec l'électrode supraconductrice ($g_S \gg g_N$), on trouve $\theta = -i\pi/2$, le grain est dans l'état supraconducteur. La conductance est alors dominée par la réflexion Andreev à la barrière N-N' :

$$G_{\text{coh}} \simeq g_N^{\text{And}} = 2g_N \langle \Gamma_N / (2 - \Gamma_N)^2 \rangle = 2g_Q \sum_n \frac{\Gamma_{Nn}^2}{(2 - \Gamma_{Nn})^2}. \quad (5.26)$$

On remarque aussi que G_{coh} est invariant sous la permutation des canaux des deux barrières $\{\Gamma_{Nn}\} \leftrightarrow \{\Gamma_{Sn'}\}$ dans l'équation (5.23). Ainsi la conductance dans la limite cohérente ne dépend pas de l'ordre des barrières devant le supraconducteur, alors que l'état du grain en dépend. Il peut être normal ou supraconducteur selon le rapport g_N/g_S .

5.2.2 Limite incohérente

Dans la limite opposée $eV \gg E_\tau$, le transport est incohérent. L'importante différence d'énergie entre un électron et le trou obtenu par réflexion Andreev détruit les effets d'interférence. On trouve que le métal central N' est dans l'état normal ($\theta = 0$), et la conductance différentielle est donnée par :

$$G_{\text{class}}^{-1} = g_N^{-1} + (g_S^{\text{And}})^{-1}. \quad (5.27)$$

Cette expression (5.27) n'est plus invariante sous l'échange des barrières N-N' et N'-S. L'interprétation physique de la conductance est simple car on peut traiter chaque canal de transmission de façon indépendante, les électrons n'interférant pas [114]. Pour qu'une paire de Cooper soit transférée à travers la double barrière, il faut que l'électron suive les étapes suivantes (voir la figure 5.2) :

- traverser la barrière N-N',

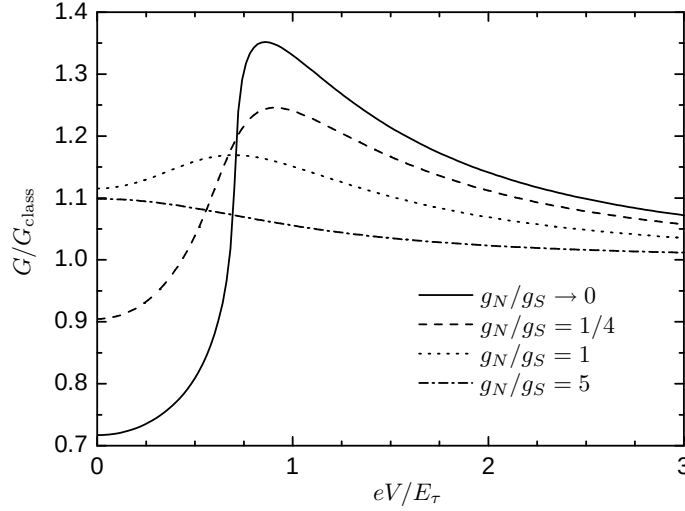


Fig. 5.3: Conductance différentielle normalisée par sa valeur dans la limite incohérente en fonction de eV/E_τ quand les deux interfaces N-N' et N'-S sont désordonnées (cf. Eq. (5.29)) pour différentes valeurs du rapport des conductances g_N/g_S . La température est nulle. On constate qu'un maximum apparaît au voisinage de $eV \approx E_\tau$ quand $g_N \approx g_S$, il devient plus prononcé quand $g_N/g_S \rightarrow 0$.

- être réfléchi en un trou au niveau du miroir Andreev N'-S avec la probabilité $R_{Sn'} = \Gamma_{Sn'}^2 / (2 - \Gamma_{Sn'})^2$ par canal,
- le trou doit finalement ressortir en traversant la barrière N-N'.

Ainsi, dans la limite incohérente, la double barrière est équivalente à trois jonctions en série de transparences $\{\Gamma_{Nn}\}$, $\{R_{Sn'}\}$ et $\{\Gamma_{Nn}\}$, la charge élémentaire transportée étant $2e$. Donc la conductance est simplement donnée par l'addition en série de trois conductances multipliée par un facteur 2 :

$$G_{\text{class}} = 2[(g_Q \sum_n \Gamma_{Nn})^{-1} + (g_Q \sum_{n'} R_{Sn'})^{-1} + (g_Q \sum_n \Gamma_{Nn})^{-1}]^{-1}, \quad (5.28)$$

ce qui correspond bien avec (5.27).

5.2.3 Énergies intermédiaires

Pour des énergies intermédiaires, la forme de la conductance différentielle $\mathcal{G}$ dépend à la fois du rapport des conductances des deux barrières mais aussi de l'ensemble des transparences des barrières. Une situation particulièrement intéressante est celle d'une interface désordonnée qui se forme entre deux métaux en l'absence de barrière d'oxyde. Dans ce cas, il a été démontré que la distribution de la transparence des canaux est universelle [115], et elle donnée pour la barrière $\alpha = \text{N ou S}$:

$$\rho_\alpha(\Gamma) \equiv \sum_n \delta(\Gamma - \Gamma_{\alpha n}) = \frac{g_\alpha}{g_Q \pi} \frac{1}{\Gamma^{3/2} \sqrt{1 - \Gamma}}. \quad (5.29)$$

C'est une distribution de type bimodale avec à la fois un grand nombre de canaux transparents (Γ proche de 1) et de canaux tunnel (Γ proche de 0). La moyenne sur les canaux (5.18) devient

$$\langle f(\Gamma_\alpha) \rangle = \frac{1}{\pi} \int d\Gamma \frac{f(\Gamma)}{\sqrt{\Gamma(1-\Gamma)}}. \quad (5.30)$$

Nous avons donc tracé la conductance quand les deux barrières N-N' et N'-S sont désordonnées pour différents rapports g_S/g_N en figure 5.3. On voit qualitativement une transition entre un régime type « reflectionless tunneling » (maximum de conductance à voltage nul) caractéristique des jonctions tunnel lorsque $g_N \ll g_S$ jusqu'à un comportement de type « re-entrance » où le maximum de conductance est à $eV \simeq E_\tau$ quand $g_S \ll g_N$. On peut expliquer ces deux régimes de façon qualitative. Quand $g_N \ll g_S$, les électrons tentent un grand nombre de fois de traverser la barrière N'-S avant d'y parvenir. Ainsi, à basse énergie les chemins quantiques s'additionnent de façon cohérente donnant une conductance élevée. Quand l'énergie augmente, la contribution cohérente diminue, la conductance aussi. C'est ce qui explique le maximum de conductance à $V = 0$ quand $g_N \ll g_S$. Dans le cas contraire où $g_N \gg g_S$, les électrons sont facilement transformés en trou au voisinage de la barrière N'-S, mais la réflexion Andreev donne un facteur $-i$ qui induit des interférences destructives des ondes électroniques à énergie nulle [116]. Quand on augmente l'énergie, la perte de cohérence peut alors faire augmenter le courant donnant lieu à un maximum de conductance à énergie non nulle. Ce comportement est assez proche de celui que l'on observe dans un fil diffusif [108] mais l'effet est ici plus grand à cause de la structure Fabry-Perot. Nous discuterons de l'influence de la transparence des barrières sur la conductance en même temps que le bruit dans la section 5.3.3.

5.3 Le bruit

Nous passons maintenant à l'étude du bruit en courant. Comme nous l'avons déjà expliqué, il faut développer la relation de conservation du courant spectral (5.8) au premier ordre en λ . On développe donc chaque courant spectral : $\tilde{I}_\beta = \tilde{I}_\beta^0 + \lambda \tilde{I}_\beta^1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$ avec $\beta = N, S$, ou E . On trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_N^1 &= ig_N (\langle \tilde{D}_N \rangle ([\check{G}_{N1}, \check{G}_0] - [\check{G}_{N0}, \check{G}_1]) \\ &\quad - \langle \Gamma_N [\check{G}_{N0}, \check{G}_0] \tilde{D}_N (\{\check{G}_{N1}, \check{G}_0\} - \{\check{G}_{N0}, \check{G}_1\}) \tilde{D}_N \rangle), \\ \tilde{I}_S^1 &= -ig_S (\langle \tilde{D}_S \rangle [\check{G}_S, \check{G}_1] \\ &\quad - \langle \Gamma_S [\check{G}_S, \check{G}_0] \tilde{D}_S \{\check{G}_S, \check{G}_1\} \tilde{D}_S \rangle), \\ \tilde{I}_E^1 &= -\frac{g_D \varepsilon}{4} [\check{G}_E, \check{G}_1], \end{aligned}$$

où $\tilde{D}_\alpha = (4 + \Gamma_\alpha (\{\check{G}_{\alpha 0}, \check{G}_0\} - 2))^{-1}$, $\alpha = N$ ou S , et $\check{G}_{N1} = [\tilde{\tau}_K, \check{G}_{N0}]$. Le bruit en courant à fréquence zéro est donné par :

$$S = \frac{i}{4} \int dE \operatorname{tr} [\tilde{\tau}_K \tilde{I}_S^1]. \quad (5.31)$$

Ici, la matrice inconnue $\check{G}_1$ définie par l'équation (5.13) satisfait à

$$\tilde{I}_N^1 + \tilde{I}_S^1 + \tilde{I}_E^1 = \begin{pmatrix} \hat{I}_R^1 & \hat{I}_K^1 \\ \hat{I}_K^1 & \hat{I}_A^1 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.32)$$

Il y a aussi la condition de normalisation de $\check{G}$ qui impose $\{\check{G}_0, \check{G}_1\} = 0$. On peut y satisfaire en cherchant $\check{G}_1$ de la forme $\check{G}_1 = [\check{G}_0, \check{\phi}]$ où la matrice $\check{\phi}$ est a priori quelconque. Mais en utilisant aussi la relation de symétrie (5.3) qui devient $\check{\phi}^\dagger = -\check{\tau}_L \check{\phi} \check{\tau}_L$, on trouve que l'on peut utiliser la paramétrisation suivante pour $\check{\phi}$ [107] :

$$\check{\phi} = \begin{pmatrix} af_{T0}\hat{\tau}_1 - cf\hat{\tau}_3 & b\hat{\tau}_3 + d \\ c\hat{\tau}_3 & a^*f_{T0}\hat{\tau}_1 + cf\hat{\tau}_3 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

où b , c et d sont réels tandis que a est complexe. On trouvera par la suite que le paramètre c est celui donné par l'équation (5.22).

On insère ensuite cette paramétrisation dans l'équation (5.32) ce qui nous donne ensuite un ensemble complet d'équations pour les paramètres de $\check{\phi}$:

- L'équation donnant a est obtenue grâce à la partie anti-diagonale de la partie retardée de (5.32) : $\text{tr}[\hat{\tau}_1 \hat{I}_R^1] = 0$,
- la partie Keldysh de la même équation donne b : $\text{tr}[\hat{\tau}_2 \hat{I}_K^1] = 0$,
- c est donné par $\text{tr}[\hat{\tau}_1 \hat{I}_K^1] = 0$,
- enfin d s'obtient par $\text{tr}[\hat{I}_K^1] = 0$.

Ensuite, à partir de l'équation (5.31) on trouve le bruit en courant à fréquence nulle [112] :

$$S = \int dE \{ \mathcal{G}(E)[1 - f_{L0}^2] + \mathcal{S}_T(E) f_{T0}^2 \}. \quad (5.34)$$

Nous donnons dans le paragraphe suivant les expressions de a , b , d et $\mathcal{S}_T$. Elles paraissent complexes car longues. Cependant, le seul paramètre a priori difficile à calculer est θ , mais on doit déjà le calculer pour obtenir la conductance. En dehors de certains cas limites, il est donc nécessaire de résoudre l'équation (5.17) numériquement. Mais une fois θ connu, il suffit de le remplacer par sa valeur dans les expressions donnant a , b , d et $\mathcal{S}_T$ pour trouver directement le bruit en courant.

Formules finales donnant le bruit

Pour alléger les expressions on utilise les notations raccourcis $\cosh \theta_1 = c_1$, $\sinh \theta_1 = s_1$, $\cos \theta_2 = c_2$, et $\sin \theta_2 = s_2$. Une fois θ connu, on trouve d'abord a :

$$a = \frac{-2i\epsilon g_D c^2 c_1 s_2 + g_S c^2 c_1 \langle Z_S A_S \rangle + g_N \langle Z_N A_N \rangle}{B} \quad (5.35)$$

avec

$$\begin{aligned} A_S &= 2c_2 + \Gamma_S (2c_1 c_2 Z_S^* + Z_S c_1 c_2 + iZ_S s_2 s_1) s_2 - \Gamma_S^2 |Z_S|^2 c_1 c_2^2 \cosh \theta, \\ A_N &= 2c^2 c_1 s_2 - 4cc_1 s_2 - 2i \sinh \theta - 2\Gamma_N Z_N^* c_2 s_2 (-s_1 - c_1 + c_1 c) (s_1 - c_1 + c_1 c) \\ &\quad + i \sinh \theta \Gamma_N Z_N (\cosh \theta + c_1 c_2 c^2 - 2c_1 c_2 c) \\ &\quad + i \sinh \theta \Gamma_N^2 |Z_N|^2 (s_1 - c_1 + c_1 c) (-s_1 - c_1 + c_1 c) s_2^2, \\ B &= g_N \langle 2iZ_N \cosh \theta - iZ_N^2 \Gamma_N \sinh \theta \rangle + g_S \langle iZ_S^2 \Gamma_S \cosh \theta - 2Z_S \sinh \theta \rangle + 2g_D \epsilon \cosh \theta. \end{aligned}$$

On calcule ensuite b qui est donné par

$$b = c(1 - 2f_{L0}^2) + f_{T0}^2 b_T$$

avec

$$b_T = -2c^2 - \frac{1}{8\epsilon g_D c_1 s_2} \langle |Z_N|^4 [\beta_0 + \Gamma_N \beta_1 + \Gamma_N^2 \beta_2 + \Gamma_N^3 \beta_3 + \Gamma_N^4 \beta_4] \rangle$$

et

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 16 c_1 g_N c_2 a_1 + 16 \epsilon g_D c_1 c c_2 a_2 - 16 s_2 g_N s_1 a_2, \\ \beta_1 &= -8 c_1 g_N s_1 (-1 + 2 c_2^2) (c - 1)^2 + 8 a_1 g_N (2 c_1^2 - 1 - 3 c_1 c_2 + 2 c_2^2) \\ &\quad + a_2 (32 \epsilon g_D c_1^2 c c_2^2 - 32 g_D \epsilon c_1 c c_2 + 24 s_2 g_N s_1), \\ \beta_2 &= -8 c_1 g_N s_1 (c - 1)^2 (1 + c_1 c_2 - 2 c_2^2) + 4 a_1 g_N (4 c_1 c_2 + c_1 c_2^3 - 4 c_2^2 - 4 c_1^2 + 2 + c_1^3 c_2) \\ &\quad + a_2 (8 \epsilon g_D c_1 c_2 (2 c_1^2 c_2^2 + c_1^2 + 2 + c_2^2 - 6 c_1 c_2) + 4 s_2 g_N s_1 (c_1^2 - 2 + c_2^2)), \\ \beta_3 &= -2 (c_1 - c_2)^2 c_1 g_N s_1 (c - 1)^2 - 2 a_1 (c_1 - c_2)^2 g_N (c_1 c_2 - 1) \\ &\quad + 2 a_2 (4 c (c_1 - c_2)^2 \epsilon g_D c_1 c_2 (c_1 c_2 - 1) - (c_1 - c_2)^2 s_2 g_N s_1), \\ \beta_4 &= \epsilon g_D c_1 c c_2 a_2 (c_1 - c_2)^4. \end{aligned}$$

L'expression du paramètre d est plus simple, mais il n'est pas nécessaire de la calculer pour trouver le bruit :

$$d = -2 f_{L0} f_{T0} (1 + c^2 + a_2 \tan \theta_2).$$

Finalement la forme explicite de $\mathcal{S}_T(E)$ est :

$$\mathcal{S}_T = \frac{g_S c_1}{16} \langle |Z_S|^4 [\alpha_0 + \Gamma_S \alpha_1 + \Gamma_S^2 \alpha_2 + \Gamma_S^3 \alpha_3] \rangle$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -16 c^3 s_2 - 8 b_T s_2 - 16 c c_2 a_2, \\ \alpha_1 &= 8 a_1 c s_1 (-1 + 2 c_2^2) + 24 c c_2 a_2 + 16 c^3 c_1 + 24 c^3 s_2 + 12 b_T c_1 - 8 b_T c_1 c_2^2 + 12 b_T s_2, \\ \alpha_2 &= 8 a_1 c s_1 (-2 c_2^2 + 1 + c_1 s_2) + 4 a_2 c c_2 (c_1^2 - 1 - c_2^2) - 4 c^3 (4 c_1 - s_2 c_2^2 + 3 s_2 + s_2 c_1^2) \\ &\quad + b_T (-12 c_1 + 8 c_1 c_2^2 - 6 s_2 + 2 s_2 c_2^2 - 6 s_2 c_1^2), \\ \alpha_3 &= -2 a_1 c s_1 (-c_2^2 + c_1^2 + 1 + 2 c_1 s_2) - 2 a_2 c c_2 (-c_2^2 + c_1^2 + 1 + 2 c_1 s_2) \\ &\quad + 2 c^3 (s_2 + 2 c_1 + s_2 c_1^2 - 2 c_1 c_2^2 - s_2 c_2^2) + b_T (-3 c_1 c_2^2 + s_2 + c_1^3 + 3 c_1 + 3 s_2 c_1^2 - s_2 c_2^2). \end{aligned}$$

Premières discussions du résultat

Commentons maintenant un peu plus en détail le résultat (5.34). On remarque d'abord qu'à l'équilibre, quand $eV \ll k_B T$, on retrouve le théorème fluctuation - dissipation [117] qui relie les fluctuations du courant à l'équilibre à la conductance :

$$S|_{eV \ll k_B T} = 4 k_B T G(T), \quad (5.39)$$

qui s'obtient directement de (5.34) en notant que $f_{T0} = 0$ dans ce cas.

Pour la limite opposée hors-équilibre, le bruit n'est plus lié à conductance du circuit et doit être calculé avec (5.34). Quand la température est suffisamment faible ($k_B T \ll eV$, E_τ), le Facteur de Fano différentiel est devient :

$$F(V) \equiv \frac{1}{2eG(V)} \frac{dS(V)}{dV} = 1 + \frac{\mathcal{S}_T(eV)}{\mathcal{G}(eV)}. \quad (5.40)$$

C'est la quantité sans dimension à laquelle on peut accéder par des mesures de bruit.

Nous allons maintenant discuter du comportement du facteur de Fano à température nulle pour les différentes valeurs de la différence de potentiel à travers le circuit.

5.3.1 Limite cohérente

Dans la limite cohérente ($eV \ll E_\tau$), on peut obtenir une expression analytique fermée du facteur de Fano dépendant du paramètre α , solution de l'équation (5.24). Mais comme son expression est assez compliqué, nous nous contenterons des cas limites.

On constate que, comme G_{coh} , le facteur de Fano est invariant sous l'échange des transparences des barrières $\{\Gamma_{Nn}\} \leftrightarrow \{\Gamma_{Sn'}\}$. Si le métal N' est très bien connecté avec avec le supraconducteur $g_S \gg g_N$, on trouve

$$F_{\text{coh}} = \frac{2 \sum_n R_{Nn}(1 - R_{Nn})}{\sum_n R_{Nn}} \quad \text{avec} \quad R_{Nn} = \frac{\Gamma_{Nn}^2}{(2 - \Gamma_{Nn}^2)^2}, \quad (5.41)$$

c'est le facteur de Fano de la barrière N-N' seule où N' est dans l'état supraconducteur [28]. Dans la limite opposée, $g_N \gg g_S$, on a

$$F_{\text{coh}} = \frac{2 \sum_n R_{Sn}(1 - R_{Sn})}{\sum_n R_{Sn}} \quad \text{avec} \quad R_{Sn} = \frac{\Gamma_{Sn}^2}{(2 - \Gamma_{Sn}^2)^2}, \quad (5.42)$$

la réflexion Andreev a lieu cette fois à la barrière N'-S.

Dans la limite cohérente, le facteur de Fano dépend aussi fortement de la transparence des barrières :

- Quand les deux barrières sont tunnel, on trouve [30, 32, 118] :

$$F_{\text{coh}} = 2 - \frac{5g_N^2 g_S^2}{(g_N^2 + g_S^2)^2} \quad (5.43)$$

le facteur de Fano est maximum et est égal à 2 quand $g_N \ll g_S$ ou $g_N \gg g_S$ ce qui correspond à la valeur d'une seule barrière tunnel metal normal-supraconducteur. Il atteint un minimum $F_{\text{coh}} = 3/4$ quand $g_N = g_S$ [119].

- Le comportement est très différent pour des barrières transparentes ($\Gamma_N = \Gamma_S = 1$) où on trouve [120] :

$$F_{\text{coh}} = \frac{16 g_N^2 g_S^2 (g_N + g_S)}{((g_N + g_S)^2 + 4g_N g_S)(\sqrt{(g_N + g_S)^2 + 4g_N g_S} - (g_N + g_S))} \quad (5.44)$$

le facteur de Fano tend vers 0 quand $g_N \ll g_S$ ou $g_N \gg g_S$ car le facteur de Fano d'une seule barrière transparente est toujours nul. Il atteint ensuite un maximum $F_{\text{coh}} = (\sqrt{2} + 1)/4 \simeq 0.6036$ quand $g_N = g_S$.

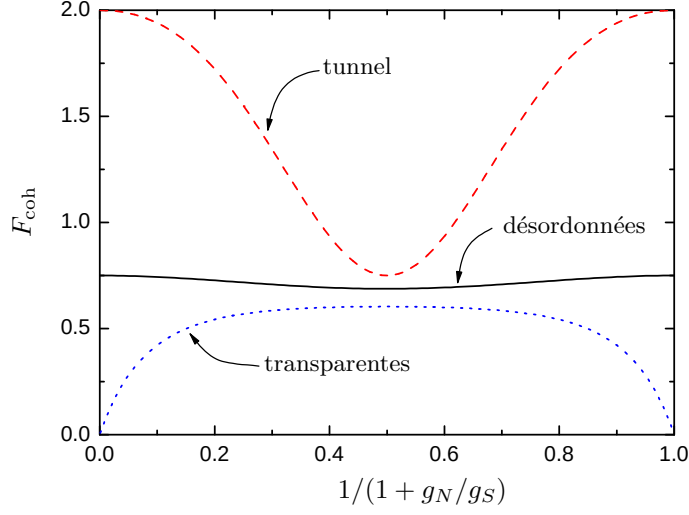


Fig. 5.4: Facteur de Fano de la double jonction N-N'-S dans la limite cohérente à température nulle en fonction de g_0/g_N où $g_0 = g_N g_S / (g_N + g_S)$ est la conductance de la double barrière dans l'état normal. Les deux jonctions sont tunnel, transparentes ou désordonnées.

- Si les deux barrières sont désordonnées, notre calcul permet de montrer que le facteur de Fano passe par un minimum $F_{\text{coh}} \simeq 0.687$ en $g_N = g_S$ entouré de maximums $F_{\text{coh}} = 3/4$ quand $g_N \ll g_S$ ou $g_N \gg g_S$ qui correspond à la valeur d'une barrière désordonnée métal normal - supraconducteur.

5.3.2 Limite incohérente

Passons maintenant à la limite incohérente $eV \gg E_\tau$. À partir de l'équation (5.40) on trouve la formule suivante pour le facteur de Fano différentiel :

$$F_{\text{class}} = \frac{(g_S^{\text{And}})^3 \frac{\sum_n \Gamma_{Nn} (1 - \Gamma_{Nn}/2)}{\sum_n \Gamma_{Nn}} + 2g_N g_S^{\text{And}} (g_N + g_S^{\text{And}}) + 2g_N^3 \frac{\sum_n R_{Sn} (1 - R_{Sn})}{\sum_n R_{Sn}}}{(g_N + g_S^{\text{And}})^3}.$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant la méthode développée par Belzig et Samuelsson dans [121] qui permet d'obtenir dans la limite grande énergie l'ensemble des cumulants des circuits hybrides métal normal - supraconducteur.

L'interprétation physique est la même que pour G_{class} . En effet, dans cette limite, le circuit peut être schématisé par l'association en série de trois barrières de transparence $\{\Gamma_{Nn}\}$, $\{R_{Sn'}\}$, et $\{\Gamma_{Nn}\}$ avec des cavités décohérentes entre elles. La charge élémentaire transférée est celle des paires de Cooper $2e$ (voire la figure 5.2). Or, on peut montrer que le facteur de Fano différentiel de deux jonctions en série séparées par une cavité décohérente est (pour une charge élémentaire e) [23, 122] :

$$F_{12}(g_1, F_1; g_2, F_2) = \frac{g_1^3 F_2 + g_1 g_2 (g_1 + g_2) + g_2^3 F_1}{(g_1 + g_2)^3}, \quad (5.45)$$

où $g_i = g_Q \sum_n \Gamma_{in}$ et $F_i = (\sum_n \Gamma_{in}(1-\Gamma_{in}))/\sum_n \Gamma_{in}$, $i = 1$ ou 2 labélise les jonctions. À partir de l'équation (5.45) on en déduit que le facteur de Fano pour trois barrières en série est simplement $F_{123}(g_1, F_1; g_2, F_2; g_3, F_3) = F_{12}(g_{12}, F_{12}(g_1, F_1; g_2, F_2); g_3, F_3)$ où $g_{12} = g_1 g_2 / (g_1 + g_2)$ est la conductance classique de la jonction 1 et 2 en série. En prenant en compte le fait que la charge élémentaire transportée est $2e$, on montre facilement que

$$F_{\text{class}} = 2 F_{123}(g_1, F_1; g_2, F_2; g_3, F_3); \quad (5.46)$$

avec

$$g_1 = g_2 = g_Q \sum_n \Gamma_{Nn}, \quad g_3 = g_Q \sum_n R_{Sn}, \quad (5.47)$$

$$F_1 = F_2 = \frac{\sum_n \Gamma_{Nn} (1 - \Gamma_{Nn})}{\sum_n \Gamma_{Nn}}, \quad F_3 = \frac{\sum_n R_{Sn} (1 - R_{Sn})}{\sum_n R_{Sn}}. \quad (5.48)$$

Considérons maintenant le cas où une des deux barrières domine le transport. Remarquons d'abord que d'après l'équation (5.45) il faut comparer g_S^{And} à g_N et non pas g_S par rapport à g_N . C'est logique, le métal N' est dans l'état normal. Mais cela peut être important car si on effectue un calcul où N'-S est tunnel [32], cela revient à supposer que $g_S^{\text{And}} \equiv 0$ donc $F_{\text{class}} = 0$ quelle que soit la transparence de la barrière N-N'.

Quand $g_S^{\text{And}} \ll g_N$, c'est l'interface N'-S qui domine le transport de charge, on n'est donc pas surpris de trouver que le facteur de Fano est celui d'une barrière métal normal - supraconducteur seule [28] : $F_{\text{class}} = 2 \sum_n R_{Sn} (1 - R_{Sn}) / \sum_n R_{Sn}$.

Dans la limite opposée, $g_S^{\text{And}} \gg g_N$, on trouve $F_{\text{class}} = \sum_n \Gamma_{Nn} (1 - \Gamma_{Nn}/2) / \sum_n \Gamma_{Nn}$. Ce n'est pas le facteur de Fano d'une barrière N-N' seule. Cela n'a rien d'étonnant car dans la limite où la résistance est dominée par la barrière N-N', la supraconducteur a comme unique effet de doubler le nombre de jonctions (cf. figure 5.2). Le circuit est donc équivalent à deux jonctions identiques séparées par une cavité décohérente dont le facteur de Fano s'obtient immédiatement d'après (5.45) au facteur 2 près du doublement de la charge : $F_{\text{class}} = (F_{N-N'} + 1)/2$. Par contre, il peut sembler surprenant de trouver $F_{\text{class}} = 1/2$ quand la barrière N-N' est transparente alors que pour une jonction simple transparente le bruit est nul. L'origine de cet effet provient de la cavité N' qui est chaotique (ou décohérente) : un électron venant de N qui entre dans N' a une probabilité $1/2$ de sortir par N-N' en électron et une probabilité $1/2$ de sortir par N-N' en trou. Dans le second cas, la charge transférée à travers le circuit est $2e$ avec la probabilité $\Gamma = 1/2$. On a donc une conductance g_N comme pour un contact de Sharvin mais avec un facteur de Fano $2 \times 1/4$ (pour le terme $\Gamma(1 - \Gamma)$).

Remarque sur la formule (5.45)

À l'aide de (5.45) on montre facilement que le facteur de Fano d'un nombre infini de jonctions identiques en série est $F = 1/3$ quelles que soit les transparences choisies pour la barrière seule. On retrouve ainsi très rapidement le facteur de suppression $1/3$ du bruit de grenaille [123] d'un fil diffusif que l'on sait pouvoir être modélisé par un grand nombre de jonctions tunnel en série [104] sans utiliser la distribution des canaux de Dorokhov [124] pour un fil diffusif.

De même on trouve à partir de (5.45) que le facteur de Fano d'un nombre infini de jonctions identiques accolé à un supraconducteur est $F = 2/3$. On retrouve donc très facilement le facteur de suppression $2/3$ du bruit de grenaille d'un fil diffusif connecté à un supraconducteur [28].

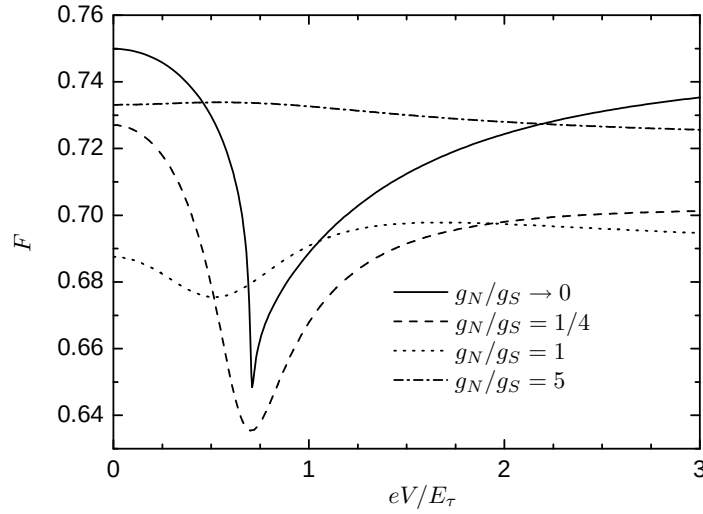


Fig. 5.5: Facteur de Fano différentiel en fonction de eV/E_τ à température nulle pour deux interfaces désordonnées. Un creux apparaît au voisinage de $eV \approx eV/E_\tau$ qui devient de plus en plus piqué quand g_N/g_S diminue.

5.3.3 Energies intermédiaires

Pour des valeurs de l'énergie intermédiaires, on doit étudier le facteur de Fano numériquement, de la même façon que pour la conductance. Notre résultat permet d'étudier n'importe quelle situation. On s'est d'abord intéressé au cas où les deux barrières sont désordonnées comme nous l'avons fait pour la conductance dans la section 5.2.3. On a donc tracé en figure 5.5 le facteur de Fano différentiel pour deux interfaces désordonnées. On constate qu'un minimum apparaît quand $g_N \approx g_S$ et devient de plus en plus piqué quand $g_N/g_S \rightarrow 0$. Ce creux est assez similaire au minimum du facteur de Fano différentiel dans un fil d'or en contact avec un réservoir normal et un réservoir supraconducteur [48].

5.3.4 Effets de la distribution des canaux

Considérons maintenant l'effet crucial de la transparence des canaux. La situation optimale pour cette étude correspond à des conductances égales pour les deux barrières dans l'état normal, $g_N = g_S$, c'est là que l'effet de la transparence des jonctions est maximale dans la structure à double barrière. Nous allons voir qu'en modifiant les transparences pour deux barrières ayant pourtant la même conductance dans l'état normal, on peut fortement changer le comportement de la conductance et du bruit de la double barrière N-N'-S. Pour simplifier la présentation, nous allons nous concentrer sur l'étude du cas de transparences constantes $\Gamma_n = \Gamma, \forall n$. On fait donc varier la transparence et le nombre de canaux de chaque barrière pour garder constant le rapport $g_N/g_S = 1$. Notons que si les canaux sont transparents, il n'est pas nécessaire que la taille de la jonction soit très petite pour garder la même conductance que dans le cas tunnel. Il suffit de considérer une jonction large bi-modale avec une majorité de canaux complètement fermés.

On a calculé la dépendance en énergie de la conductance et du bruit en faisant varier la

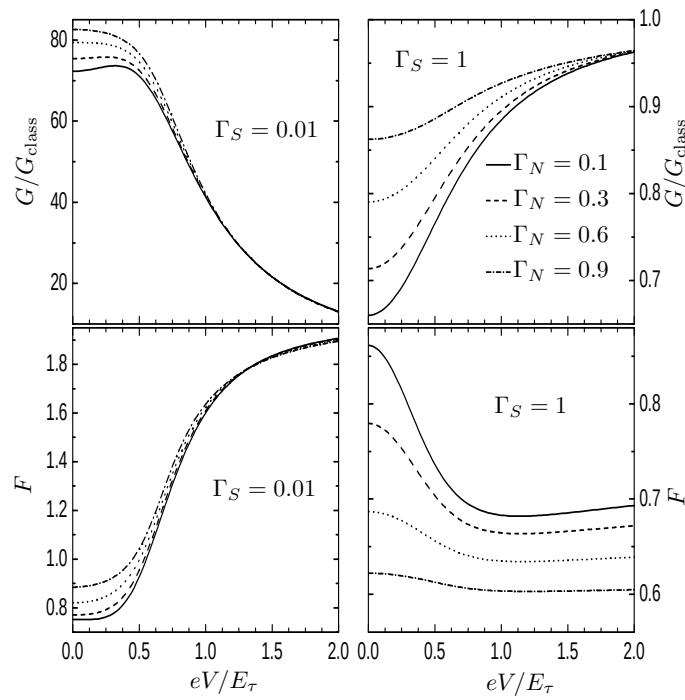


Fig. 5.6: Conductance différentielle et facteur de Fano en fonction de eV/E_τ à température nulle. Les deux barrières ont une distribution de transparence monomodale. Dans l'encart gauche, la jonction N'-S est tunnel ($\Gamma_S = 0.01$) et dans l'encart droit la jonction N'-S est transparente ($\Gamma_S = 1$).

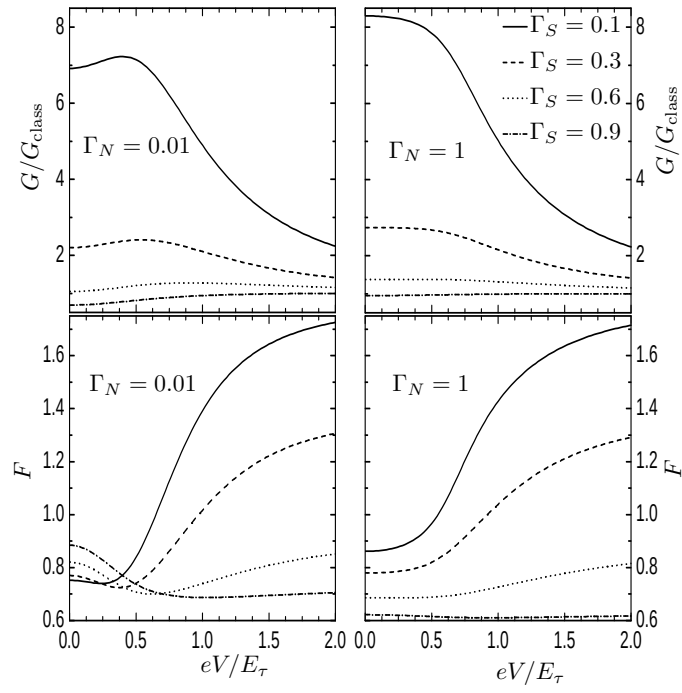


Fig. 5.7: Conductance différentielle et facteur de Fano en fonction de eV/E_τ à température nulle. Les deux barrières ont une distribution de transparence mono-modale. Dans l'encart gauche, la jonction N-N' est tunnel ($\Gamma_N = 0.01$) et dans l'encart droit la jonction N-N' est transparente ($\Gamma_N = 1$).

transparences des interfaces. Nous avons reporté les résultats en figure 5.6 et 5.7. Dans la figure 5.6 on a fixé $\Gamma_S = 0.01$ (à gauche) et $\Gamma_S = 1$ (à droite) et nous faisons varier Γ_N de 0.1 à 0.9. Dans la figure 5.7 on a tracé le même type de courbe en interchangeant le rôle de Γ_N et Γ_S .

Remarquons d'abord l'importance de la transparence pour prédire la valeur de la conductance et du bruit. La connaissance de la conductance seule ne suffit pas pour déterminer les transparences. Par contre, si on connaît à la fois la conductance et le bruit, on obtient des informations importantes sur la distribution des canaux. Une seconde remarque importante est le comportement qualitativement similaire de la conductance et du bruit qui est particulièrement visible quand $\Gamma_N \gg \Gamma_S$ (encart gauche de la figure 5.6). Le facteur de Fano différentiel semble relié linéairement à la conductance différentielle, $F(E) \approx \gamma_0 - \gamma_1 G(E)$ où γ_0 et γ_1 sont des constantes positives. Ce comportement a été démontré analytiquement pour un contact tunnel entre un supraconducteur et un fil diffusif [107]. Ce comportement semble le même sur l'ensemble des courbes avec plus ou moins d'exactitude, le facteur de Fano ressemblant à la conductance renversée. Bien sur, c'est un comportement qualitatif, les facteurs de proportionnalité dépendant de la transparence [107].

5.4 Bruit en courant pour g_S/g_N grand ou petit

Quand une des deux conductances domine, on peut penser que le transport de charge dépend uniquement des caractéristiques de l'interface avec la plus petite conductance. Ce n'est vrai que partiellement.

Cas où $g_N \ll g_S$

Discutons le cas où la conductance de l'interface N-N' est beaucoup plus petite que celle de l'interface N'-S. On part de l'équation (5.8) que l'on divise par g_S , ce qui fait disparaître le terme $\check{I}_N$ dans la limite $g_N/g_S \rightarrow 0$. Ainsi, la fonction de Green de grain central N' ne dépend plus du contact N-N', en particulier, elle devient indépendante du champ de comptage λ qui apparaît seulement dans $\check{I}_N$. Dans ce cas, $\check{G} = \check{G}_0$ et cette fonction de Green dépend uniquement du paramètre θ solution de (5.17) car on a vu que $f_N = f_{L0}$ et f_T dépendent seulement de θ . Une fois que cet angle est connu, $\check{G}$ est connu. Donc en utilisant (5.7a) et (5.10) on trouve directement $I(\lambda)$ que l'on calcul au niveau de la jonction N-N'. On en déduit la fonction génératrice des cumulants $\phi(\lambda)$ par intégration sur λ de $I(\lambda) = -ie/(2t_0) \partial\phi/\partial\lambda$ [22] :

$$\phi(\lambda) = -\frac{t_0}{h} \sum_n \int dE \operatorname{Tr} \ln \left[1 + \frac{\Gamma_{Nn}}{4} (\{\check{G}_N(\lambda), \check{G}(\theta)\} - 2) \right], \quad (5.49)$$

Le courant et le bruit sont alors donnés par (4.60) et (5.12), mais on a aussi accès à tous les autres cumulants.

Il semble donc que le transport ne dépende seulement des propriétés de la barrière N-N' qui a la plus petite conductance. Mais en fait, la transparence de la barrière N'-S modifie aussi le transport par l'intermédiaire de l'angle θ qui, dans cette limite, est donné par :

$$\left\langle \frac{1}{1 + \Gamma_S(i \sinh \theta - 1)/2} \right\rangle \cosh \theta - \varepsilon \sinh \theta = 0. \quad (5.50)$$

Ainsi, Γ_S , en influant sur θ , influe sur l'état du grain N'. Si par exemple la barrière N'-S est tunnel $\Gamma_{Sn} \ll 1 \forall n$, on trouve que $\tilde{G}$ est une fonction de Green BCS avec un gap effectif égal à E_τ . Cela veut dire que le courant est donné par la formule de Blonder *et al.* [125] et le bruit par la formule de Khlus [27] qui sont valables pour une seule barrière NS. Si la barrière N'-S n'est pas tunnel, la fonction de Green n'est plus de type BCS. Le courant et le bruit sont alors donnés par l'équation (5.49) une fois que l'on a spécifié la distribution des transparences des deux jonctions. Ainsi, le transport de charge dépend de la transparence de N'-S même si $g_N \ll g_S$. Cet effet a été étudié pour la première fois par Melsen *et al.* dans [126] quand ils s'intéressaient à la densité d'états d'une cavité chaotique connectée à un supraconducteur.

Il est aussi intéressant de discuter de la condition $g_S \gg g_N$ elle-même. On peut voir de l'équation (5.27), qui donne la conductance dans la limite incohérente, que la condition est plutôt $g_S^A \gg g_N$. Dans le régime où N'-S est tunnel on trouve alors $F = 2$ si $\varepsilon < 1$ car le transport est dominé par la réflexion Andreev et $F = 1$ pour $\varepsilon > 1$ car le transport est dominé par le tunnel des quasi-particules au niveau de N-N'. Mais si on prend d'abord la limite $\Gamma_S \rightarrow 0$, on ne pourra jamais avoir la condition $g_S^A \gg g_N$ car $g_S^A \equiv 0$. C'est pour cela que les calculs qui ont été faits à l'aide des conditions au bords tunnel de Kuprianov-Luckichev [58] ne donnent pas le même résultat dans la limite $g_N/g_S \rightarrow 0$. Par exemple, si on prend la limite g_1/g_2 dans l'équation (28) de l'article [32] on trouve $F(\varepsilon) = 2$ pour $\varepsilon < 1$ et $F(\varepsilon) = 2 - 1/\varepsilon^2$ pour $\varepsilon > 1$. Les deux calculs sont valables pour des barrières tunnels mais dans [32] la limite $g_S^A = \langle \Gamma_S \rangle g_S / 2 \ll g_N \ll g_S$ est prise implicitement. Cela montre bien le grand intérêt de calculer le bruit pour des transparences quelconques comme nous l'avons fait.

Cas où $g_N \gg g_S$

On peut faire le même type d'étude dans la limite opposée $g_N \gg g_S$. Cependant le résultat est plus trivial car dans cette limite l'équation (5.17) donnant θ donne $\sinh(\theta) = 0$ donc $\theta = 0$ quelle que soit la distribution des transparences à l'interface N-N'. Le grain N' est donc toujours dans l'état normal quelle que soit la valeur de ε . Ainsi le transport de charge sera simplement celui de la barrière N'-S seule où N' est normal. On aura donc $G = g_S^A$ et $F = 2 \sum_n R_{Sn}(1 - R_{Sn}) / \sum_n R_{Sn}$ pour tout $\varepsilon \ll \Delta$.

5.5 Discussion à la lumière de récentes expériences

Intéressons-nous maintenant à quelques expériences récentes de mesure de transport dans des structures hybrides métal normal - supraconducteur [15, 109]. On trouve en général que la théorie quasi-classique que nous avons utilisée donne un accord qualitativement bon avec les expériences de dépendance en énergie de la conductance, même si un accord quantitatif est difficile à obtenir. En général, quand on peut négliger les effets de chauffage et le blocage de Coulomb, la difficulté principale est de deviner la distribution de la transparence des canaux.

Prenons l'exemple de Quirion *et al.* [109] où ils étudient la dépendance en énergie de la conductance de la structure étudiée dans ce chapitre. Dans le premier échantillon qu'ils ont étudié, avec la procédure de fabrication utilisée, ils s'attendent à ce que $g_N \approx g_S$ et que les jonctions soient tunnel $\Gamma_N, \Gamma_S \ll 1$. L'accord entre les mesures et la formule de Volkov *et al.* [108] obtenue dans la limite tunnel est bon. Cependant dans le second échantillon où N-N' est inchangée, on

s'attend à ce que $g_S \gg g_N$ et qu'il y ait un certain nombre de canaux transparents dans la barrière N'-S car la conductance par unité de surface est plus grande que dans l'échantillon précédant, cependant la distribution de Γ_S reste inconnue. Les auteurs ont trouvé qu'il n'était pas possible d'ajuster les données expérimentales avec la théorie tunnel de Volkov. Mais en même temps, si on se réfère à la courbe en haut à gauche de la figure 5.7, on constate que l'on ne peut pas expliquer un pic à voltage fini observé dans la conductance avec une transparence constante Γ_S proche de 1. Les canaux de la barrière N'-S n'ont donc pas une transparence constante. Il est en fait très difficile d'essayer d'ajuster la conductance quand trop de paramètres sont inconnus, mais en faisant des mesures de bruit dans le même échantillon ce la peut rendre cet ajustement possible. De plus la configuration étudiée dans [109] est idéale car la double barrière permet de garder un courant faible et ainsi d'éviter les effets de chauffage. Nous pensons donc qu'en faisant des mesures jointes de bruit et de courant, on doit pouvoir obtenir des informations nouvelles sur la transparence des barrières et ainsi faire des interprétations quantitatives de mesures.

Intéressons-nous maintenant à une seconde expérience du même groupe [15]. Ils ont mesuré le bruit dans une jonction tunnel semiconducteur - supraconducteur et ont observé une transition de facteur de Fano de 2 à 1 en augmentant le voltage, ce qui est caractéristique de passage d'un transport par réflexion Andreev à un transport par les quasi-particules. Cependant, on ne comprend toujours pas vraiment pourquoi l'énergie caractéristique de transition est beaucoup plus petite que le gap du supraconducteur. Une explication possible peut être fournie par nos calculs. En effet, l'interface étant complexe, on pourrait la modéliser par une double barrière constituée d'une région intermédiaire normale bien connectée au supraconducteur et connectée par l'intermédiaire d'une barrière tunnel Schottky au métal normal. On se trouve alors dans le cas discuté section 5.4 où $g_N \ll g_S$ et le comportement observé peut être interprété par une transition du facteur de Fano de 2 à 1 à l'énergie E_τ plus petite que la gap supraconducteur.

Notons enfin qu'il existe de récentes expériences de mesure de conductance dans des structures N-N'-S où les barrières sont des points quantiques dont on peut contrôler le nombre de canaux de transmission et la transparence [127, 128].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le dépendance en énergie du bruit en courant d'une double barrière N-N'-S pour des valeurs arbitraires de la transparence des barrières. L'expression donnant le bruit ne dépend d'un seul nombre complexe θ qui doit être calculer numériquement. Ce nombre est aussi indispensable pour la conductance. Nous avons aussi décrit analytiquement plusieurs cas limites : g_N/g_S grand ou petit, le cas complètement cohérent $eV \ll k_B T$ et le cas complètement incohérent $eV \gg k_B T$. Nous avons aussi étudié numériquement la dépendance en énergie du bruit dans le cas où les deux conductances sont égales $g_N = g_S$. On peut tirer quelques conclusions générales de notre analyse : la dépendance en énergie a une structure beaucoup plus prononcée que dans le cas d'une structure étendue comme par exemple un fil [107]. Nous avons aussi vu que la dépendance en énergie du courant et du bruit sont qualitativement reliés bien que quantitativement indépendants et que le distribution des transparences des barrières joue un rôle important dans la détermination du bruit et du courant comme le montre les figures 5.6 et 5.7. Finalement, à la lumière de récentes expériences, on a pu voir que des mesures simultanées de

courant et de bruit peuvent donner des indications importantes sur la transparence des barrières, qui sont indispensables si l'on veut interpréter quantitativement les expériences.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la dépendance en énergie du bruit en courant dans les circuits hybrides métal normal - supraconducteur.

Nous avons d'abord étudié dans le chapitre deux la dépendance en énergie du bruit en courant d'une jonction tunnel métal normal - supraconducteur en prenant en compte la diffusion des électrons sur les impuretés du réseau cristallin. On a montré que si les réservoirs sont à l'équilibre thermodynamique, le bruit et le courant sont proportionnels mais que si les réservoirs sont hors-équilibre le bruit et le courant sont indépendants. Nous avons aussi proposé dans ce cas une méthode pour calculer le bruit de façon quantitative une fois la géométrie de la jonction connue.

Ensuite, dans le chapitre trois, nous avons étudié une géométrie de type séparateur de faisceau constituée d'un supraconducteur connecté à deux métaux normaux par des jonctions tunnel. Nous avons montré que la corrélation des courants traversant les deux jonctions est une quantité qui dépend des propriétés de transport non-local du circuit, et que l'on peut par un simple ajustement des potentiels mesurer l'amplitude de la réflexion Andreev croisée ou du cotunneling élastique et changer le signe de la corrélation croisée. Nous avons aussi étudié l'effet d'un environnement électromagnétique sur le transport de charge dans cette structure et montré que l'environnement induit des non-linéarités qui peuvent expliquer une conductance croisée non nulle. Cependant, cela n'explique pas pourquoi il a été observé dans une expérience récente [59] que la conductance croisée est dominée par le cotunneling élastique à faible voltage. Une perspective est donc d'essayer d'expliquer ce phénomène en prenant notamment en compte les interactions électron - électron de façon locale et non globale comme on l'a fait avec l'environnement électromagnétique.

Finalement dans le chapitre cinq, on s'est intéressé à l'effet de la transparence des barrières sur la dépendance en énergie du courant dans une double barrière en série métal normal - métal normal - supraconducteur. Nous avons montré que la transparence des barrières joue un rôle important dans la dépendance en énergie du bruit, et qu'en combinant des mesures de bruit à des mesures de conductance on peut obtenir des informations nouvelles sur la transparence qui est souvent difficile à contrôler lors de la fabrication des échantillons. Il serait intéressant d'appliquer la même technique à une structure de type séparateur de faisceau pour notamment voir les effets de la transparence des barrières sur la dépendance en énergie de la conductance croisée et de la corrélation croisée.

Nous avons ainsi vu tout au long de cette thèse que les effets d'interférences des électrons dans les circuits mésoscopiques couplés à l'effet proximité d'un supraconducteur et à la diffusion sur les impuretés donnent des comportements non triviaux de la dépendance en énergie du bruit en courant que l'on rencontre pas dans la conductance. La mesure du bruit permet donc d'obtenir

des informations nouvelles sur le transport de charge.

Annexe A

Rappels sur la théorie perturbative hors-équilibre

A.1 Un système hors-équilibre

Dans cette appendice, nous donnons quelques éléments de la théorie perturbative hors-équilibre qui sert de base au formalisme de Keldysh [97]. On dérive cette méthode à partir de l'hamiltonien tunnel utilisé dans les chapitres 2 et 3. On considère donc un hamiltonien H de la forme $H = H_0 + H_T$ où la partie libre H_0 représente les réservoirs d'électrons et le terme H_T permet aux électrons de passer à travers les jonctions tunnel, c'est l'élément perturbatif considéré comme « petit » devant la partie libre.

On impose une différence de potentiel de part et d'autre de la jonction. Le système n'est plus à l'équilibre thermodynamique car la matrice densité n'est pas proportionnelle à $\exp(-\beta(H_0 - \mu_L N_L - \mu_R N_R))$, ici $N_{L(R)}$ est l'opérateur nombre de particules à gauche (droite) de la jonction et $\mu_{L(R)}$ le potentiel chimique associé. La différence de potentiel est $eV = \mu_L - \mu_R$ ($\beta = 1/(k_B T)$).

On suppose que l'on connecte les deux réservoirs avec H_T à un instant t_0 que l'on fera tendre vers $-\infty$. À tout instant $t < t_0$, on est en présence de deux réservoirs d'électrons qui ne se voient pas. Ainsi, bien que la différence de potentiel soit non-nulle, le système est à l'équilibre thermodynamique. On définit alors sans ambiguïté l'opérateur densité dans l'ensemble grand canonique :

$$\rho_0 = \frac{e^{-\beta(H_0 - \mu_L N_L - \mu_R N_R)}}{\text{tr}[e^{-\beta(H_0 - \mu_L N_L - \mu_R N_R)}]} . \quad (\text{A.1})$$

La valeur moyenne d'un opérateur quelconque est alors $\langle A \rangle_0 = \text{tr}[\rho_0 A]$.

Ensuite, à l'instant t_0 , on branche la perturbation H_T ce qui brise l'équilibre thermodynamique. On traite alors H_T de façon perturbative, la différence de potentiel restant arbitraire.

A.2 Les différentes représentations

Pour bien mettre en place la théorie perturbative, il est nécessaire de rappeler brièvement les différentes représentations opératoriels utilisées en mécanique quantique.

Représentation Heisenberg

Jusqu'à présent, les opérateurs que l'on a considérés étaient implicitement écrits en représentation Schrödinger. On définit de la manière suivante la représentation Heisenberg d'un opérateur A_S :

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A_S U(t, t_0), \quad (\text{A.2})$$

$U(t, t_0)$ étant l'opérateur d'évolution complet défini par

$$\begin{aligned} i \frac{dU}{dt}(t, t_0) &= H U(t, t_0) \\ U(t_0, t_0) &= \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Cet opérateur est unitaire $U^\dagger = U^{-1}$ et satisfait la loi de groupe

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3). \quad (\text{A.4})$$

L'équation d'évolution temporelle de l'opérateur $A_H(t)$ est donnée par l'équation

$$i \frac{dA_H}{dt}(t) = [A_H(t), H] + i U^\dagger(t, t_0) \frac{dA_S}{dt} U(t, t_0). \quad (\text{A.5})$$

Pour la plupart des opérateurs que l'on rencontre, le dernier terme en dA_S/dt est nul. Cependant, il existe des exceptions comme pour l'opérateur densité :

$$i \frac{d\rho_S}{dt} = -[\rho_S, H]. \quad (\text{A.6})$$

Cela provient du fait que cet opérateur peut être décomposé sur une base de projecteurs de la façon suivante : $\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, chaque $|\psi_i\rangle$ vérifiant l'équation de Schrödinger. Ainsi, en utilisant (A.5) et (A.6), on obtient $\frac{d\rho_H}{dt} = 0$. L'opérateur densité est constant en représentation Heisenberg, $\rho_H = \rho_0$. La valeur moyenne d'un opérateur A au temps t ou de deux opérateurs à des temps différents est alors définie sans ambiguïté par :

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}\{\rho_0 A_H(t)\} = \langle A_H(t) \rangle_0 \quad (\text{A.7})$$

$$\langle A(t_1) B(t_2) \rangle = \text{tr}\{\rho_0 A_H(t_1) B_H(t_2)\} = \langle A_H(t_1) B_H(t_2) \rangle_0. \quad (\text{A.8})$$

Représentation interaction

On définit de la manière suivante la représentation interaction d'un opérateur A_S :

$$A_0(t) = U_0^\dagger(t, t_0) A_S U_0(t, t_0), \quad (\text{A.9})$$

$U_0(t, t_0)$ étant l'opérateur d'évolution libre défini par

$$\begin{aligned} i \frac{dU_0}{dt}(t, t_0) &= H_0 U_0(t, t_0) \\ U_0(t_0, t_0) &= \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Comme H_0 ne dépend pas du temps, on a $U_0(t, t_0) = \exp[-i(t - t_0)H_0]$. Comme U , U_0 est unitaire et satisfait une loi de groupe du même type.

L'opérateur S

Nous allons maintenant établir un lien entre les représentations Heisenberg et interaction. Pour cela nous introduisons l'opérateur S défini par $U(t, t_0) = U_0(t, t_0)S(t, t_0)$. En utilisant (A.3) et (A.10), on obtient l'équation d'évolution de S :

$$i \frac{dS}{dt}(t, t_0) = V_0(t)S(t, t_0) \quad (\text{A.11})$$

$$S(t_0, t_0) = \mathbb{1} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{avec} \quad V_0(t) = U_0^\dagger(t, t_0) H_T U_0(t, t_0).$$

La solution formelle est donnée par

$$\begin{aligned} S(t, t_0) &= \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_n T[V_0(t_1) \dots V_0(t_n)] \\ &\equiv T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt_1 V_0(t_1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

où T est le T-produit qui ordonne les opérateurs du temps le plus récent au plus ancien. Il est défini par

$$T[A(t)B(t')] = \theta(t - t')A(t)B(t') + \varepsilon \theta(t' - t)B(t')A(t), \quad (\text{A.14})$$

avec $\varepsilon = +1$ si les opérateurs sont bosoniques, et -1 si ils sont fermioniques. Cette relation se généralise sans difficulté pour un nombre n d'opérateur. L'opérateur S est unitaire $S^\dagger = S^{-1}$ et satisfait la loi de groupe

$$S(t_1, t_2)S(t_2, t_3) = S(t_1, t_3). \quad (\text{A.15})$$

Nous pouvons finalement écrire les valeurs moyennes (A.7) de la façon suivante :

$$\langle A(t) \rangle = \langle S^\dagger(t, t_0) A_0(t) S(t, t_0) \rangle_0 \quad (\text{A.16})$$

$$\langle A(t_1)B(t_2) \rangle = \langle S^\dagger(t_1, t_0) A_0(t_1) S(t_1, t_2) B_0(t_2) S(t_2, t_0) \rangle_0 \quad (\text{A.17})$$

A.3 Le contour de Keldysh

Pour calculer perturbativement des valeurs moyennes comme (A.17), il faut développer l'opérateur S ordre par ordre. Le formalisme de Keldysh [97] va nous permettre de le faire de façon systématique. On invite le lecteur souhaitant plus de détails à se reporter à l'article de revue de Rammer et Smith [91].

A.3.1 Formule de Kubo

Au premier ordre en perturbation, il est facile de calculer des valeurs moyennes comme par exemple celle de $\langle A(t) \rangle = \langle S^\dagger(t, -\infty) A_0(t) S(t, -\infty) \rangle_0$ en développant l'opérateur S :

$$S(t, -\infty) = 1 - i \int_{-\infty}^t dt_1 V_0(t_1) + \mathcal{O}(V_0^2), \quad (\text{A.18})$$

$$\text{donc} \quad \langle A(t) \rangle = \langle A(t) \rangle_0 - i \int_{-\infty}^t dt_1 \langle [A_0(t), V_0(t_1)] \rangle_0 + \mathcal{O}(V_0^2). \quad (\text{A.19})$$

C'est la formule de Kubo. Pour évaluer les ordres supérieurs, cette méthode s'avère rapidement laborieuse notamment pour trouver $\langle A(t_1) B(t_2) \rangle$ (Eq. (A.17)) où il y a trois opérateurs S à développer et ordonner temporellement. On utilise alors le formalisme de Keldysh qui est plus systématique à utiliser aux ordres élevés car, comme on va le voir, il n'y a qu'un seul opérateur S_C (qui diffère peu de S) à développer en puissance de V_0 .

A.3.2 T_C -produit et opérateur S_C

On effectue quelques manipulations algébriques sur les valeurs moyennes que l'on souhaite calculer. Prenons un exemple qui nous est utile dans ce mémoire, le corrélateur à deux temps du courant dont la transformée de Fourier donne le bruit :

$$\begin{aligned} \langle I(t_1) I(t_2) \rangle &= \langle S(-\infty, t_1) I_0(t_1) S(t_1, t_2) I_0(t_2) S(t_2, -\infty) \rangle_0 \\ &= \langle S(-\infty, t_1) I_0(t_1) S(t_1, +\infty) S(+\infty, t_1) S(t_1, t_2) I_0(t_2) S(t_2, -\infty) \rangle_0 \\ &= \langle \tilde{T} [S(-\infty, +\infty) I_0(t_1)] T [S(+\infty, -\infty) I_0(t_2)] \rangle_0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Ici $\tilde{T}$ est l'anti T -produit qui ordonne les opérateurs dans le sens contraire du T -produit (Eq. (A.14)) :

$$\tilde{T}[A(t) B(t')] = \theta(t' - t) A(t) B(t') + \varepsilon \theta(t - t') B(t') A(t). \quad (\text{A.21})$$

avec $\varepsilon = +1$ si les opérateurs sont bosoniques, et -1 si ils sont fermioniques.

On introduit alors un opérateur T_C qui ordonne de droite à gauche les opérateurs le long du contour temporel de Keldysh C . Il est fait d'une branche « $+$ » allant de $-\infty$ à $+\infty$ suivi d'une branche « $-$ » allant de $+\infty$ à $-\infty$, comme le montre la figure A.1. Finalement, on aboutit à :

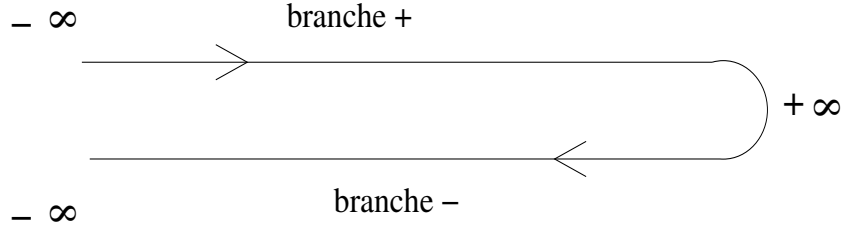
$$\langle I(t_1) I(t_2) \rangle = \langle T_C [S_C I_0(t_1^-) I_0(t_2^+)] \rangle_0 \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad S_C &= T_C \exp \left[-i \int_C dt V_0(t) \right] \\ &= T_C \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt^+ V_0(t^+) + i \int_{-\infty}^{+\infty} dt^- V_0(t^-) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Pour l'opérateur courant seul on obtient

$$\langle I(t) \rangle = \langle T_C [S_C I_0(t^+)] \rangle_0 = \langle T_C [S_C I_0(t^-)] \rangle_0. \quad (\text{A.24})$$

On peut alors calculer les valeurs moyennes réécrites sous cette forme en développant l'opérateur S_C ordre par ordre.

Fig. A.1: Le contour C de Keldysh.

A.3.3 Fonctions de Green

Le théorème de Wick reste valable le long du contour de Keldysh, mais maintenant les fonctions de Green à deux temps sont des matrices 2×2 car chaque indice temporel de la fonction de Green peut se situer sur la partie $+$ ou $-$ du contour de Keldysh.

On définit par exemple une fonction de Green libre matricielle de la façon suivante :

$$\check{g}_{\mathbf{k}\sigma}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} g_{\mathbf{k}\sigma}^{++}(t_1, t_2) & g_{\mathbf{k}\sigma}^{+-}(t_1, t_2) \\ g_{\mathbf{k}\sigma}^{-+}(t_1, t_2) & g_{\mathbf{k}\sigma}^{--}(t_1, t_2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$= -i \begin{pmatrix} \langle T[a_{\mathbf{k}\sigma}(t_1)a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t_2)] \rangle_0 & -\langle a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t_2)a_{\mathbf{k}\sigma}(t_1) \rangle_0 \\ \langle a_{\mathbf{k}\sigma}(t_1)a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t_2) \rangle_0 & \langle \tilde{T}[a_{\mathbf{k}\sigma}(t_1)a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t_2)] \rangle_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

avec $g_{\mathbf{k}\sigma}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(t_1, t_2) = -i \langle T_C[a_{\mathbf{k}\sigma}(t_1^{\varepsilon_1})a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t_2^{\varepsilon_2})] \rangle_0$, $\varepsilon_i = \pm$. Les quatre composantes de cette matrice ne sont pas toutes indépendantes. Si on fait le changement de base suivant on obtient :

$$\check{g} \rightarrow \frac{\check{\mathbb{I}} - i\check{\tau}_2}{\sqrt{2}} \check{\tau}_3 \begin{pmatrix} g^{++} & g^{+-} \\ g^{-+} & g^{--} \end{pmatrix} \frac{\check{\mathbb{I}} + i\check{\tau}_2}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} g^R & g^K \\ 0 & g^A \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

$$\text{avec} \quad g_{\mathbf{k}\sigma}^A(t_1, t_2) = +i\theta(t_2 - t_1) \langle \{a_{\mathbf{k}\sigma}(t_1), a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t_2)\} \rangle_0 \quad (\text{A.28})$$

$$g_{\mathbf{k}\sigma}^R(t_1, t_2) = -i\theta(t_1 - t_2) \langle \{a_{\mathbf{k}\sigma}(t_1), a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t_2)\} \rangle_0 \quad (\text{A.29})$$

$$g_{\mathbf{k}\sigma}^K(t_1, t_2) = -i \langle [a_{\mathbf{k}\sigma}(t_1), a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t_2)] \rangle_0. \quad (\text{A.30})$$

Les matrices τ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli. On peut ensuite utiliser les méthodes perturbatives standards à deux différences près : les fonctions de Green sont ici des matrices 2×2 , et pour des potentiels extérieurs chaque vertex sort avec une matrice $\check{\tau}_3$ car le signe devant V_0 est différent sur chaque branche du contour de Keldysh, cf. Eq. (A.22).

Bibliographie

- [1] A. Kastalsky, A. W. Kleinsasser, L. H. Greene, R. Bhat, F. P. Milliken, et J. P. Harbison, Phys. Rev. Lett. **67**, 3026 (1991).
- [2] P. Charlat, H. Courtois, P. Gandit, D. Mailly, A. F. Volkov, et B. Pannetier, Phys. Rev. Lett. **77**, 4950 (1996).
- [3] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957).
- [4] R. Landauer, Z. Phys. B **68**, 217 (1987).
- [5] Y. Imry, dans *Directions in Condensed Matter Physics*, édité par G. Grinstein et G. Mazenko (World Scientific, Singapore, 1986).
- [6] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).
- [7] M. Büttiker, IBM J. Res. Dev **32**, 317 (1988).
- [8] Y. M. Blanter et M. Büttiker, Phys. Rep. **336**, 1 (2000).
- [9] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **65**, 2901 (1990).
- [10] A. Kumar, L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin, et B. Etienne, Phys. Rev. Lett. **76**, 2778 (1996).
- [11] M. Reznikov, M. Heiblum, H. Shtrikman, et D. Mahalu, Phys. Rev. Lett. **75**, 3340 (1995).
- [12] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin, et B. Etienne, Phys. Rev. Lett. **79**, 2526 (1997).
- [13] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin, et D. Mahalu, Nature **339**, 162 (1997).
- [14] X. Jehl, M. Sanquer, R. Calemczuk, et D. Mailly, Nature (London) **405**, 50 (2000).
- [15] F. Lefloch, C. Hoffmann, M. Sanquer, et D. Quirion, Phys. Rev. Lett. **90**, 067002 (2003).
- [16] L.-H. Reydellet, P. Roche, D. C. Glattli, B. Etienne, et Y. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 176803 (2003).
- [17] L. S. Levitov, H. W. Lee, et G. B. Lesovik, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996).

-
- [18] B. Reulet, J. Senzier, et D. E. Prober, Phys. Rev. Lett. **91**, 196601 (2003).
 - [19] Yu. Bomze, G. Gershon, D. Shovkun, L. S. Levitov et M. Reznikov, Preprint : cond-mat/0504382 (2005).
 - [20] Ph. A. Martin, Physique statistique des processus irréversibles, cours de DEA, ENS Lyon.
 - [21] Y. V. Nazarov, ed., *Quantum Noise in Mesoscopic Physics* (Kluwer, Dordrecht, 2002).
 - [22] W. Belzig et Y. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **87**, 197006 (2001).
 - [23] Y. V. Nazarov et D. A. Bagrets, Phys. Rev. Lett. **88**, 196801 (2002).
 - [24] Y. V. Nazarov, Ann. Phys. (Leipzig) **8**, 193 (1999).
 - [25] B. A. Muzykantskii et D. E. Khmelnitskii, Phys. Rev. B **50**, 3982 (1994).
 - [26] W. Belzig et Y. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **87**, 067006 (2001).
 - [27] V. A. Khlus, Sov. Phys. JETP **66**, 1243 (1987).
 - [28] M. J. M. de Jong et C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **49**, R16070 (1994).
 - [29] M. P. V. Stenberg et T. T. Heikkilä, Phys. Rev. B **66**, 144504 (2002).
 - [30] J. Börlin, W. Belzig, et C. Bruder, Phys. Rev. Lett. **88**, 197001 (2002).
 - [31] P. Samuelsson et M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **89**, 046601 (2002).
 - [32] P. Samuelsson, Phys. Rev. B **67**, 054508 (2003).
 - [33] Y. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **73** (1994).
 - [34] F. W. J. Hekking et Y. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **71**, 1625 (1993).
 - [35] F. W. J. Hekking et Y. V. Nazarov, Phys. Rev. B **49**, 6847 (1994).
 - [36] J. Bardeen, L. N. Cooper, et J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108** (1957).
 - [37] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (McGraw Hill, New York, 1975).
 - [38] A. F. Andreev, Sov. Phys. JETP **19** (1964).
 - [39] R. P. Feynman et A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, 1965).
 - [40] F. Pistolesi, G. Bignon, et F. W. J. Hekking, Phys. Rev. B **69**, 214518 (2004).
 - [41] Y. Kim et X.-G. Wen, Phys. Rev. B **48**, 6319 (1993).
 - [42] G. Falci, R. Fazio, A. Tagliacozzo, et G. Giaquinta, Eur. Phys. Lett. **30**, 169 (1995).
 - [43] L. S. Levitov et M. Reznikov, Phys. Rev. B **70**, 115305 (2004).

- [44] E. V. Sukhorukov and D. Loss, in *Electronic Correlations : From Meso- to Nano-Physics*, edited by G. Montambaux, T. Martin, and J. Tran Thanh Vân, XXXVI Rencontre de Moriond ; (EDP Sciences, 2001) also cond-mat/0106307.
- [45] L. S. Levitov, dans *Quantum Noise in Mesoscopic Physics*, édité par Y. V. Nazarov (Kluwer, Dordrecht, 2003).
- [46] T. Martin, Phys. Lett. A **220** (1996).
- [47] A. A. Kozhevnikov, R. J. Schoelkopf, et D. E. Prober, Phys. Rev. Lett. **84**, 3398 (2000).
- [48] B. Reulet, A. A. Kozhevnikov, D. E. Prober, W. Belzig, et Y. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **90**, 066601 (2003).
- [49] H. Pothier, S. Gueron, D. Esteve, et M. H. Devoret, Phys. Rev. Lett. **73**, 2488 (1994).
- [50] E. Prada et F. Sols, Eur. Phys. J. B **40**, 379 (2004).
- [51] E. Akkermans et G. Montambaux, *Physique mésoscopique des électrons et des photons* (CNRS Editins, 2004).
- [52] H. Pothier, S. Gueron, N. O. Birge, D. Esteve, et M. H. Devoret, Z. Phys. B : Condens. Matter **104**, 178 (1997).
- [53] K. E. Nagaev, Phys. Lett. A **169**, 103 (1992).
- [54] K. E. Nagaev, Phys. Rev. B **52**, 4740 (1995).
- [55] V. I. Kozub et A. M. Rudin, Phys. Rev. B **52**, 7853 (1995).
- [56] B. L. Altshuler et A. G. Aronov, dans *Electron-electron Interactions in Disordered Systems*, édité par A. L. Efros et M. Pollak (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [57] W. Belzig, dans *Quantum Noise in Mesoscopic Physics*, édité par Y. V. Nazarov (Kluwer, Dordrecht, 2003).
- [58] M. Y. Kuprianov et V. F. Lukichev, Sov. Phys. JEPT **67**, 1163 (1988).
- [59] S. Russo, M. Kroug, T. M. Klapwijk, et A. F. Morpurgo, Phys. Rev. Lett. **95**, 027002 (2005).
- [60] J. M. Byers et M. E. Flatte, Phys. Rev. Lett. **74**, 306 (1995).
- [61] G. Deutscher et D. Feinberg, Appl. Phys. Lett. **76**, 487 (2000).
- [62] P. Recher, E. V. Sukhoroukov, et D. Loss, Phys. Rev. B **63**, 165314 (2001).
- [63] G. Falci, D. Feinberg, et F. W. J. Hekking, Eur. Phys. Lett. **54**, 255 (2001).
- [64] D. V. Averin et Y. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **65** (1990).

- [65] C. Bena, S. Vishveshwara, L. Balents, et M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **89**, 2037901 (2002).
- [66] P. Recher et D. Loss, Phys. Rev. B **65**, 165327 (2002).
- [67] P. Recher et D. Loss, Phys. Rev. Lett. **91**, 267003 (pages 4) (2003).
- [68] M. Büttiker, Phys. Rev. B **46**, 12485 (1992).
- [69] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland, et C. Schönenberger, Science **284**, 296 (1999).
- [70] W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu, , et Y. Yamamoto, Science **284**, 299 (1999).
- [71] M. P. Anantram et S. Datta, Phys. Rev. B **53** (1996).
- [72] J. Torrès et T. Martin, Euro. Phys.J. B **12**, 319 (1999).
- [73] J. Torrès, T. Martin, et G. B. Lesovik, Phys. Rev. B **63**, 134517 (2001).
- [74] G. Lesovik, T. Martin, et G. Blatter, Eur. Phys. J. B **24**, 287 (2001).
- [75] M. Schechter, Y. Imry, et Y. Levinson, Phys. Rev.B **64**, 224513 (2001).
- [76] F. Taddei et R. Fazio, Phys. Rev. B **65**, 134522 (2001).
- [77] P. Samuelsson et M. Büttiker, Phys. Rev. B **66**, 201306 (2002).
- [78] G. Bignon, M. Houzet, F. Pistolesi, et F. W. J. Hekking, EuroPhys. Lett. **67**, 110 (2004).
- [79] D. Feinberg, Eur. Phys. J. B **36**, 419 (2003).
- [80] R. Mélin et D. Feinberg, Phys. Rev. B **70**, 174509 (2004).
- [81] N. M. Chtchelkatchev et I. S. Burmistrov, Phys. Rev. B **68**, 140501 (2003).
- [82] N. M. Chtchelkatchev, JETP Lett. **78**, 230 (2003).
- [83] D. V. Averin et K. K. Likharev, dans *Mesoscopic Phenomena in Solids*, édité par B. L. Altshuler, P. A. Lee, et R. A. Webb (North-Holland, Amsterdam, 1991).
- [84] G. L. Ingold et Y. V. Nazarov, dans *Single Charge Tunneling*, édité par H. Grabert et M. H. Devoret (Plenum, New-York, 1992).
- [85] J. J. Hesse et G. Diener, Physica B **203**, 393 (1994).
- [86] A. Huck, F. W. J. Hekking, et B. Kramer, Eurphys. Lett. **41**, 201 (1998).
- [87] A. O. Caldeira et A. J. Leggett, Ann. Phys. (N.Y.) **149**, 374 (1983).
- [88] M. H. Devoret, D. Esteve, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, et C. Urbina, Phys. Rev. Lett. **64**, 1824 (1990).

- [89] G. Eilenberger, Z. Phys. **214**, 195 (1968).
- [90] A. I. Larkin et Y. V. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **26**, 1200 (1968).
- [91] J. Rammer et H. Smith, Rev. Mod. Phys. **58**, 323 (1986).
- [92] C. J. Lambert et R. Raimondi, J. Phys. : Condens. Matter **10**, 901 (1998).
- [93] N. B. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity* (Oxford University Press, 2001).
- [94] V. Chandrasekhar, dans *The Physics of Superconductors : Vol. II*, édité par K. H. Bennemann et J. B. Ketterson (Springer, Berlin, 2004).
- [95] K. D. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).
- [96] S. F. Edwards, Phil. Mag **3**, 1020 (1995).
- [97] L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965).
- [98] A. A. Abrikosov et L. P. Gorkov, Sov. Phys. JETP **8** (1959).
- [99] J. W. Serene et D. Rainer, Phys. Rep. **101**, 221 (1983).
- [100] A. I. Larkin et Y. V. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **41**, 960 (1976).
- [101] A. V. Zaitsev, Sov. Phys. JETP **59**, 863 (1984).
- [102] S. A. L., J. Low Temp. Phys. **60**, 29 (1985).
- [103] A. V. Zaitsev, Sov. Phys. JETP **59**, 1015 (1984).
- [104] Y. V. Nazarov, Superlattices Microstruct. **25**, 1221 (1999).
- [105] M. A. Skvortsov, A. I. Larkin, et M. V. Feigelman, Phys. Rev. B **63**, 134507 (2001).
- [106] E. V. Bezuglyi, E. N. Bratus', V. S. Shumeiko, et V. Vinokur, Phys. Rev. B **70** (2004).
- [107] M. Houzet et F. Pistolesi, Phys. Rev. Lett. **92**, 107004 (2004).
- [108] A. F. Volkov, A. V. Zaitsev, et T. M. Klapwijk, Physica C **210**, 21 (1993).
- [109] D. Quirion, C. Hoffmann, F. Lefloch, et M. Sanquer, Phys. Rev. B **65**, 100508(R) (2002).
- [110] F. Giazotto, P. Pingue, F. Beltram, M. Lazzarino, D. Orani, S. Rubini, et A. Franciosi, Phys. Rev. Lett. **87**, 216808 (2001).
- [111] A. A. Clerk, P. W. Brouwer, et V. Ambegaokar, Phys. Rev. B **62**, 10226 (2000).
- [112] G. Bignon, F. Pistolesi, et M. Houzet (2004), cond-mat/0502453.
- [113] C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. B **46**, R12841 (1992).

-
- [114] K. E. Nagaev et M. Büttiker, Phys. Rev. B **66**, 195318 (2002).
 - [115] K. M. Schep et G. E. W. Bauer, Phys. Rev. Lett. **78**, 3015 (1997).
 - [116] C. W. J. Beenakker, dans *Quantum Mesoscopic Phenomena and Mesoscopic Devices in Microelectronics*, édité par I. Kulik et R. Ellialtıoglu (Kluwer, Dordrecht, 2000).
 - [117] H. B. Callen et T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
 - [118] M. J. M. de Jong et C. W. J. Beenakker, dans *Mesoscopic Electron Transport*, édité par L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven, et G. Schön (Kluwer, Dordrecht, 1997).
 - [119] A. L. Fauchère, G. B. Lesovik, et G. Blatter, Phys. Rev. B **58**, 11177 (1998).
 - [120] M. Vanevic and W. Belzig, cond-mat/0412321 (unpublished).
 - [121] W. Belzig et P. Samuelsson, Europhys. Lett. **64**, 253 (2003).
 - [122] K. E. Nagaev, P. Samuelsson, et S. Pilgram, Phys. Rev. B **63**, 081301(R) (2002).
 - [123] C. W. J. Beenakker et M. Büttiker, Phys. Rev. B **46**, 1889 (1992).
 - [124] O. N. Dorokhov, Solid State Comm. **51**, 381 (1984).
 - [125] G. E. Blonder, M. Tinkham, et T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **25**, 4515 (1982).
 - [126] J. A. Melsen, P. W. Brower, K. M. Frahm, et C. W. H. Beenakker, Eur. Phys. Lett. **35**, 7 (1996).
 - [127] E. Toyoda, H. Takayanagi, et H. Nakano, J. Phys. Soc. Japan **69**, 1801 (2000).
 - [128] H. Takayanagi, E. Toyoda, et T. Akazaki, Physica C **367**, 204 (2002).

Liste des publications

Publications dans des revues internationales à comité de lecture

- *Subgap noise of a superconductor-normal-metal tunnel interface*
F. Pistolesi, G. Bignon, and F.W.J. Hekking
Physical Review B **69**, 214518 (2004), also cond-mat/0303165.
- *Current-current correlations in hybrid superconducting and normal-metal multiterminal structures*
G. Bignon, M. Houzet, F. Pistolesi, and F. W. J. Hekking
Europhysics Letters **67**, 110 (2004) , also cond-mat/0310349.

Publications dans des conférences internationales

- *Cross current correlations in superconducting/normal metal structures*
G. Bignon, M. Houzet, F. Pistolesi, and F. W. J. Hekking
in *Quantum Information and Decoherence in Nanosystems*, edited by D. C. Glattli, M. Sanquer, and J. Trân Thanh Vân, XXXIXth Rencontres de Moriond.
- *Detecting crossed andreev reflection by cross-current correlation*
G. Bignon, M. Houzet, F. Pistolesi, and F. W. J. Hekking
in *Realizing controllable quantum states*, edited by H. Takayanagi and J. Nitta, World Scientific 2005.

Publications soumises

- *Energy dependence of current noise in double-barrier normal-superconducting structures*
G. Bignon, F. Pistolesi, and M. Houzet
cond-mat/0502453 .

Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

Titre de l'ouvrage :

Corrélations de courant dans les structures mésoscopiques supraconducteur - métal normal

Auteur :

Guillaume BIGNON

Établissement :

Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés

Titre : Corrélations de courant dans les structures mésoscopiques supraconducteur - métal normal

Résumé : Grâce aux progrès expérimentaux de ces vingt dernières années en miniaturisation et cryogénie, il est maintenant possible de réaliser des circuits électriques de taille suffisamment petite pour que le comportement ondulatoire des électrons devienne important à basse température et modifie les propriétés du transport électrique comme le courant ou le bruit. C'est l'échelle mésoscopique. Si, de plus, un supraconducteur est connecté à un tel circuit, les effets d'interférences entre électrons augmentent car le supraconducteur est une source macroscopique de paires d'électrons cohérents : les paires de Cooper. Dans cette thèse, nous étudions les corrélations du courant dans les structures mésoscopiques métal normal - supraconducteur. Nous nous intéressons d'abord à la dépendance en énergie du bruit en courant dans une jonction tunnel simple métal normal - isolant - supraconducteur en prenant en compte les effets du désordre et les interactions. Nous montrons que si les réservoirs ne sont pas à l'équilibre thermodynamique, le courant et le bruit sont indépendants. On considère ensuite une structure où le supraconducteur est connecté à deux métaux normaux par des jonctions tunnel. Nous montrons alors que la corrélation croisée du courant peut changer de signe et qu'elle contient des informations sur la taille des paires de Cooper. Enfin, à l'aide de la théorie quasi-classique d'Usadel, on étudie la dépendance en énergie du bruit dans une double jonction en série métal normal - métal normal - supraconducteur et montrons que la transparence des jonctions joue un rôle important.

Mots clés : supraconductivité mésoscopique, bruit de grenaille, fluctuations de courant, réflexion Andreev, jonction tunnel, corrélations

Title : Current correlations in superconductor - normal metal mesoscopic structures

Abstract : Thanks to the experimental progress in miniaturization and cryogenics over the last twenty years, it is now possible to build sufficiently small electric circuits where the wave like nature of electron becomes significant. In such electric circuit transport properties like current and noise are modified. It corresponds to the mesoscopic scale. Moreover, connecting a mesoscopic circuit to a superconductor enhances the effects due to interference between electrons since a superconductor is a macroscopic source of coherent electrons pairs : the Cooper pairs. In this thesis, we study current correlations in mesoscopic normal metal - superconductor structures. First, the energy dependence of current noise in a normal metal - superconductor tunnel junction is analysed taking into account weak disorder and interactions. We show that if the normal metal is out of equilibrium, current and noise become independent. Next, we consider the case of a superconductor connected to two normal metals by tunnel junctions. We show that it is possible to change the sign of current crossed correlation by tuning the voltages and that it can be used to probe the size of the Cooper pairs. Lastly, using Usadel's quasi-classic theory, we study the energy dependence of noise in a normal metal - normal metal - superconductor double junction. We show that barrier's transparencies modifies significantly both current and noise.

Keywords : mesoscopic superconductivity, shot noise, current fluctuations, Andreev reflection, tunnel junction, correlations